Cours #3
CORPS RIGIDES
Moment d'une force

1. Forces internes et externes
2. Principe de transmissibilité
3. Moment d'une force/point (produit vectoriel)
4. Moment d'une force/axe (produit scalaire et produit mixte)

CORPS RIGIDE

Objet qui ne se déforme pas

Machines et structures réelles :

Non parfaitement rigides

Se déforment sous les charges appliquées

Mécanique des solides ou des **corps rigides**

Déformations faibles:

n'affectent pas l'équilibre ou le mouvement des structures considérés

Mécanique des matériaux

ou

Résistance des corps déformables

Étude des déformations et de la résistance à la rupture des corps

FORCES INTERNES et EXTERNES

Forces externes

Action des autres corps sur le corps rigide considéré

Détermine le comportement externe du corps à l'étude:

repos ou mouvement

Forces internes

Assurent l'intégrité du corps rigide

Forces d'interaction entre les particules d'un corps

Forces qui retiennent ensemble les différents corps rigides d'une structure

FORCES EXTERNES

Exemple

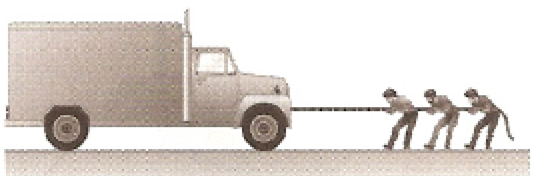


Figure 3.1

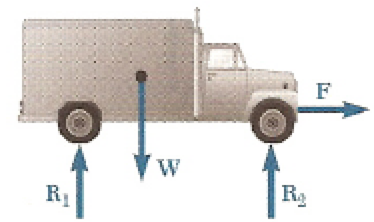


Figure 3.2

Le DCL du camion montre:

W (poids): tire le camion vers le bas

R_1 et R_2: forces de réaction du sol sur le camion empêchant le camion de tomber

F: force de traction

Comportement externe du camion: translation

Si on augmente R_2: rotation autour de l'essieu arrière

Mouvement possible du camion:

translation, rotation, combinaison translation-rotation

PRINCIPE de TRANSMISSIBILITÉ

L'**<u>équilibre</u>** ou le **mouvement** d'un **corps rigide** reste inchangé
lorsqu'on remplace
une force **F** agissant sur un point du corps
par
une force **F'** (même grandeur, même direction)
appliquée à un autre point du corps,
à condition que les deux forces aient la même ligne d'action.

Les **forces** F et F' sont dites **équivalentes** parce qu'elles produisent le **même effet** sur le corps rigide.

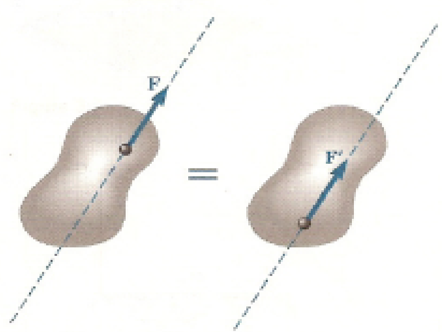


Figure 3.3

PRINCIPE de TRANSMISSIBILITÉ (suite)

Pour les PARTICULES:

VECTEURS LIÉS

Le principe de transmissibilité ne s'applique pas

Pour les CORPS RIGIDES:

VECTEURS GLISSANTS

Les forces peuvent être glissées sur leur ligne d'action sans changer l'effet sur le corps.

PRINCIPE de TRANSMISSIBILITÉ

Exemple

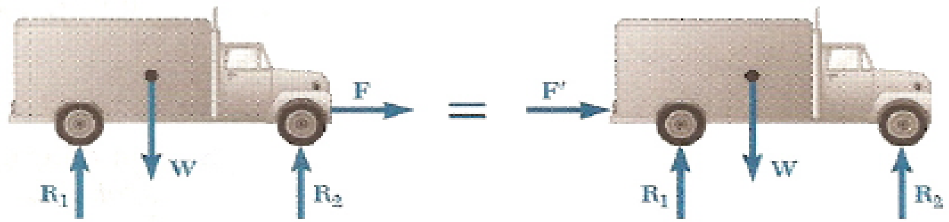


Figure 3.4

Le principe de transmissibilité permet:
Remplacer F par une force équivalente F'

Le mouvement du camion reste le même,
que les hommes poussent sur le pare-chocs arrière
ou
qu'ils tirent sur le pare-chocs avant.

PRINCIPE de TRANSMISSIBILITÉ

Limites

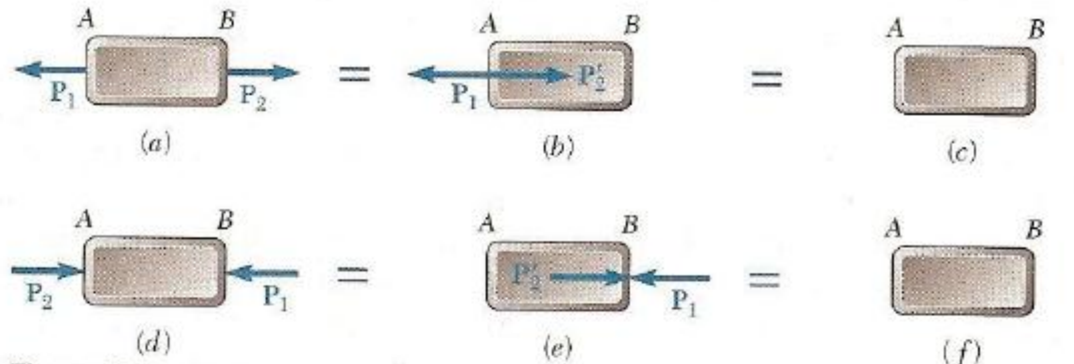


Figure 3.5

OUI

MÉCANIQUE des CORPS RIGIDES

étude du mouvement ou de l'équilibre des corps rigides

NON

RÉSISTANCE des CORPS DÉFORMABLES

étude des forces internes et de la déformation des corps

PRODUIT VECTORIEL de 2 VECTEURS

$$\mathbf{P} \times \mathbf{Q} = \mathbf{V}$$

Où **V** satisfait aux conditions suivantes:

1. Ligne d'action de **V** perpendiculaire au plan contenant **P** et **Q**
2. $V = PQ \sin\theta$
3. Sens de **V** déterminée par la règle de la main droite

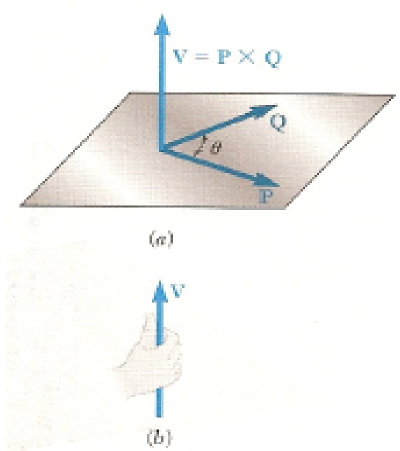


Figure 3.6

le

PRODUIT VECTORIEL de 2 VECTEURS

Propriétés

$$\mathbf{V} = \mathbf{P} \times \mathbf{Q}$$

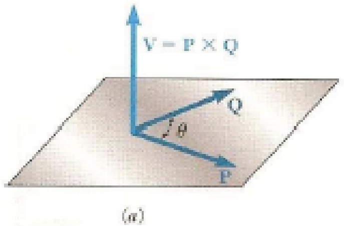


Figure 3.6

$$V = PQ \sin\theta$$

Si θ = 0° ou 180°: $V = 0$

Si θ ≠ 0° ou 180°:

V = aire du parallélogramme délimité par **P** et **Q**

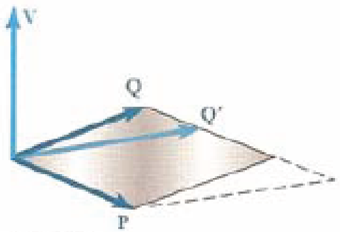


Figure 3.7

$$\mathbf{V} = \mathbf{P} \times \mathbf{Q} = \mathbf{P} \times \mathbf{Q'}$$

Si **Q'** = vecteur coplanaire à **P** et **Q**

Si la ligne joignant l'extrémité de **Q** et **Q'** est parallèle à **P**.

PRODUIT VECTORIEL de 2 VECTEURS

Exemple

Exemple. Déterminons le produit vectoriel $\mathbf{V} = \mathbf{P} \times \mathbf{Q}$ où $\mathbf{P}$, de grandeur égale à 6, se situe dans le plan zx et forme un angle de 30° avec l'axe des x ; le vecteur $\mathbf{Q}$, d'une grandeur de 4 unités, suit l'axe des x (figure 3.8).

Considérant la définition du produit vectoriel, on déduit que le vecteur $\mathbf{V}$ suivra l'axe des y, vers le haut, et que sa grandeur sera

$$V = PQ \sin\theta = (6)(4)\sin 30° = 12$$

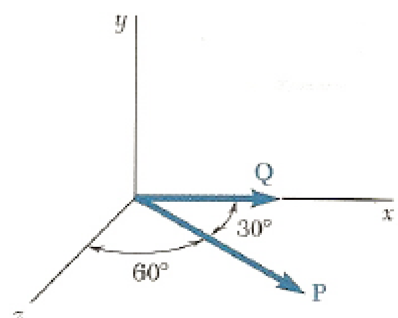


Figure 3.8

PRODUIT VECTORIEL

Propriétés (suite)

Non commutativité

$$\mathbf{P} \times \mathbf{Q} \neq \mathbf{Q} \times \mathbf{P}$$

$$\mathbf{P} \times \mathbf{Q} = -(\mathbf{Q} \times \mathbf{P})$$

Distributivité

$$\mathbf{P} \times (\mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_2) = \mathbf{P} \times \mathbf{Q}_1 + \mathbf{P} \times \mathbf{Q}_2$$

Non associativité

$$(\mathbf{P} \times \mathbf{Q}) \times \mathbf{S} \neq \mathbf{P} \times (\mathbf{Q} \times \mathbf{S})$$

PRODUITS VECTORIELS

Composantes rectangulaires

$$\mathbf{i} \times \mathbf{i} = 0 \qquad \mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k} \qquad \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$$
$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \qquad \mathbf{j} \times \mathbf{j} = 0 \qquad \mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i}$$
$$\mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j} \qquad \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i} \qquad \mathbf{k} \times \mathbf{k} = 0$$

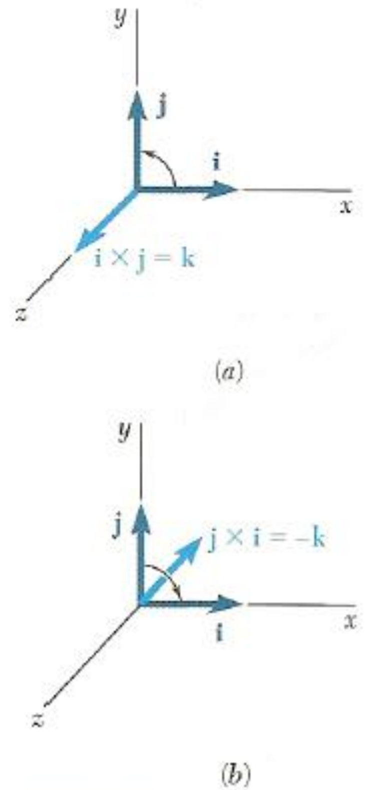


Figure 3.10

PRODUITS VECTORIELS
composantes rectangulaires (suite)

$$\mathbf{V} = \mathbf{P} \times \mathbf{Q} = (P_x\,\mathbf{i} + P_y\,\mathbf{j} + P_z\,\mathbf{k}) \times (Q_x\,\mathbf{i} + Q_y\,\mathbf{j} + Q_z\,\mathbf{k})$$

$$\mathbf{V} = (P_yQ_z - P_zQ_y)\mathbf{i} + (P_zQ_x - P_xQ_z)\mathbf{j} + (P_xQ_y - P_yQ_x)\mathbf{k}$$

Les composantes du vecteur **V** s'écrivent:

$$V_x = P_yQ_z - P_zQ_y$$
$$V_y = P_zQ_x - P_xQ_z$$
$$V_z = P_xQ_y - P_yQ_x$$

$$\mathbf{V} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix}$$

MOMENT d'une FORCE / POINT

Problèmes en 2 dimensions

Plaque rigide d'épaisseur négligeable

Rotation anti-horaire

Rotation horaire

(a) $M_O = +Fd$

(b) $M_O = -Fd$

Figure 3.13

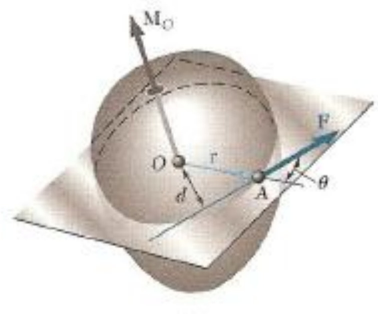
En 2D:

$\mathbf{M}_o = \pm M_o = \pm Fd$

Inutile de préciser la direction,

Le moment est toujours perpendiculaire à la page

MOMENT d'une FORCE / POINT



(a)

Figure 3.12

(b)

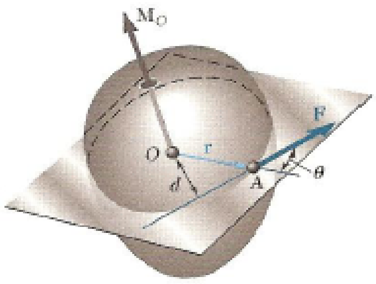
Figure 3.12

La grandeur M_o mesure:
la tendance de la force **F** à entraîner la **rotation** du corps rigide par rapport à un axe fixe dans la direction de $\mathbf{M_o}$.

MOMENT d'une FORCE par rapport à un POINT

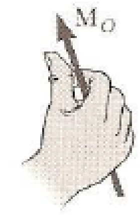
Pour une force **F** appliquée à un corps rigide,
le moment de **F** par rapport à un point O
est défini comme suit:

$$\mathbf{M_o} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$



(a)

Figure 3.12



(b)

Figure 3.12

$\mathbf{M_o}$ est perpendiculaire au plan incluant **r** et **F.**
La règle de la main droite:
Rotation de r vers F
établit le sens de Mo.

$$M_o = rF \sin\theta = Fd$$

Théorème de VARIGNON

Pierre Varignon (1654 – 1722)

Pour les forces concourantes

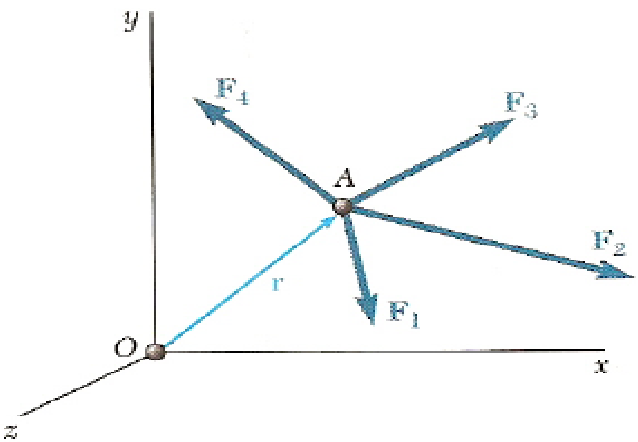


Figure 3.14

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \ldots) = \mathbf{r} \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r} \times \mathbf{F}_2 + \ldots$$

MOMENT d'une FORCE / POINT

Composantes rectangulaires

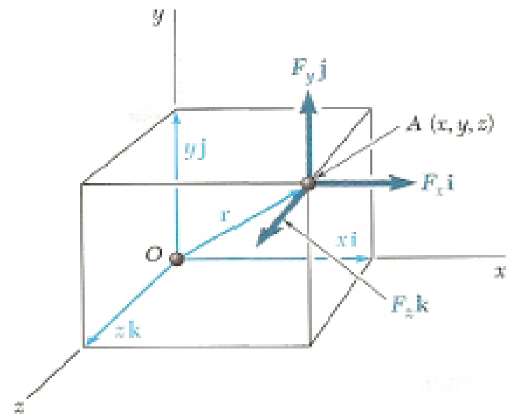


Figure 3.15

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \tag{3.15}$$

$$\mathbf{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + F_z\mathbf{k} \tag{3.16}$$

$$\mathbf{M}_O = M_x\mathbf{i} + M_y\mathbf{j} + M_z\mathbf{k} \tag{3.17}$$

Mesure de la tendance à la rotation autour des axes x, y et z, au point o

$$\begin{aligned} M_x &= yF_z - zF_y \\ M_y &= zF_x - xF_z \\ M_z &= xF_y - yF_x \end{aligned} \tag{3.18}$$

$$\mathbf{M}_O = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \tag{3.19}$$

MOMENT d'une FORCE / POINT

Composantes rectangulaires (suite)

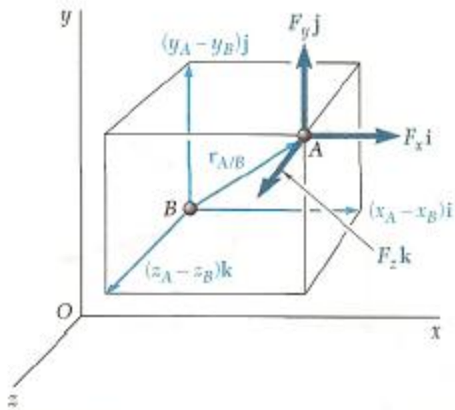


Figure 3.16

$$\mathbf{M}_B = \mathbf{r}_{A/B} \times \mathbf{F} = (\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B) \times \mathbf{F} \qquad (3.20)$$

$$\mathbf{M}_B = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_{A/B} & y_{A/B} & z_{A/B} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \qquad (3.21)$$

MOMENT d'une FORCE / POINT

Composantes rectangulaires – problème en 2 dimensions

$$\mathbf{M_o} = (xF_y - yF_x)\mathbf{k}$$

$$M_o = M_z = xF_y - yF_x$$

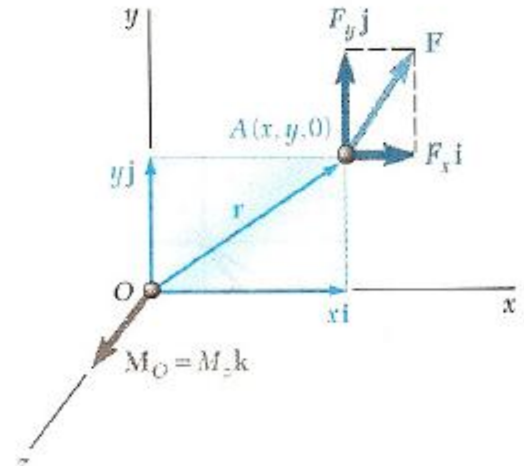


Figure 3.17

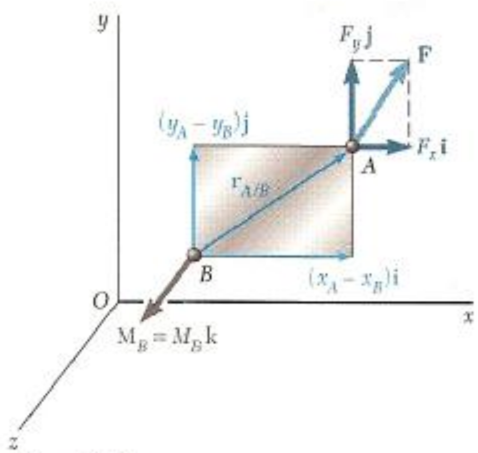


Figure 3.18

$$M_B = (x_A - x_B)F_y - (y_A - y_B)F_x$$

MOMENT d'une FORCE / POINT

Exemple: Problème 3.3 (p.79)

3.3 Une force **P** de 8 N est appliquée à un levier de changement de vitesse (figure P3.3 - P3.5). Déterminez le moment de **P** par rapport au point B si $\alpha = 25°$.

Calculez le moment de 5 façons différentes

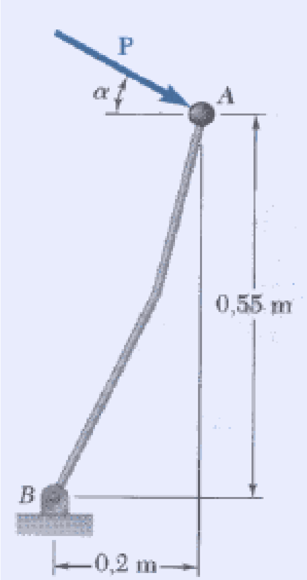


Figure P3.3 - P3.5

PRODUIT SCALAIRE de 2 VECTEURS

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} = PQ \cos\theta$$

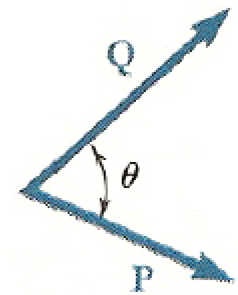


Figure 3.19

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} = (P_x\,\mathbf{i} + P_y\,\mathbf{j} + P_z\,\mathbf{k}) \cdot (Q_x\,\mathbf{i} + Q_y\,\mathbf{j} + Q_z\,\mathbf{k})$$

Comme: $i \cdot i = 1 \quad j \cdot j = 1 \quad j \cdot j = 1$

$i \cdot j = 0 \quad j \cdot k = 0 \quad k \cdot i = 0$

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} = P_xQ_x + P_yQ_y + P_zQ_z$$

PRODUIT SCALAIRE de 2 VECTEURS

Commutativité

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{P}$$

Distributivité

$$\mathbf{P} \cdot (\mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_2) = \mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}_1 + \mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}_2$$

PRODUIT SCALAIRE 2 VECTEURS

Application 1

Applications

1. *Angle entre deux vecteurs donnés.* Écrivons deux vecteurs en fonction de leurs composantes.

$$\mathbf{P} = P_x\mathbf{i} + P_y\mathbf{j} + P_z\mathbf{k}$$
$$\mathbf{Q} = Q_x\mathbf{i} + Q_y\mathbf{j} + Q_z\mathbf{k}$$

On détermine l'angle entre les deux vecteurs en égalisant les expressions du produit scalaire 3.24 et 3.30. On a

$$PQ\cos\theta = P_xQ_x + P_yQ_y + P_zQ_z$$

En isolant $\cos\theta$, on trouve

$$\cos\theta = \frac{P_xQ_x + P_yQ_y + P_zQ_z}{PQ} \tag{3.32}$$

PRODUIT SCALAIRE de 2 VECTEURS

Application 2

2. *Projection d'un vecteur sur un axe.* Considérons un vecteur **P** formant un angle θ avec un axe, ou ligne directrice, OL (figure 3.21). On définit la *projection de* **P** *sur l'axe* OL par le scalaire

$$P_{OL} = P\cos\theta \qquad (3.33)$$

La projection P_{OL} est égale, en valeur absolue, à la longueur du segment OA ; elle prend une valeur positive si OA va dans le même sens que l'axe OL, c'est-à-dire si θ est aigu, et une valeur négative si θ est obtus. Si **P** et OL forment un angle droit, la projection de **P** sur OL est égale à zéro.

Considérons maintenant un vecteur **Q** dirigé le long de OL et dans le même sens que cet axe (figure 3.22). Le produit scalaire de **P** et **Q** s'écrit

$$\mathbf{P}\cdot\mathbf{Q} = PQ\cos\theta = P_{OL}Q \qquad (3.34)$$

Il s'ensuit que

$$P_{OL} = \frac{\mathbf{P}\cdot\mathbf{Q}}{Q} = \frac{P_xQ_x + P_yQ_y + P_zQ_z}{Q} \qquad (3.35)$$

Dans le cas particulier où le vecteur choisi le long de OL est le vecteur unitaire $\boldsymbol{\lambda}$ (figure 3.23), on a

$$\boxed{P_{OL} = \mathbf{P}\cdot\boldsymbol{\lambda}} \qquad (3.36)$$

Exprimons maintenant les vecteurs **P** et $\boldsymbol{\lambda}$ en fonction de leurs composantes rectangulaires. Rappelons que les composantes de $\boldsymbol{\lambda}$ le long des axes du système de coordonnées sont respectivement égales aux cosinus directeurs de OL (section 2.12). La projection de **P** sur OL devient

$$P_{OL} = P_x\cos\theta_x + P_y\cos\theta_y + P_z\cos\theta_z \qquad (3.37)$$

où θ_x, θ_y, et θ_z représentent les angles entre OL et chacun des axes du système.

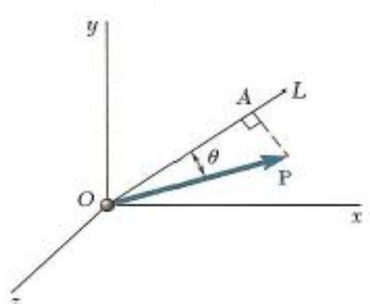


Figure 3.21

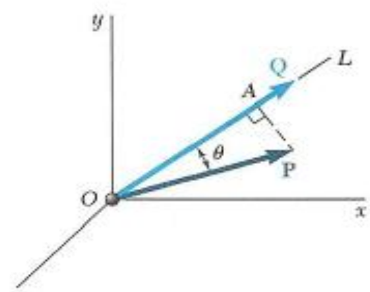


Figure 3.22

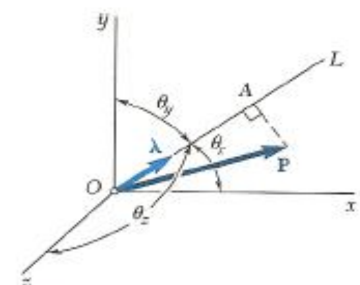
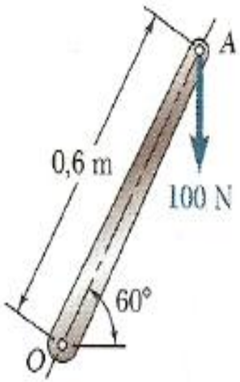


Figure 3.23

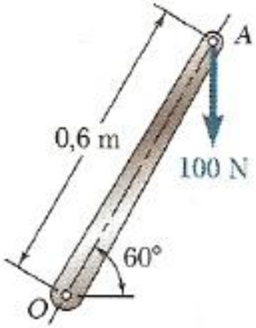
Problème résolu 3.1

PROBLÈME RÉSOLU PR-3.1



Une force verticale de 100 N est appliquée à l'extrémité d'un levier attaché à un axe en O. Déterminez : a) le moment de la force par rapport à O ; b) la grandeur de la force horizontale appliquée en A qui produira le même moment par rapport à O ; c) la force minimale qui, appliquée au point A, produira le même moment ; d) la distance par rapport à l'axe à laquelle il faut placer une force verticale de 240 N pour créer le même moment par rapport à O ; e) si l'une des forces trouvées en b, c et d est équivalente à la force de 100 N.

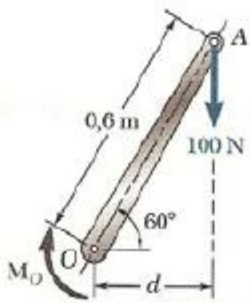
Problème résolu 3.1



PROBLÈME RÉSOLU PR-3.1

Une force verticale de 100 N est appliquée à l'extrémité d'un levier attaché à un axe en O. Déterminez : a) le moment de la force par rapport à O ; b) la grandeur de la force horizontale appliquée en A qui produira le même moment par rapport à O ; c) la force minimale qui, appliquée au point A, produira le même moment ; d) la distance par rapport à l'axe à laquelle il faut placer une force verticale de 240 N pour créer le même moment par rapport à O ; e) si l'une des forces trouvées en b, c et d est équivalente à la force de 100 N.

SOLUTION



a) Moment par rapport à O. La distance perpendiculaire qui sépare O et la ligne d'action de la force de 100 N est

$$d = (0{,}6\,\mathrm{m})\cos 60° = 0{,}3\,\mathrm{m}$$

La grandeur du moment créé par la force de 100 N par rapport au point O est

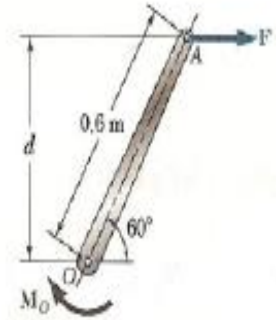
$$M_O = Fd = (100\,\mathrm{N})(0{,}3\,\mathrm{m}) = 30\,\mathrm{N\cdot m}$$

Étant donné que la force a tendance à faire tourner le levier dans le sens horaire par rapport à O, on représente le moment par un vecteur $\mathbf{M}_O$ perpendiculaire au plan de la figure et qui *entre* dans la page. Ceci est exprimé par

$$\mathbf{M}_O = 30\,\mathrm{N\cdot m} \circlearrowright$$

rapport à O, on représente le moment par un vecteur $\mathbf{M}_O$ perpendiculaire au plan de la figure et qui *entre* dans la page. Ceci est exprimé par

$$\mathbf{M}_O = 30\,\mathrm{N \cdot m}\,\lrcorner$$ ◀

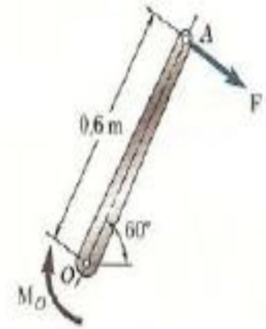


b) **Force horizontale.** Dans ce cas, on a

$$d = (0{,}6\,\mathrm{m})\sin 60° = 0{,}52\,\mathrm{m}$$

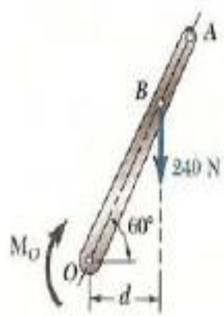
Puisque le moment par rapport au point O doit être de 30 N·m, alors:

$$M_O = Fd$$
$$30\,\mathrm{N \cdot m} = F(0{,}52\,\mathrm{m})$$
$$F = 57{,}7\,\mathrm{N} \qquad \mathbf{F} = 57{,}7\,\mathrm{N} \rightarrow$$ ◀



c) **Force F minimale.** Étant donné que $M_O = Fd$, la valeur minimale de F correspond à la valeur maximale de d. On choisit la direction de la force afin qu'elle agisse perpendiculairement au levier OA, et on note $d = 0{,}6$ m, d'où

$$M_O = Fd$$
$$30\,\mathrm{N \cdot m} = F(0{,}6\,\mathrm{m})$$
$$F = 50\,\mathrm{N} \qquad \mathbf{F} = 50\,\mathrm{N} \searrow 30°$$ ◀



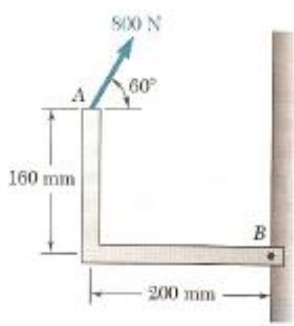
d) **Force verticale de 240 N.** Dans cette situation, on peut écrire

$$30\,\mathrm{N \cdot m} = (240\,\mathrm{N})d \qquad d = 0{,}125\,\mathrm{m}$$

or: $OB\cos 60° = d$ donc $OB = 0{,}25\,\mathrm{m}$ ◀

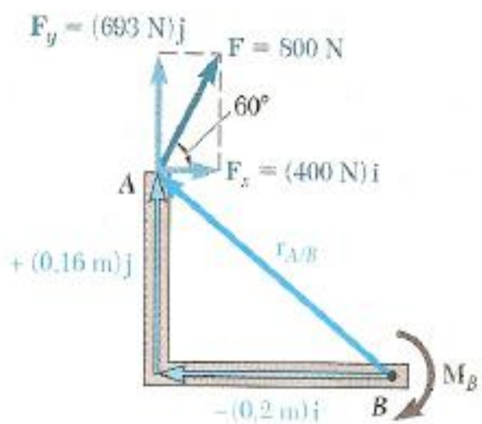
e) Aucune des forces trouvées en b, c et d n'est équivalente à la force originale de 100 N. Malgré le fait qu'elles produisent le même moment par rapport au point O, elles ont des composantes x et y différentes. En d'autres mots, bien que les forces produisent la même rotation sur le levier, chacune d'elles entraîne le levier à tirer sur l'axe d'une manière différente.

Problème résolu 3.2



PROBLÈME RÉSOLU PR-3.2

Une force de 800 N agit sur le support tel qu'illustré. Calculez le moment de la force par rapport au point B.



SOLUTION

Le moment $\mathbf{M}_B$ de la force $\mathbf{F}$ au point B est évalué par

$$\mathbf{M}_B = \mathbf{r}_{A/B} \times \mathbf{F}$$

où $\mathbf{r}_{A/B}$ est le vecteur tracé de B à A. En décomposant $\mathbf{r}_{A/B}$ et $\mathbf{F}$ en composantes rectangulaires, on a

$$\mathbf{r}_{A/B} = -(0{,}2\,\mathrm{m})\mathbf{i} + (0{,}16\,\mathrm{m})\mathbf{j}$$
$$\mathbf{F} = (800\,\mathrm{N})\cos 60°\mathbf{i} + (800\,\mathrm{N})\sin 60°\mathbf{j}$$
$$= (400\,\mathrm{N})\mathbf{i} + (693\,\mathrm{N})\mathbf{j}$$

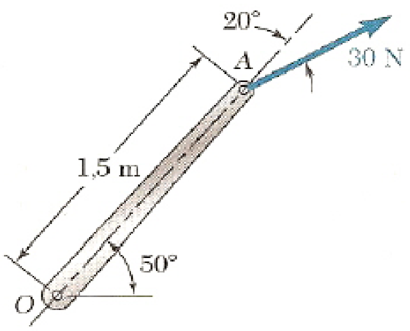
Or, à partir des produits vectoriels des vecteurs unitaires présentés aux équations 3.7 de la section 3.5, on obtient

$$\mathbf{M}_B = \mathbf{r}_{A/B} \times \mathbf{F} = [-(0{,}2\,\mathrm{m})\mathbf{i} + (0{,}16\,\mathrm{m})\mathbf{j}] \times [(400\,\mathrm{N})\mathbf{i} + (693\,\mathrm{N})\mathbf{j}]$$
$$= -(138{,}6\,\mathrm{N\cdot m})\mathbf{k} - (64{,}0\,\mathrm{N\cdot m})\mathbf{k}$$
$$= -(202{,}6\,\mathrm{N\cdot m})\mathbf{k}$$

$$\mathbf{M}_B = 203\,\mathrm{N\cdot m} \circlearrowright$$ ◄

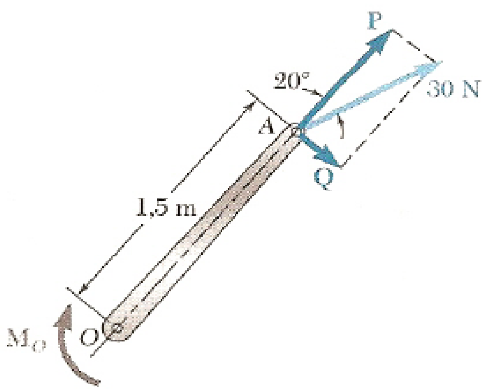
Le moment $\mathbf{M}_B$ est un vecteur perpendiculaire au plan de la figure et il *entre* dans la page.

Problème résolu 3.3



PROBLÈME RÉSOLU PR-3.3

Une force de 30 N agit à l'extrémité d'un levier ayant une longueur de 1,5 m tel qu'illustré. Évaluez le moment de la force par rapport au point O.



SOLUTION

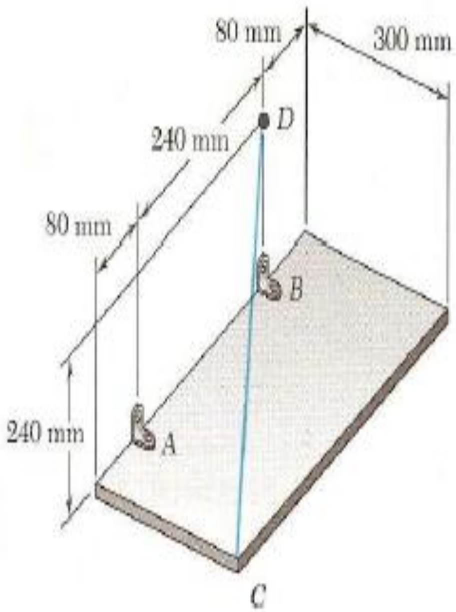
On décompose la force de 30 N en deux composantes, **P** suivant l'axe OA et **Q** perpendiculaire à OA. Étant donné que le point O se trouve sur la ligne d'action de la force **P**, le moment de **P** par rapport à O est nul, et le moment de la force de 30 N se réduit au moment de **Q**, qui est orienté en sens horaire et donc négatif en représentation scalaire.

$$Q = (30\,\text{N}) \sin 20° = 10{,}26\,\text{N}$$
$$M_O = -Q(1{,}5\,\text{m}) = -(10{,}26\,\text{N})(1{,}5\,\text{m}) = -15{,}4\,\text{N}\cdot\text{m}$$

Étant donné que le résultat scalaire M_O est négatif, le moment $\mathbf{M}_O$ *entre* dans la page et s'écrit

$$\mathbf{M}_O = 15{,}4\,\text{N}\cdot\text{m} \circlearrowright \quad ◄$$

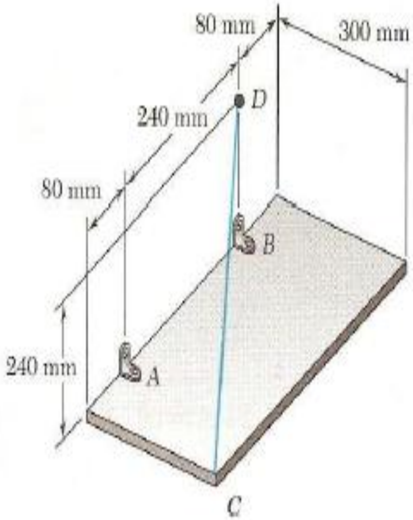
Problème résolu 3.4



PROBLÈME RÉSOLU PR-3.4

Une plate-forme rectangulaire est fixée à un mur à l'aide de deux supports *A* et *B* et d'un fil de fer *CD*. La tension dans *CD* est de 200 N. Évaluez le moment par rapport au point *A* de la force exercée par le fil de fer au point *C*.

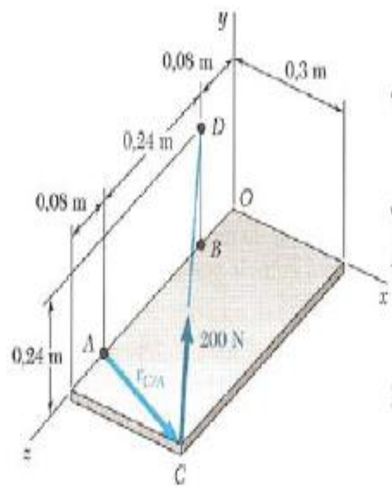
Problème résolu 3.4



PROBLÈME RÉSOLU PR-3.4

Une plate-forme rectangulaire est fixée à un mur à l'aide de deux supports A et B et d'un fil de fer CD. La tension dans CD est de 200 N. Évaluez le moment par rapport au point A de la force exercée par le fil de fer au point C.

SOLUTION



Le moment $\mathbf{M}_A$ par rapport au point A de la force $\mathbf{F}$ exercée par le câble au point C est évalué par le produit vectoriel

$$\mathbf{M}_A = \mathbf{r}_{C/A} \times \mathbf{F} \tag{1}$$

où $\mathbf{r}_{C/A}$ est le vecteur tracé du point A au point C,

$$\mathbf{r}_{C/A} = \overrightarrow{AC} = (0{,}3\,\mathrm{m})\mathbf{i} + (0{,}08\,\mathrm{m})\mathbf{k} \tag{2}$$

et $\mathbf{F}$ est la force de 200 N dirigée selon CD. En introduisant le vecteur unitaire $\boldsymbol{\lambda} = \overrightarrow{CD}/CD$, on peut écrire

$$\mathbf{F} = F\boldsymbol{\lambda} = (200\,\mathrm{N})\frac{\overrightarrow{CD}}{CD} \tag{3}$$

La décomposition du vecteur $\overrightarrow{CD}$ donne

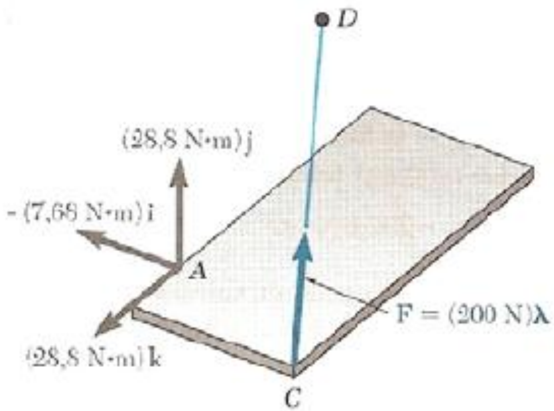
$$\overrightarrow{CD} = -(0{,}3\,\mathrm{m})\mathbf{i} + (0{,}24\,\mathrm{m})\mathbf{j} - (0{,}32\,\mathrm{m})\mathbf{k} \qquad CD = 0{,}50\,\mathrm{m}$$

Par substitution, on aura

$$\mathbf{F} = \frac{200\text{N}}{0{,}50\text{m}}[-(0{,}3\,\text{m})\mathbf{i} + (0{,}24\,\text{m})\mathbf{j} - (0{,}32\,\text{m})\mathbf{k}]$$
$$= -(120\,\text{N})\mathbf{i} + (96\,\text{N})\mathbf{j} - (128\,\text{N})\mathbf{k} \qquad (4)$$

En substituant dans l'équation 1 les expressions obtenues en 2 et 4 pour $\mathbf{r}_{C/A}$ et $\mathbf{F}$, et en utilisant les équations 3.7 de la section 3.5, on obtient

$$\mathbf{M}_A = \mathbf{r}_{C/A} \times \mathbf{F} = (0{,}3\mathbf{i} + 0{,}08\mathbf{k}) \times (-120\mathbf{i} + 96\mathbf{j} - 128\mathbf{k})$$
$$= (0{,}3)(96)\mathbf{k} + (0{,}3)(-128)(-\mathbf{j}) + (0{,}08)(-120)\mathbf{j} + (0{,}08)(96)(-\mathbf{i})$$
$$\mathbf{M}_A = -(7{,}68\,\text{N}\cdot\text{m})\mathbf{i} + (28{,}8\,\text{N}\cdot\text{m})\mathbf{j} + (28{,}8\,\text{N}\cdot\text{m})\mathbf{k} \quad ◄$$



$$\mathbf{F} = \frac{200\text{N}}{0{,}50\text{m}}[-(0{,}3\,\text{m})\mathbf{i} + (0{,}24\,\text{m})\mathbf{j} - (0{,}32\,\text{m})\mathbf{k}]$$
$$= -(120\,\text{N})\mathbf{i} + (96\,\text{N})\mathbf{j} - (128\,\text{N})\mathbf{k} \qquad (4)$$

En substituant dans l'équation 1 les expressions obtenues en 2 et 4 pour $\mathbf{r}_{C/A}$ et $\mathbf{F}$, et en utilisant les équations 3.7 de la section 3.5, on obtient

$$\mathbf{M}_A = \mathbf{r}_{C/A} \times \mathbf{F} = (0{,}3\mathbf{i} + 0{,}08\mathbf{k}) \times (-120\mathbf{i} + 96\mathbf{j} - 128\mathbf{k})$$
$$= (0{,}3)(96)\mathbf{k} + (0{,}3)(-128)(-\mathbf{j}) + (0{,}08)(-120)\mathbf{j} + (0{,}08)(96)(-\mathbf{i})$$
$$\mathbf{M}_A = -(7{,}68\,\text{N}\cdot\text{m})\mathbf{i} + (28{,}8\,\text{N}\cdot\text{m})\mathbf{j} + (28{,}8\,\text{N}\cdot\text{m})\mathbf{k} \quad ◀$$

Solution alternative. Tel que spécifié à la section 3.8, le moment $\mathbf{M}_A$ peut être présenté sous la forme d'un déterminant :

$$\mathbf{M}_A = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_C - x_A & y_C - y_A & z_C - z_A \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0{,}3 & 0 & 0{,}08 \\ -120 & 96 & -128 \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{M}_A = -(7{,}68\,\text{N}\cdot\text{m})\mathbf{i} + (28{,}8\,\text{N}\cdot\text{m})\mathbf{j} + (28{,}8\,\text{N}\cdot\text{m})\mathbf{k} \quad ◀$$

PRODUIT MIXTE de 3 VECTEURS

$$\boxed{\mathbf{S}\cdot(\mathbf{P}\times\mathbf{Q})} \qquad (3.38)$$

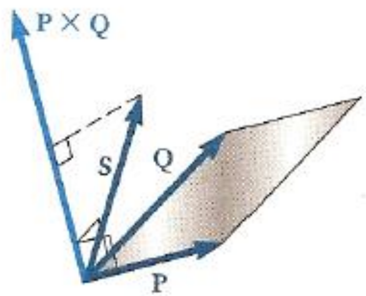


Figure 3.24

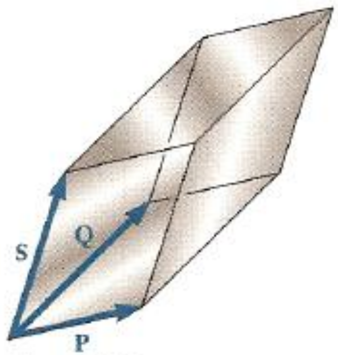


Figure 3.25

$$\begin{aligned}\mathbf{S}\cdot(\mathbf{P}\times\mathbf{Q}) &= \mathbf{P}\cdot(\mathbf{Q}\times\mathbf{S}) = \mathbf{Q}\cdot(\mathbf{S}\times\mathbf{P}) \\ &= -\mathbf{S}\cdot(\mathbf{Q}\times\mathbf{P}) = -\mathbf{P}\cdot(\mathbf{S}\times\mathbf{Q}) = -\mathbf{Q}\cdot(\mathbf{P}\times\mathbf{S})\end{aligned} \qquad (3.39)$$

$$\mathbf{S}\cdot(\mathbf{P}\times\mathbf{Q}) = S_x(P_yQ_z - P_zQ_y) + S_y(P_zQ_x - P_xQ_z) + S_z(P_xQ_y - P_yQ_x) \qquad (3.40)$$

$$\boxed{\mathbf{S}\cdot(\mathbf{P}\times\mathbf{Q}) = \begin{vmatrix} S_x & S_y & S_z \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix}} \qquad (3.41)$$

MOMENT d'une FORCE par rapport à un AXE

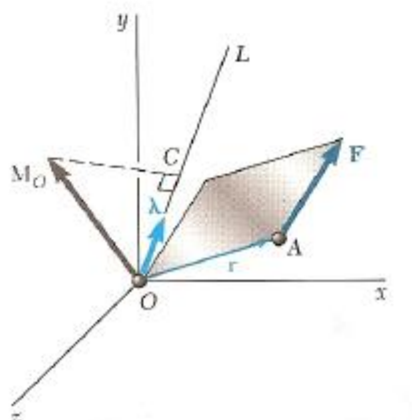


Figure 3.27

$$M_{OL} = \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{M}_O = \boldsymbol{\lambda} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) \qquad (3.42)$$

$$M_{OL} = \begin{vmatrix} \lambda_x & \lambda_y & \lambda_z \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \qquad (3.43)$$

Le moment M_{OL} de **F** par rapport à OL
mesure la tendance de la force **F** à procurer au corps rigide
un mouvement de rotation autour de l'axe fixe OL.

MOMENT d'une FORCE / AXE (suite)

En remplaçant:

F par $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$

et

r par $\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2$

Où

$\mathbf{F}_1$ et $\mathbf{r}_1$ sont parallèles à *OL*

Et

$\mathbf{F}_2$ et $\mathbf{r}_2$ sont dans le plan P, perpendiculaires à *OL*

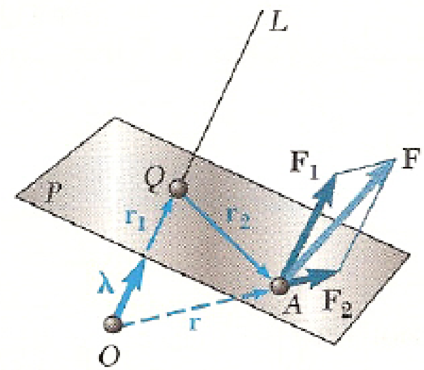


Figure 3.28

$$M_{OL} = \boldsymbol{\lambda} \cdot [(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2) \times (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2)]$$
$$= \boldsymbol{\lambda} \cdot (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1) + \boldsymbol{\lambda} \cdot (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_2) + \boldsymbol{\lambda} \cdot (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_1) + \boldsymbol{\lambda} \cdot (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2)$$

$$M_{OL} = \boldsymbol{\lambda} \cdot (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2) \qquad (3.44)$$

MOMENT d'une FORCE / AXE
(suite)

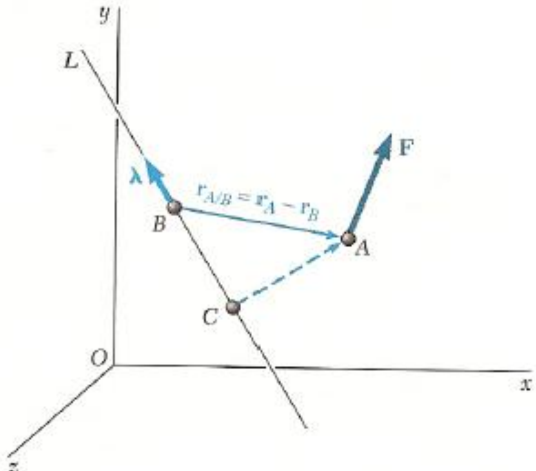


Figure 3.29

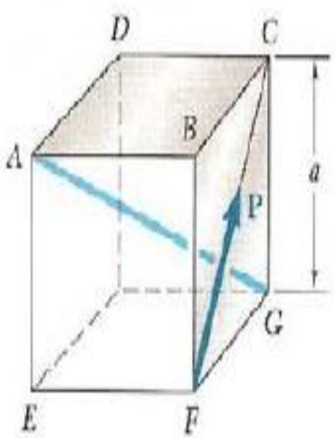
$$M_{BL} = \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{M}_B = \boldsymbol{\lambda} \cdot (\mathbf{r}_{A/B} \times \mathbf{F}) \qquad (3.45)$$

$$M_{BL} = \begin{vmatrix} \lambda_x & \lambda_y & \lambda_z \\ x_{A/B} & y_{A/B} & z_{A/B} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \qquad (3.46)$$

$$\begin{aligned} M_{CL} &= \boldsymbol{\lambda} \cdot [(\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_C) \times \mathbf{F}] \\ &= \boldsymbol{\lambda} \cdot [(\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B) \times \mathbf{F}] + \boldsymbol{\lambda} \cdot [(\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_C) \times \mathbf{F}] \end{aligned}$$

$$M_{CL} = \boldsymbol{\lambda} \bullet [\, (\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B) \times \mathbf{F} \,] = M_{BL}$$

Problème résolu



PROBLÈME RÉSOLU PR-3.5

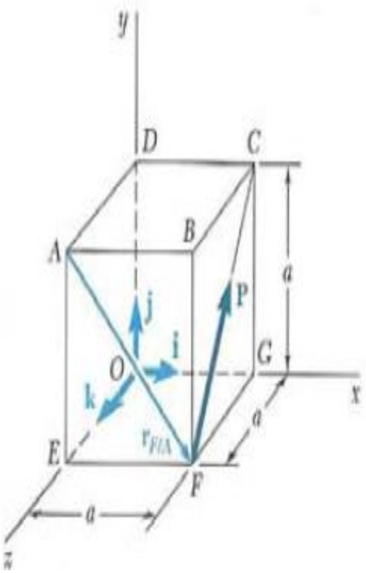
Une force **P** agit tel qu'illustré sur un cube dont les côtés mesurent a. Déterminez les moments créés par **P** :

a) par rapport au point A du cube ;

b) par rapport à l'arête AB du cube ;

c) par rapport à la diagonale AG du cube.

d) En utilisant la réponse trouvée en c, déterminez la distance perpendiculaire séparant AG et FC.



SOLUTION

a) **Moment M_A de la force P par rapport à A.** En choisissant les trois axes x, y et z tel qu'illustré, on décompose la force **P** et le vecteur $\mathbf{r}_{F/A} = \overrightarrow{AF}$ tracé du point A au point d'application F de la force **P**.

$$\mathbf{r}_{F/A} = a\mathbf{i} - a\mathbf{j} = a(\mathbf{i} - \mathbf{j})$$

$$\mathbf{P} = (P/\sqrt{2})\mathbf{j} - (P/\sqrt{2})\mathbf{k} = (P/\sqrt{2})(\mathbf{j} - \mathbf{k})$$

Le moment de **P** par rapport à A est

$$\mathbf{M}_A = \mathbf{r}_{F/A} \times \mathbf{P} = a(\mathbf{i} - \mathbf{j}) \times (P/\sqrt{2})(\mathbf{j} - \mathbf{k})$$

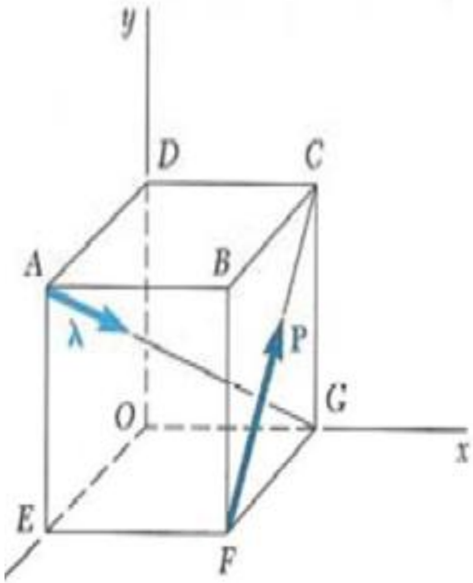
$$\mathbf{M}_A = (aP/\sqrt{2})(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}) \blacktriangleleft$$

b) Moment $\mathbf{M}_{AB}$ de la force $\mathbf{P}$ par rapport à AB. En projetant $\mathbf{M}_A$ sur l'arête AB, on écrit

$$M_{AB} = \mathbf{i} \cdot \mathbf{M}_A = \mathbf{i} \cdot (aP/\sqrt{2})(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$$

$$M_{AB} = aP/\sqrt{2} \quad \blacktriangleleft$$

Étant donné que AB est parallèle à l'axe x, M_{AB} correspond à la composante x du moment $\mathbf{M}_A$.



$$M_{AB} = \mathbf{i} \cdot \mathbf{M}_A = \mathbf{i} \cdot (aP/\sqrt{2})(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$$

$$M_{AB} = aP/\sqrt{2}$$

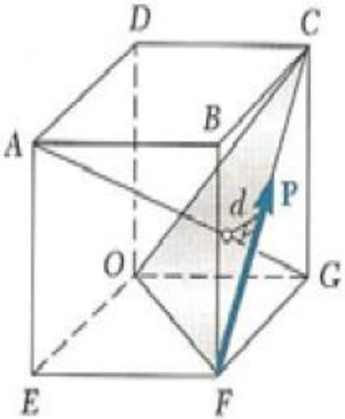
Étant donné que AB est parallèle à l'axe x, M_{AB} correspond à la composante x du moment $\mathbf{M}_A$.

c) Moment M_{AC} de la force P par rapport à la diagonale AG. Le moment de la force **P** par rapport à AG est déterminé en projetant le moment $\mathbf{M}_A$ sur l'axe AG. En identifiant par $\boldsymbol{\lambda}$ le vecteur unitaire le long de l'axe AG, on obtient

$$\boldsymbol{\lambda} = \frac{\overrightarrow{AG}}{AG} = \frac{a\mathbf{i} - a\mathbf{j} - a\mathbf{k}}{a\sqrt{3}} = (1/\sqrt{3})(\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k})$$

$$M_{AC} = \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{M}_A = (1/\sqrt{3})(\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}) \cdot (aP/\sqrt{2})(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$$

$$M_{AC} = (aP/\sqrt{6})(1 - 1 - 1) \quad M_{AC} = -aP/\sqrt{6}$$



d) Distance perpendiculaire entre AG et FC. On remarque que **P** est perpendiculaire à la diagonale AG. Ceci peut facilement être vérifié en s'assurant que le produit scalaire $\mathbf{P}\cdot\boldsymbol{\lambda}$ soit égal à zéro :

$$\mathbf{P}\cdot\boldsymbol{\lambda} = (P/\sqrt{2})(\mathbf{j}-\mathbf{k})\cdot(1/\sqrt{3})(\mathbf{i}-\mathbf{j}-\mathbf{k}) = (P\sqrt{6})(0-1+1) = 0$$

Le moment M_{AG} peut s'écrire $M_{AG} = -Pd$, où d est la distance perpendiculaire séparant AG et FC. Le signe négatif signifie que la rotation subie par le cube sous l'effet de **P** apparaît, pour un observateur placé au point G, dans le sens horaire. En utilisant la réponse de M_{AG} trouvée en c, on obtient

$$M_{AG} = -Pd = -aP/\sqrt{6} \qquad d = a/\sqrt{6}$$

MOMENT d'un COUPLE

2 FORCES **F** et **–F**
(même grandeur, même direction et sens opposé)
forment un **MOMENT de COUPLE** ou **COUPLE**

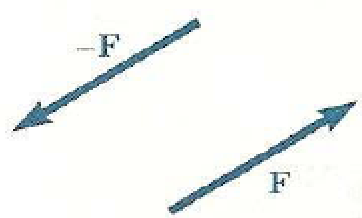


Figure 3.30

$\Sigma F = 0$ les forces ne déplacent pas le corps en **translation**

$\Sigma M_P \neq 0$ les forces entraînent le corps en **rotation**

MOMENT d'un COUPLE

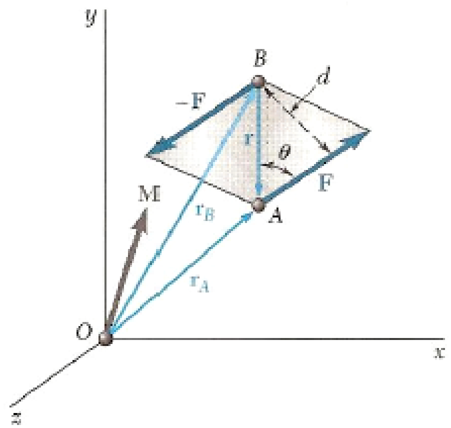


Figure 3.31

$$\Sigma \mathbf{M}_O = \mathbf{r}_A \times \mathbf{F} + \mathbf{r}_B \times (-\mathbf{F}) = (\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B) \times \mathbf{F}$$

Si $\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B = \mathbf{r}$

$$\Sigma \mathbf{M}_O = \mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

Où **r** = vecteur joignant les points d'application des 2 forces

MOMENT d'un COUPLE

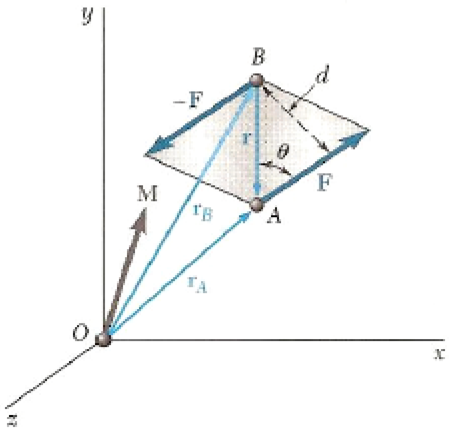


Figure 3.31

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

r indépendant du point *O*

$$\mathbf{M} = \Sigma \mathbf{M}_O = \Sigma \mathbf{M}_{O'}$$

M = **vecteur libre**

Vecteur indépendant du point par rapport auquel on calcule le moment

MOMENT d'un COUPLE

M = moment du couple
Perpendiculaire au plan qui contient les 2 forces

$M = rF\sin\theta = Fd$

d= distance perpendiculaire entre **F** et **–F**

Sens de **M** déterminé par la **règle de la main droite**

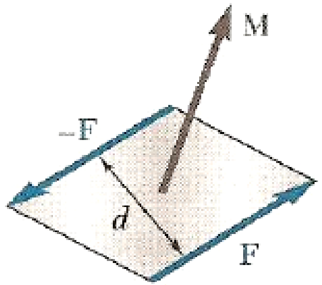


Figure 3.32

ADDITION des COUPLES

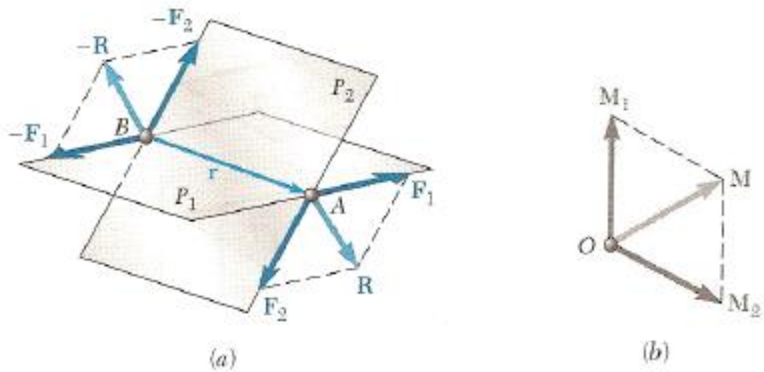


Figure 3.37

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{R} = \mathbf{r} \times (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2)$$

Par le théorème de Varignon:

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r} \times \mathbf{F}_2$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2$$

REPRÉSENTATION VECTORIELLE des COUPLES

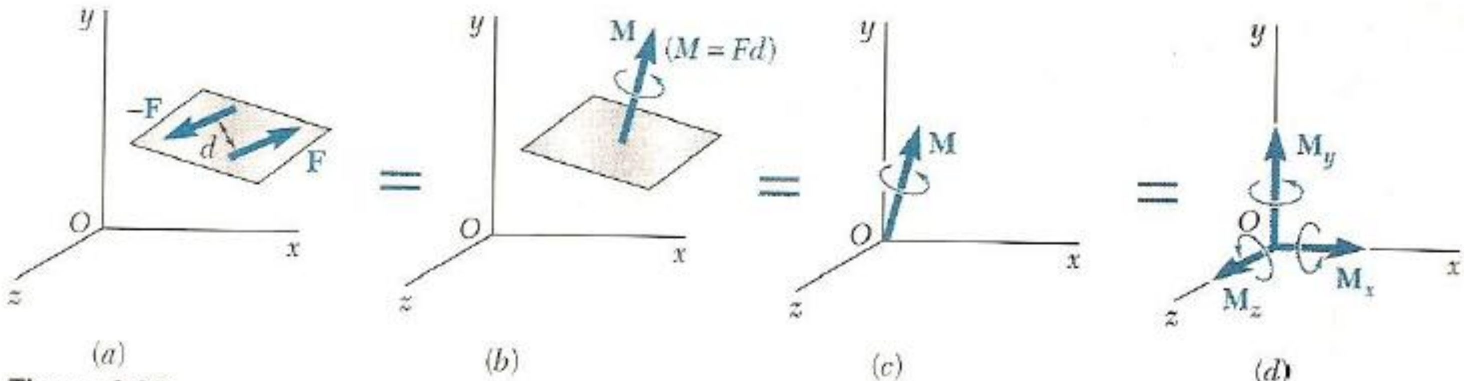


Figure 3.38