Cours #2
La STATIQUE des PARTICULES
Forces dans l'espace (3D)

1. Composantes rectangulaires dans l'espace
2. Addition de forces concourantes dans l'espace
3. Équilibre d'une particule dans l'espace

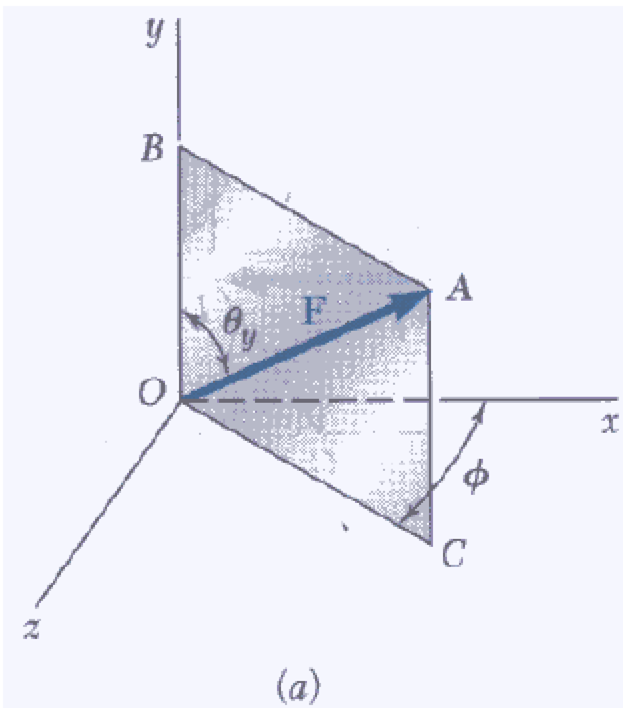
Composantes rectangulaires 3D

3 façons de définir
un vecteur en 3D

À l'aide de:

1. 2 angles (plans horizontal et vertical)
2. Ses **angles directeurs**
3. 2 points sur sa ligne d'action (**par proportionnalité**)

2 angles plans horizontal et vertical



La force F est définie par:

l'angle φ

plan horizontal

et

l'angle θ_y

plan vertical

2 angles plans horizontal et vertical

Figure 2.30

$$F_y = F \cos \theta_y \qquad F_x = F_h \cos \varphi = F \sin \theta_y \cos \varphi$$

$$F_h = F \sin \theta_y \qquad F_z = F_h \sin \varphi = F \sin \theta_y \sin \varphi$$

$$F^2 = F_y^2 + F_h^2 = F_y^2 + F_x^2 + F_z^2$$

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$$

2 ANGLES - plans horizontal et vertical

Exemple: problème 2.71 (p.48)

2.71 En vous référant à la figure P2.71 - P2.72, déterminez :

a) les composantes selon les axes x, y et z de la force de 600 N ;

b) les angles θ_x, θ_y et θ_z que cette force forme avec les axes des x, y et z.

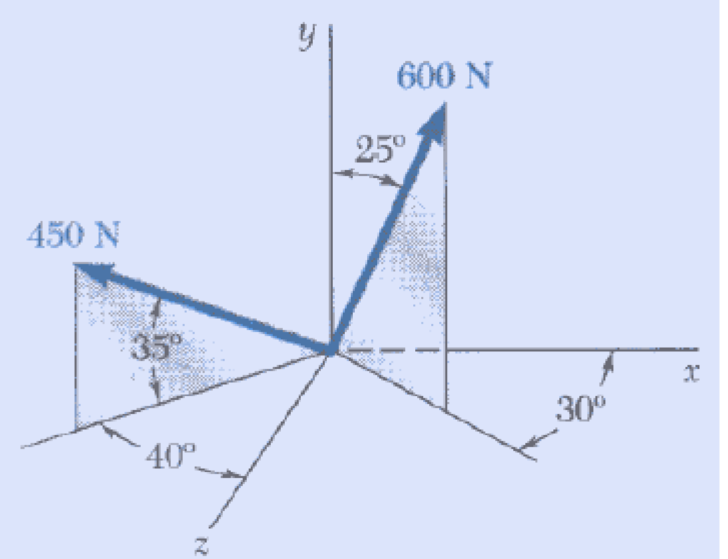


Figure P2.71 - P2.72

Angles directeurs

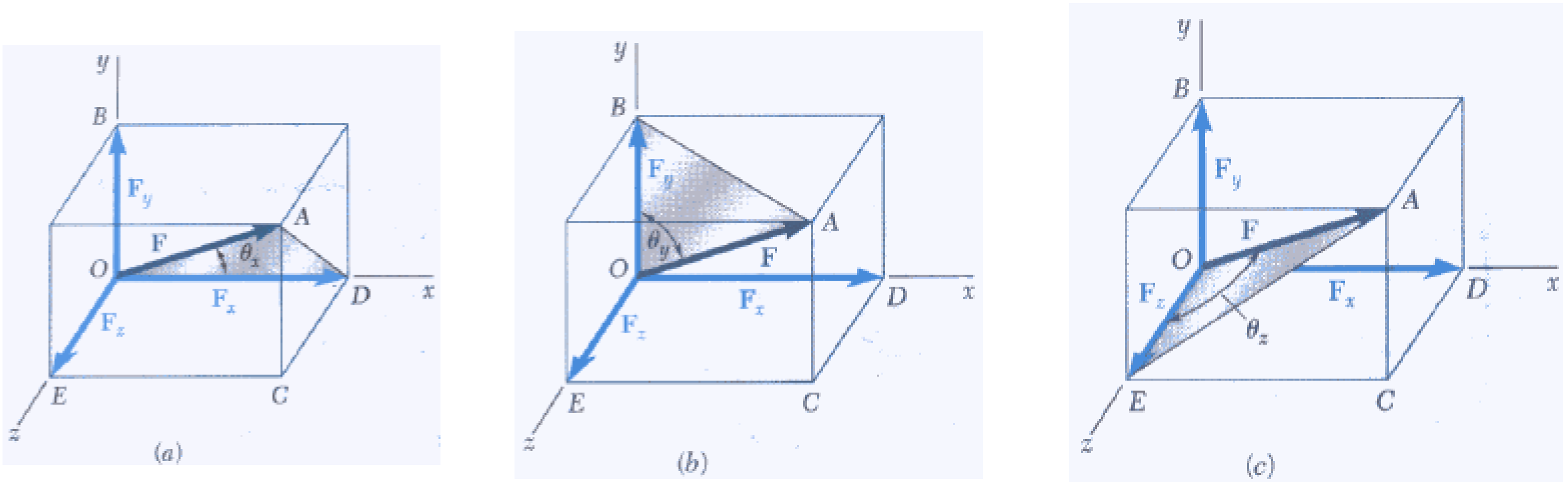


Figure 2.31

$F_x = F \cos\theta_x$ $\quad$ $F_y = F \cos\theta_y$ $\quad$ $F_z = F \cos\theta_z$

θ_x, θ_y et θ_z sont les angles directeurs du vecteur **F**

$$\mathbf{F} = F_x\,\mathbf{i} + F_y\,\mathbf{j} + F_z\,\mathbf{k}$$

Angles directeurs

Exemple 1 (p.40)

Exemple 1. Une force de 500 N forme des angles de 60°, 45° et 120° avec les axes x, y et z respectivement. Déterminons les composantes F_x, F_y et F_z de la force.

En substituant les valeurs $F = 500$ N, $\theta_x = 60°$, $\theta_y = 45°$, $\theta_z = 120°$ dans les équations 2.19, nous trouvons

$$F_x = (500 \text{ N}) \cos 60° = +250 \text{ N}$$
$$F_y = (500 \text{ N}) \cos 45° = +354 \text{ N}$$
$$F_z = (500 \text{ N}) \cos 120° = -250 \text{ N}$$

En insérant ces valeurs dans l'équation 2.20, l'expression de $\mathbf{F}$ devient

$$\mathbf{F} = (250 \text{ N})\mathbf{i} + (354 \text{ N})\mathbf{j} - (250 \text{ N})\mathbf{k}$$

La convention de signes reste la même que pour les problèmes en deux dimensions : le signe positif définit une composante orientée dans le sens positif de l'axe et le signe négatif indique le sens inverse.

Vecteur unitaire

$$\boldsymbol{\lambda} = \cos\theta_x \, \mathbf{i} + \cos\theta_y \, \mathbf{j} + \cos\theta_z \, \mathbf{k}$$

$$\lambda_x = \cos\theta_x \quad \lambda_y = \cos\theta_y \quad \lambda_z = \cos\theta_z$$

$$\lambda_x^2 + \lambda_y^2 + \lambda_z^2 = 1$$

$$\cos^2\theta_x + \cos^2\theta_y + \cos^2\theta_z = 1$$

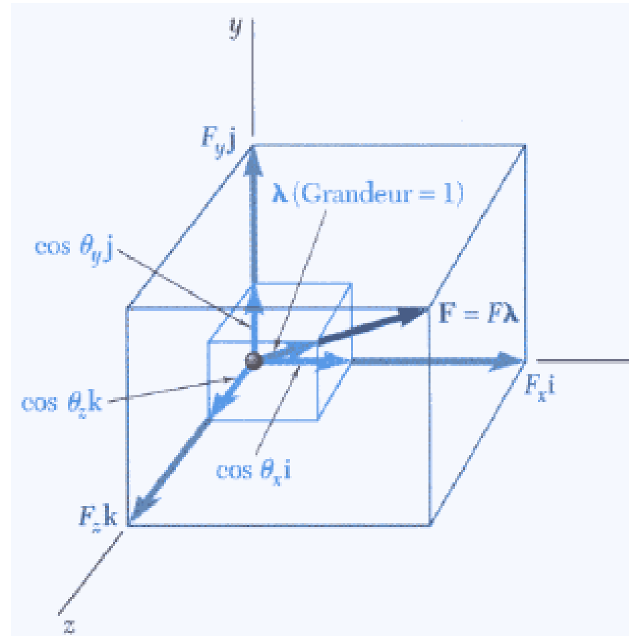


Figure 2.33

Vecteur unitaire

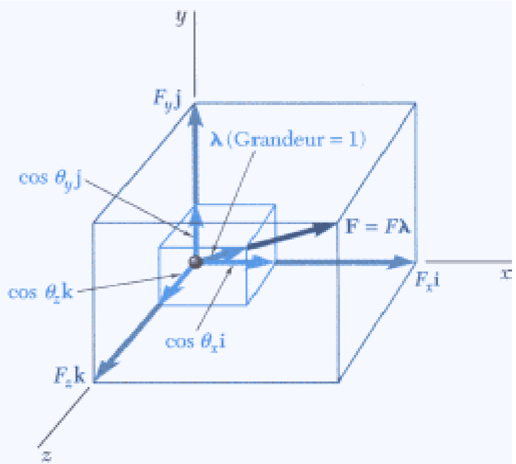


Figure 2.33

$$\mathbf{F} = F_x\,\mathbf{i} + F_y\,\mathbf{j} + F_z\,\mathbf{k}$$

$$\mathbf{F} = F\cos\theta_x\,\mathbf{i} + F\cos\theta_y\,\mathbf{j} + F\cos\theta_z\,\mathbf{k}$$

$$\mathbf{F} = F\,(\cos\theta_x\,\mathbf{i} + \cos\theta_y\,\mathbf{j} + \cos\theta_z\,\mathbf{k})$$

$$\mathbf{F} = F\,\boldsymbol{\lambda}$$

Angles directeurs

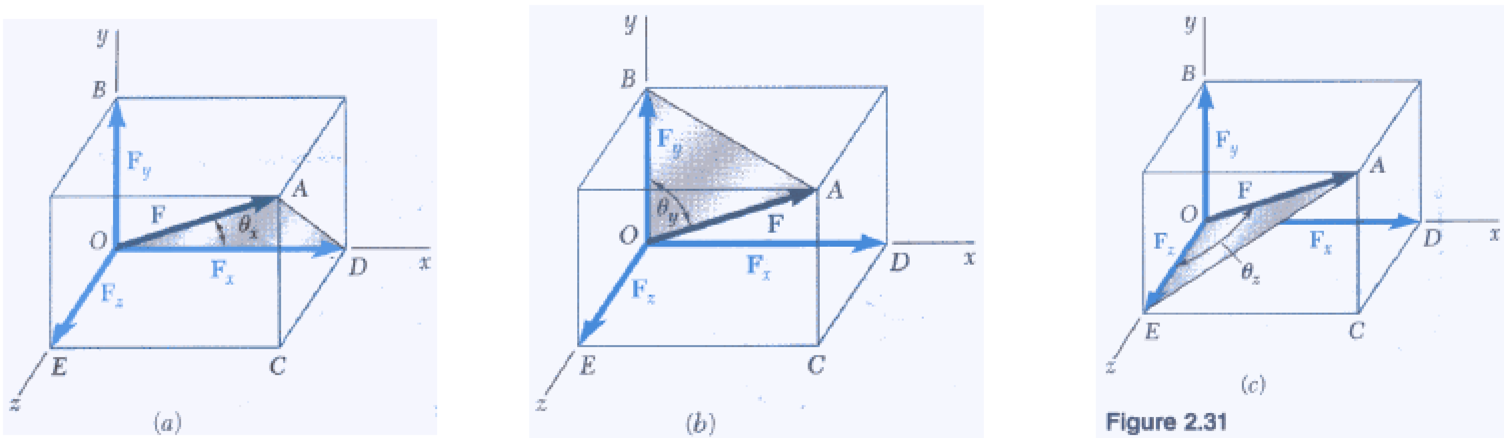


Figure 2.31

Lorsque F_x, F_y et F_z sont connues:

$$\cos\theta_x = \frac{F_x}{F} \qquad \cos\theta_y = \frac{F_y}{F} \qquad \cos\theta_z = \frac{F_z}{F}$$

Angles directeurs

Exemple 2 (p.41)

Exemple 2. Une force **F** a pour composantes $F_x = 20$ N, $F_y = -30$ N et $F_z = 60$ N. Nous voulons déterminer sa grandeur F ainsi que les angles θ_x, θ_y et θ_z qu'elle forme avec les axes du système de coordonnées.

Nous utilisons d'abord l'équation 2.18[6] :

$$\begin{aligned} F &= \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} \\ &= \sqrt{(20\text{ N})^2 + (-30\text{ N})^2 + (60\text{ N})^2} \\ &= \sqrt{4900}\text{ N} = 70\text{ N} \end{aligned}$$

En insérant les valeurs des composantes et de la grandeur de la force dans les équations 2.25, nous trouvons

$$\cos\theta_x = \frac{F_x}{F} = \frac{20\text{ N}}{70\text{ N}} \qquad \cos\theta_y = \frac{F_y}{F} = \frac{-30\text{ N}}{70\text{ N}} \qquad \cos\theta_z = \frac{F_z}{F} = \frac{60\text{ N}}{70\text{ N}}$$

Nous calculons les quotients et nous appliquons ensuite la fonction arc cosinus pour obtenir les angles :

$$\theta_x = 73{,}4° \qquad \theta_y = 115{,}4° \qquad \theta_z = 31{,}0°$$

La calculatrice permet d'effectuer facilement ces opérations.

2 points sur la ligne d'action (par proportionnalité)

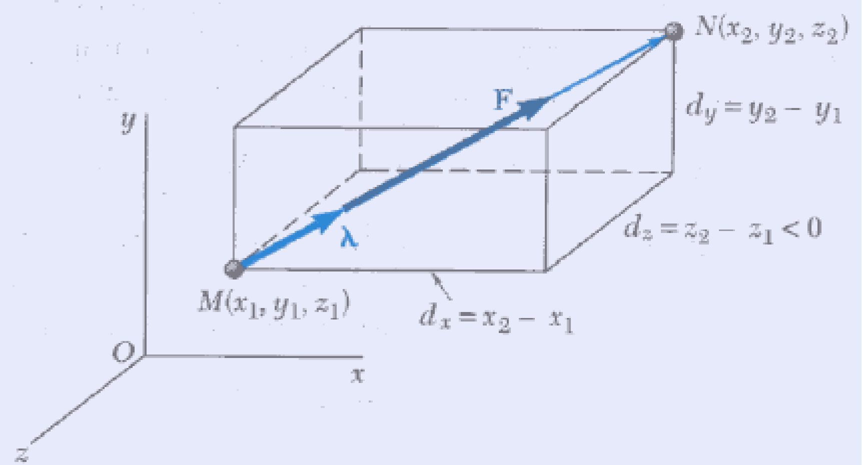


Figure 2.34

$$\overrightarrow{MN} = d_x\mathbf{i} + d_y\mathbf{j} + d_z\mathbf{k}$$

$$\boldsymbol{\lambda} = \frac{\overrightarrow{MN}}{MN} = \frac{1}{d}(d_x\mathbf{i} + d_y\mathbf{j} + d_z\mathbf{k})$$

$$\mathbf{F} = F\boldsymbol{\lambda} = \frac{F}{d}(d_x\mathbf{i} + d_y\mathbf{j} + d_z\mathbf{k})$$

$$F_x = \frac{Fd_x}{d} \qquad F_y = \frac{Fd_y}{d} \qquad F_z = \frac{Fd_z}{d}$$

2 points sur la ligne d'action (par proportionnalité)

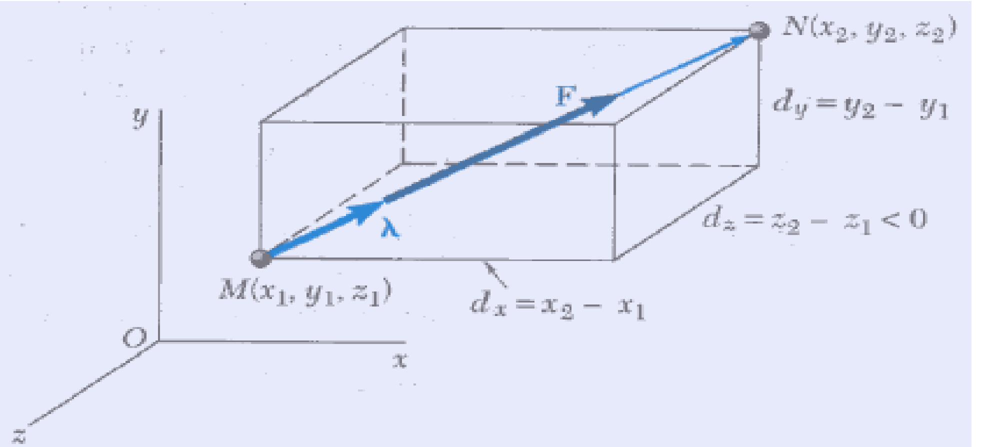


Figure 2.34

$$d_x = x_2 - x_1 \qquad d_y = y_2 - y_1 \qquad d_z = z_2 - z_1$$

$$d = \sqrt{d_x^2 + d_y^2 + d_z^2}$$

$$\cos\theta_x = \frac{d_x}{d} \qquad \cos\theta_y = \frac{d_y}{d} \qquad \cos\theta_z = \frac{d_z}{d}$$

Addition de forces concourantes

On obtient la résultante
de 2 ou plusieurs forces
en additionnant vectoriellement ces forces:

$$\mathbf{R} = \Sigma\mathbf{F}$$

En décomposant :

$$R_x\,\mathbf{i} + R_y\,\mathbf{j} + R_z\,\mathbf{k} = \Sigma(F_x\,\mathbf{i} + F_y\,\mathbf{j} + F_z\,\mathbf{k})$$
$$= (\Sigma F_x)\,\mathbf{i} + (\Sigma F_y)\,\mathbf{j} + (\Sigma F_z)\,\mathbf{k}$$

$$R_x = \Sigma F_x \qquad R_y = \Sigma F_y \qquad R_z = \Sigma F_z$$

Équilibre d'une particule dans l'espace (3D)

Une particule est à l'équilibre
lorsque la résultante des forces agissant sur elle
est nulle

$$\Sigma \mathbf{F} = 0$$

$$\Sigma F_x = 0 \qquad \Sigma F_y = 0 \qquad \Sigma F_z = 0$$

3 équations d'équilibre
donc le problème peut comporter
3 inconnues

Équilibre d'une particule dans l'espace (3D)

Les problèmes d'équilibre 3D se résoudront comme suit:

1. Dessiner le **DCL** de la particule choisie
2. Ressortir les 3 équations d'équilibre

   Celles-ci devraient proposer un maximum de 3 inconnues:

Les 3 composantes d'une force

ou

La grandeur de 3 forces de direction connue

…

Équilibre 3D

Exemple: problème 2.106 (p.54)

2.106 Une caisse de 163 kg est supportée par trois câbles tel qu'illustré à la figure P2.103 - P2.106. Déterminez la tension dans chacun des câbles.

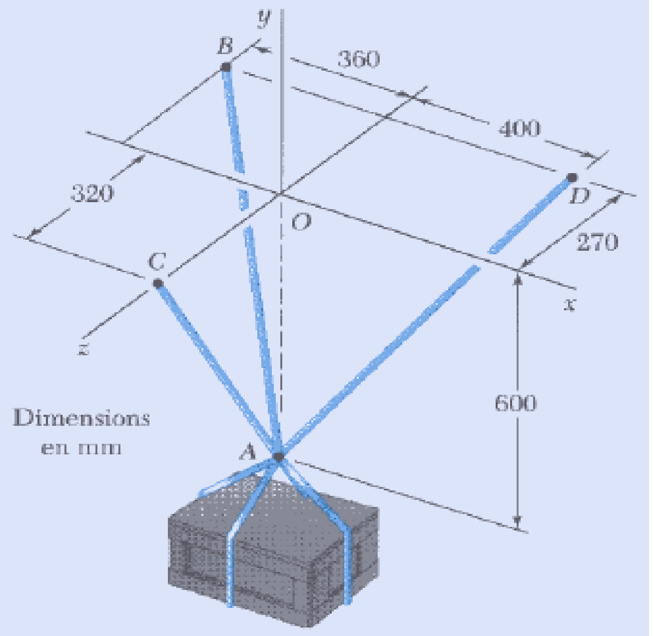
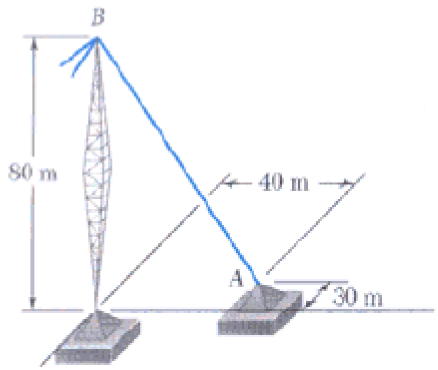


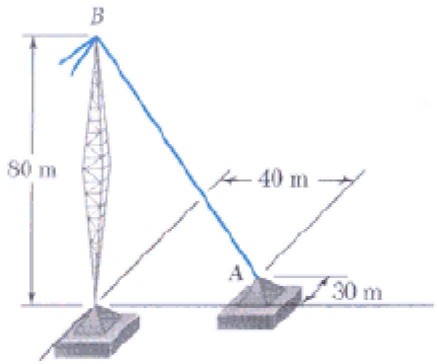
Figure P2.103 - P2.106



PROBLÈME RÉSOLU 2.7

Un hauban d'une tour est ancré au point A. La tension dans le hauban a été évaluée à 2500 N. Calculez:

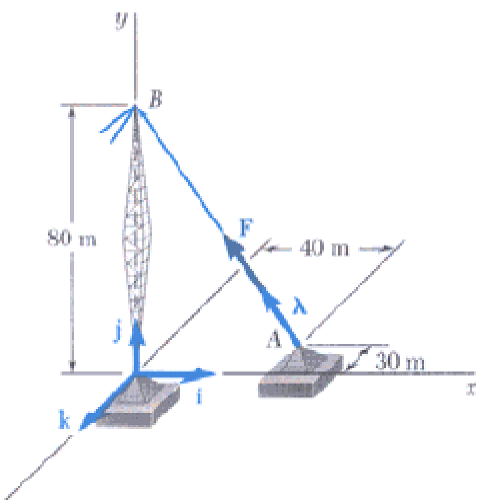
a) les composantes F_x, F_y et F_z de la force transmise au boulon d'ancrage ;
b) les angles θ_x, θ_y et θ_z qui définissent la direction de cette force.



PROBLÈME RÉSOLU 2.7

Un hauban d'une tour est ancré au point A. La tension dans le hauban a été évaluée à 2500 N. Calculez:

a) les composantes F_x, F_y et F_z de la force transmise au boulon d'ancrage ;
b) les angles θ_x, θ_y et θ_z qui définissent la direction de cette force.



SOLUTION

***a)* Composantes de la force.** La ligne d'action de la force transmise au boulon d'ancrage passe par les points *A* et *B* et la force est orientée de *A* vers *B*. Les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}$ ont la même direction que la force. Elles sont donc :

$$d_x = -40 \text{ m} \qquad d_y = +80 \text{ m} \qquad d_z = +30 \text{ m}$$

La distance entre *A* et *B* est

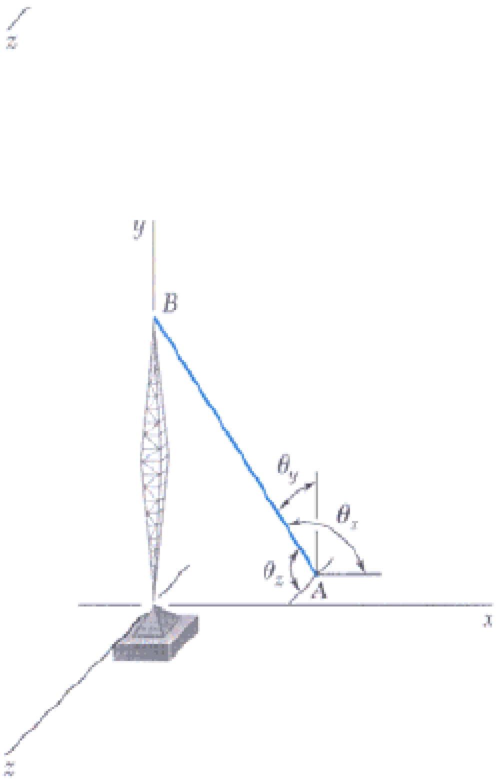
$$AB = d = \sqrt{d_x^2 + d_y^2 + d_z^2} = 94{,}3 \text{ m}$$

En exprimant le vecteur $\overrightarrow{AB}$ à l'aide des vecteurs unitaires **i**, **j** et **k**, on a

$$\overrightarrow{AB} = -(40 \text{ m})\mathbf{i} + (80 \text{ m})\mathbf{j} + (30 \text{ m})\mathbf{k}$$

En introduisant le vecteur unitaire $\boldsymbol{\lambda} = \overrightarrow{AB}/AB$, on écrit

$$\mathbf{F} = F\boldsymbol{\lambda} = F\frac{\overrightarrow{AB}}{AB} = \frac{2500 \text{ N}}{94{,}3 \text{ m}}\overrightarrow{AB}$$



En substituant l'expression du vecteur $\overrightarrow{AB}$, on obtient

$$\mathbf{F} = \frac{2500\ \text{N}}{94{,}3\ \text{m}}[-(40\ \text{m})\mathbf{i} + (80\ \text{m})\mathbf{j} + (30\ \text{m})\mathbf{k}]$$

$$\mathbf{F} = -(1060\ \text{N})\mathbf{i} + (2120\ \text{N})\mathbf{j} + (795\ \text{N})\mathbf{k}$$

d'où les composantes de la force **F** :

$$F_x = -1060\ \text{N} \qquad F_y = +2120\ \text{N} \qquad F_z = +795\ \text{N} \blacktriangleleft$$

b) **Direction de la force.** En résolvant les équations 2.25 par rapport aux cosinus directeurs de la droite *AB*, on obtient

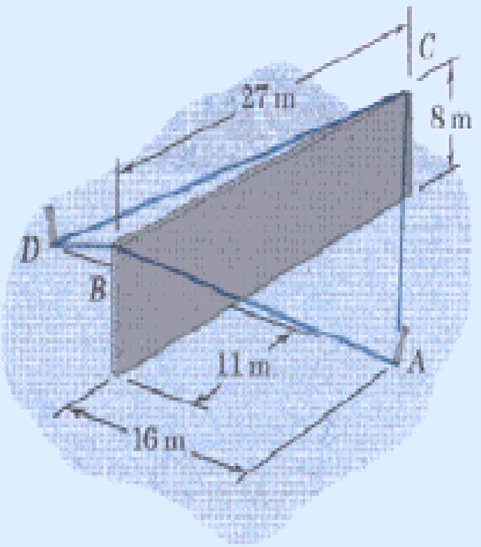
$$\cos\theta_x = \frac{F_x}{F} = \frac{-1060\ \text{N}}{2500\ \text{N}} \qquad \cos\theta_y = \frac{F_y}{F} = \frac{+2120\ \text{N}}{2500\ \text{N}}$$

$$\cos\theta_z = \frac{F_z}{F} = \frac{+795\ \text{N}}{2500\ \text{N}}$$

d'où

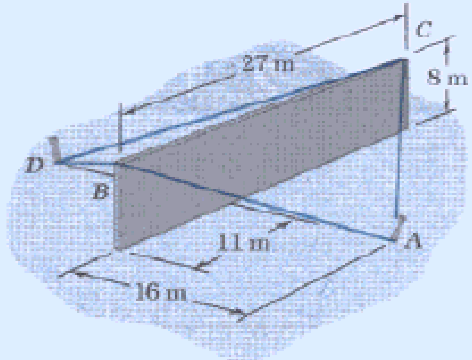
$$\theta_x = 115{,}1° \qquad \theta_y = 32{,}0° \qquad \theta_z = 71{,}5° \blacktriangleleft$$

(*Note*. Ce résultat aurait aussi bien pu être obtenu à l'aide des composantes et de la grandeur de la force **F**.)



PROBLÈME RÉSOLU 2.8

Une section de mur est temporairement retenue par des câbles, tel qu'illustré à la figure ci-contre. Sachant que la tension dans le câble AB est de 8,4 kN et celle dans le câble AC de 12 kN, calculez la grandeur et la direction de la résultante des forces au piquet situé au point A.



PROBLÈME RÉSOLU 2.8

Une section de mur est temporairement retenue par des câbles, tel qu'illustré à la figure ci-contre. Sachant que la tension dans le câble AB est de 8,4 kN et celle dans le câble AC de 12 kN, calculez la grandeur et la direction de la résultante des forces au piquet situé au point A.

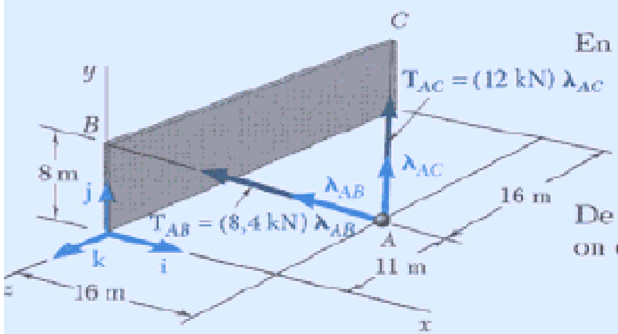
SOLUTION

Les composantes des forces. La force appliquée par chaque câble sur le piquet A peut être décomposée en ses composantes selon les axes des x, y et z. On commence par calculer les composantes et les valeurs des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, en les mesurant du piquet A vers la section du mur. En utilisant les vecteurs unitaires **i**, **j** et **k**, on a

$$\overrightarrow{AB} = -(16\text{ m})\mathbf{i} + (8\text{ m})\mathbf{j} + (11\text{ m})\mathbf{k} \qquad AB = 21\text{ m}$$
$$\overrightarrow{AC} = -(16\text{ m})\mathbf{i} + (8\text{ m})\mathbf{j} - (16\text{ m})\mathbf{k} \qquad AC = 24\text{ m}$$

En identifiant le vecteur unitaire selon AB par le symbole $\boldsymbol{\lambda}_{AB}$, alors

$$\mathbf{T}_{AB} = T_{AB}\boldsymbol{\lambda}_{AB} = T_{AB}\frac{\overrightarrow{AB}}{AB} = \frac{8{,}4\text{ kN}}{21\text{ m}}\overrightarrow{AB}$$



En substituant dans l'équation l'expression du vecteur $\overrightarrow{AB}$, on obtient

$$\mathbf{T}_{AB} = \frac{8{,}4\text{ kN}}{21\text{ m}}[-(16\text{ m})\mathbf{i} + (8\text{ m})\mathbf{j} + (11\text{ m})\mathbf{k}]$$
$$\mathbf{T}_{AB} = -(6.4\text{ kN})\mathbf{i} + (3.2\text{ kN})\mathbf{j} + (4.4\text{ kN})\mathbf{k}$$

De la même façon, en identifiant par le symbole $\boldsymbol{\lambda}_{AC}$ le vecteur unitaire selon AC, on obtient

$$\mathbf{T}_{AC} = T_{AC}\boldsymbol{\lambda}_{AC} = T_{AC}\frac{\overrightarrow{AC}}{AC} = \frac{12\text{ kN}}{24\text{ m}}\overrightarrow{AC}$$
$$\mathbf{T}_{AC} = -(8\text{ kN})\mathbf{i} + (4\text{ kN})\mathbf{j} - (8\text{ kN})\mathbf{k}$$

ite !

onale

SITIES

La résultante des forces. La résultante $\mathbf{R}$ des forces exercées par les deux câbles est

$$\mathbf{R} = \mathbf{T}_{AB} + \mathbf{T}_{AC} = -(14{,}4\ \mathrm{kN})\mathbf{i} + (7{,}2\ \mathrm{kN})\mathbf{j} - (3{,}6\ \mathrm{kN})\mathbf{k}$$

On calcule ensuite la grandeur et la direction de la résultante :

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = \sqrt{(-14{,}4)^2 + (7{,}2)^2 + (-3{,}6)^2}$$

$$R = 16{,}5\ \mathrm{kN} \quad ◀$$

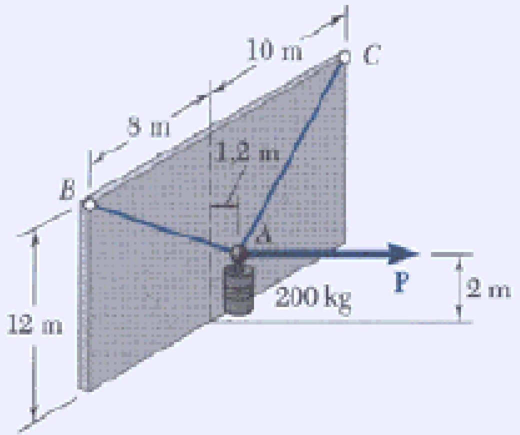
À partir des équations 2.33, on obtient

$$\cos\theta_x = \frac{R_x}{R} = \frac{-14{,}4\ \mathrm{kN}}{16{,}5\ \mathrm{kN}} \qquad \cos\theta_y = \frac{R_y}{R} = \frac{+7{,}2\ \mathrm{kN}}{16{,}5\ \mathrm{kN}}$$

$$\cos\theta_z = \frac{R_z}{R} = \frac{-3{,}6\ \mathrm{kN}}{16{,}5\ \mathrm{kN}}$$

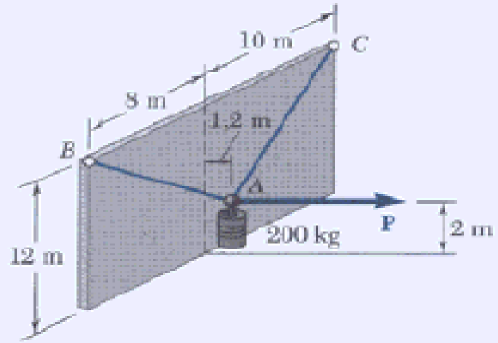
d'où

$$\theta_x = 150{,}8° \qquad \theta_y = 64{,}1° \qquad \theta_z = 102{,}6° \quad ◀$$



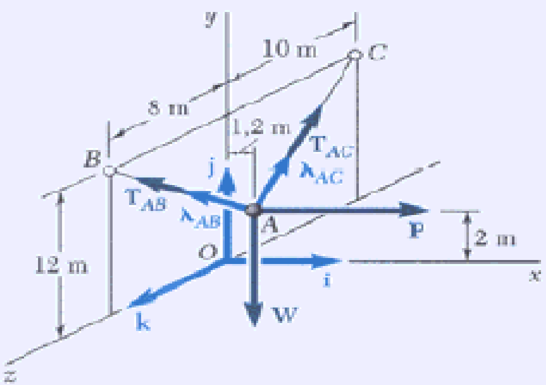
PROBLÈME RÉSOLU 2.9

Un cylindre de 200 kg est soutenu par deux câbles *AB* et *AC* attachés à la partie supérieure d'un mur vertical. Sous l'action d'une force horizontale **P** perpendiculaire au mur, le cylindre prend la position indiquée. Calculez la valeur de **P** et la tension dans chaque câble.



PROBLÈME RÉSOLU 2.9

Un cylindre de 200 kg est soutenu par deux câbles AB et AC attachés à la partie supérieure d'un mur vertical. Sous l'action d'une force horizontale **P** perpendiculaire au mur, le cylindre prend la position indiquée. Calculez la valeur de **P** et la tension dans chaque câble.



SOLUTION

Diagramme du corps libre (DCL) des forces. En choisissant le point A comme point d'équilibre, on note qu'il est soumis à quatre forces, dont trois sont de grandeur inconnue. En utilisant l'approche vectorielle, avec les vecteurs unitaires **i**, **j** et **k**, on décompose chacune des forces selon ses composantes rectangulaires, d'où

$$\mathbf{P} = P\mathbf{i}$$
$$\mathbf{W} = -mg\mathbf{j} = -(200\ \text{kg})(9{,}81\ \text{m/s}^2)\mathbf{j} = -(1962\ \text{N})\mathbf{j} \qquad (1)$$

Dans le cas des forces $\mathbf{T}_{AB}$ et $\mathbf{T}_{AC}$, on détermine les composantes et les grandeurs des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. En identifiant par $\boldsymbol{\lambda}_{AB}$ le vecteur unitaire selon le sens AB, on peut écrire

$$\overrightarrow{AB} = -(1{,}2\ \text{m})\mathbf{i} + (10\ \text{m})\mathbf{j} + (8\ \text{m})\mathbf{k} \qquad AB = 12{,}862\ \text{m}$$
$$\boldsymbol{\lambda}_{AB} = \frac{\overrightarrow{AB}}{12{,}862\ \text{m}} = -0{,}09330\mathbf{i} + 0{,}7775\mathbf{j} + 0{,}6220\mathbf{k}$$
$$\mathbf{T}_{AB} = T_{AB}\boldsymbol{\lambda}_{AB} = -0{,}09330T_{AB}\mathbf{i} + 0{,}7775T_{AB}\mathbf{j} + 0{,}6220T_{AB}\mathbf{k} \qquad (2)$$

On procède de la même manière pour $\boldsymbol{\lambda}_{AC}$, le vecteur unitaire selon le sens AC, d'où

$$\overrightarrow{AC} = -(1{,}2\ \text{m})\mathbf{i} + (10\ \text{m})\mathbf{j} - (10\ \text{m})\mathbf{k} \qquad AC = 14{,}193\ \text{m}$$
$$\boldsymbol{\lambda}_{AC} = \frac{\overrightarrow{AC}}{14{,}193\ \text{m}} = -0{,}08455\mathbf{i} + 0{,}7046\mathbf{j} - 0{,}7046\mathbf{k}$$
$$\mathbf{T}_{AC} = T_{AC}\boldsymbol{\lambda}_{AC} = -0{,}08455T_{AC}\mathbf{i} + 0{,}7046T_{AC}\mathbf{j} - 0{,}7046T_{AC}\mathbf{k} \qquad (3)$$

ale

Condition d'équilibre. Étant donné que A est en équilibre, alors

$$\Sigma \mathbf{F} = 0: \qquad \mathbf{T}_{AB} + \mathbf{T}_{AC} + \mathbf{P} + \mathbf{W} = 0$$

En remplaçant les expressions des forces par les équations 1, 2 et 3 et en mettant en facteurs les vecteurs unitaires **i**, **j** et **k** :

$$(-0{,}09330T_{AB} - 0{,}08455T_{AC} + P)\mathbf{i} + (0{,}7775T_{AB} + 0{,}7046T_{AC} - 1962 \text{ N})\mathbf{j} + (0{,}6220T_{AB} - 0{,}7046T_{AC})\mathbf{k} = 0$$

En fixant les coefficients de **i**, **j** et **k** à zéro, on écrit les équations scalaires suivantes, qui expriment que la somme des composantes selon les trois axes des x, y et z des forces sont nulles :

$$(\Sigma F_x = 0:) \qquad -0{,}09330T_{AB} - 0{,}08455T_{AC} + P = 0$$
$$(\Sigma F_y = 0:) \qquad +0{,}7775T_{AB} + 0{,}7046T_{AC} - 1962\ N = 0$$
$$(\Sigma F_z = 0:) \qquad +0{,}6220T_{AB} - 0{,}7046T_{AC} = 0$$

$$P = 235 \text{ N} \qquad T_{AB} = 1402 \text{ N} \qquad T_{AC} = 1238 \text{ N} \quad ◀$$