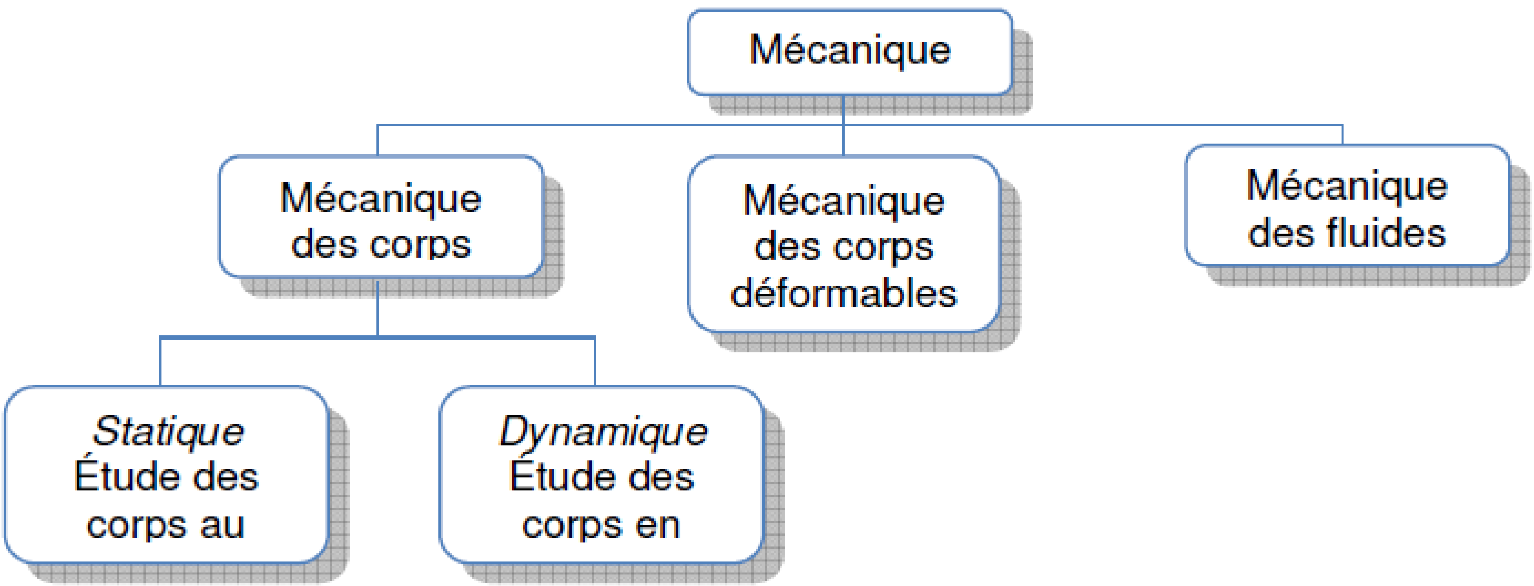
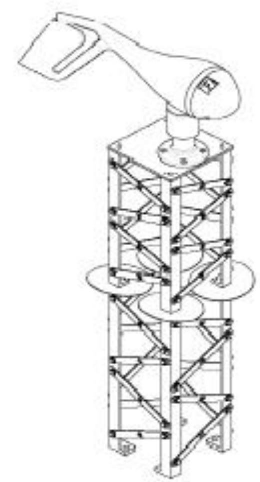
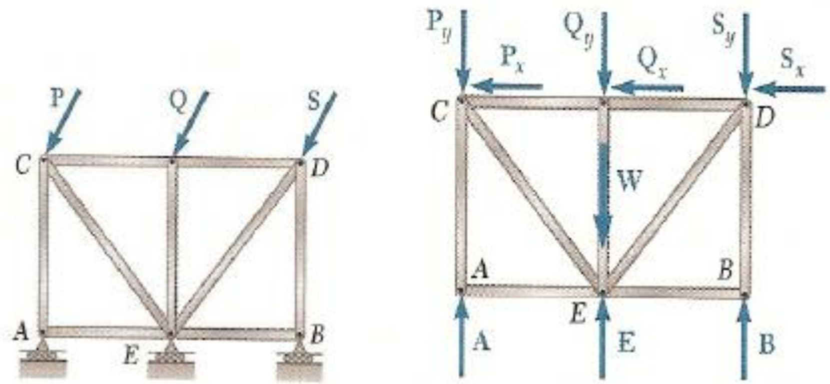
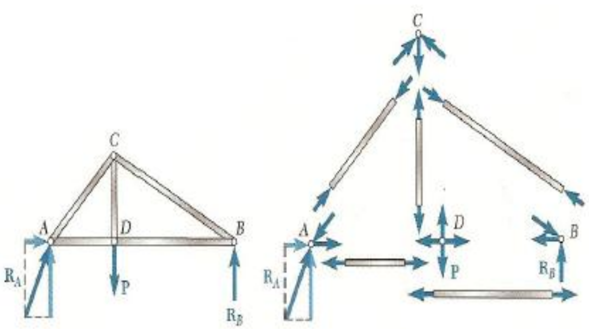
- **Introduction**
- **La statique des particules , forces coplanaires**
- **La statique des particules, forces dans l'espace (3D)**
- **Corps rigides , moment d'une force.**
- **Equilibre des corps rigides**
- **Forces réparties**
- **Etudes des structures: les treillis , charpentes.**
- **Frottements**
- **Moments d'inertie**

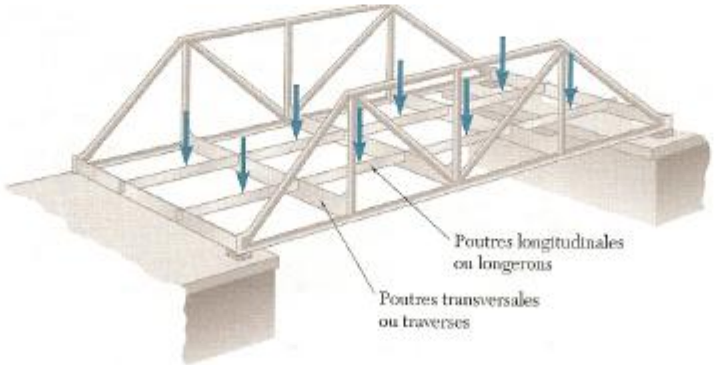

Mécanique
Mécanique des corps
Mécanique des corps déformables
Mécanique des fluides
Statique Étude des corps au
Dynamique Étude des corps en

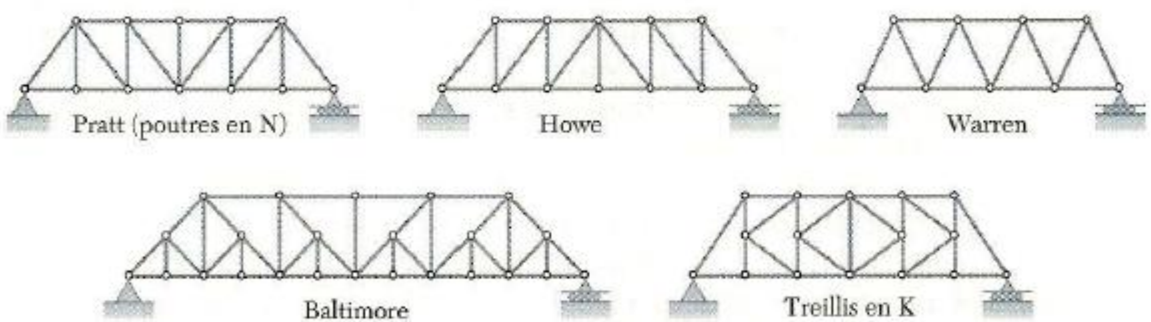
- Treillis

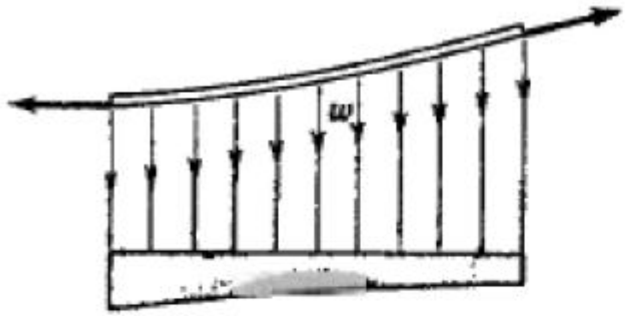


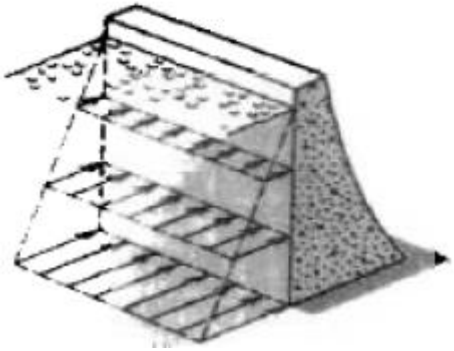

P
Q
S
C
D
A
E
B
P_y
P_x
Q_y
Q_x
S_y
S_x
C
D
W
A
B
E
A
E
B

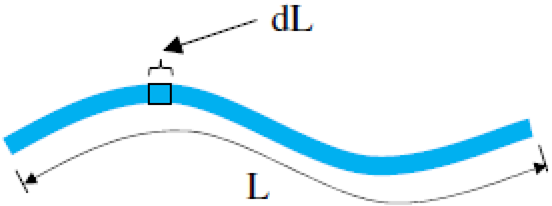

C
A
D
B
R_A
P
R_B
C
A
D
B
R_A
P
R_B

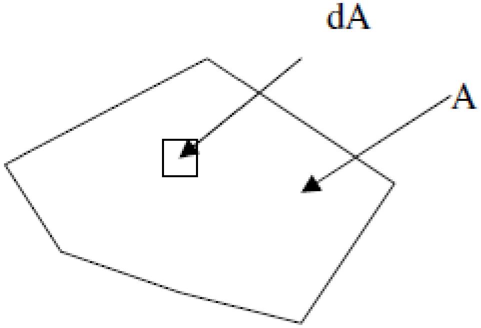

Poutres longitudinales
ou longerons
Poutres transversales
ou traverses


Pratt (poutres en N)
Howe
Warren
Baltimore
Treillis en K



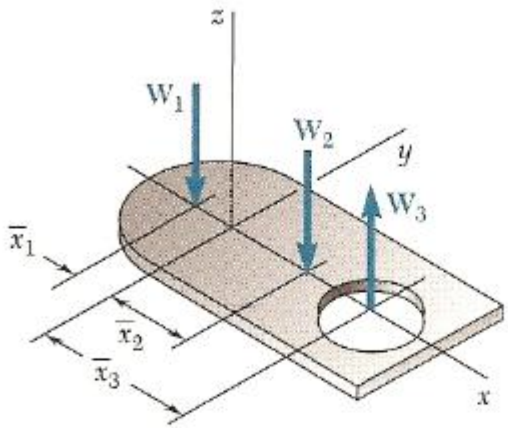


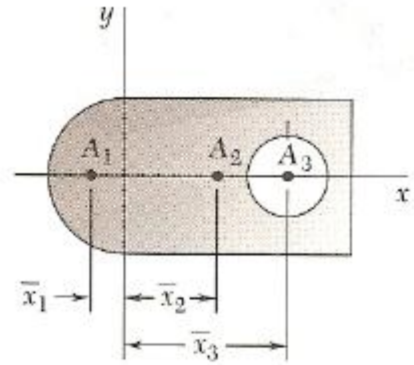


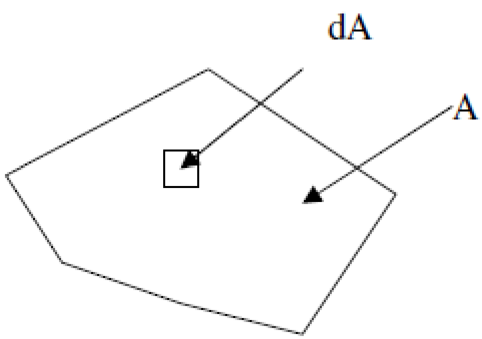


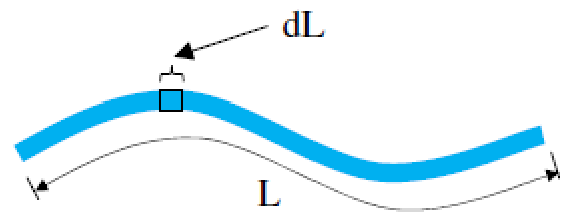
$$\bar{x} = \frac{\int x dL}{L} \quad \bar{y} = \frac{\int y dL}{L} \quad \bar{z} = \frac{\int z dL}{L}$$

$$\bar{x} = \frac{\int x dA}{A} \quad \bar{y} = \frac{\int y dA}{A} \quad \bar{z} = \frac{\int z dA}{A}$$



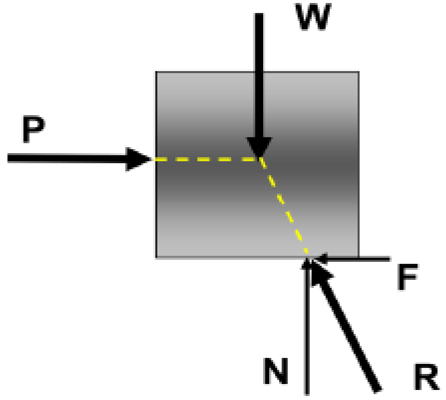






$$\bar{x} = \frac{\int x dA}{A} \quad \bar{y} = \frac{\int y dA}{A} \quad \bar{z} = \frac{\int z dA}{A}$$

$$\bar{x} = \frac{\int x dL}{L} \quad \bar{y} = \frac{\int y dL}{L} \quad \bar{z} = \frac{\int z dL}{L}$$



Surface en contact	µs	µk
Acier sur acier (sec)	0,60	0,40
Acier sur acier (visqueux)	0,10	0,05
Acier sur bois	0,20 à 0,60	-
Acier sur glace	0,04	-
Aluminium sur aluminium	1,10	-
Aluminium sur acier	0,61	0,47
Bois sur bois	0,25 à 0,50	-
Câble en acier sur poulie en acier	0,20	0,15
Caoutchouc sur acier	0,40	0,30
Caoutchouc sur béton	0,50 à 0,90	-
Caoutchouc sur glace	0,05 à 0,30	-
Pneus en bon état sur pavage sec	0,90	0,80
Pneus usés sur pavage humide	0,10 à 0,20	0,05 à 0,12
Téflon sur téflon	0,04	-
Téflon sur acier	0,04	0,04

PRINCIPES FONDAMENTAUX

La mécanique élémentaire repose beaucoup sur la publication : *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, par Isaac Newton en 1687. De ces travaux, les trois «lois» de Newton ont émergé.

1- $\sum F = 0$

Lorsque la somme des forces agissant sur une particule est nulle, cette particule demeurera au repos si elle était originalement stationnaire. Dans le cas où la particule était originalement en mouvement, elle sera animée d'un mouvement rectiligne uniforme (accélération nulle).

2- $\sum F \neq 0$

Lorsque la somme des forces sur une particule n'est pas nulle, celle-ci acquiert une accélération proportionnelle à la force résultante et dans la direction de cette dernière. Ce principe est défini par l'équation suivante :

$$F = ma \qquad \text{Éq. 1.1}$$

Où ***F*** représente la force résultante agissant sur la particule, ***m***, la masse de la particule et ***a***, l'accélération de cette particule. Il est important de préciser que les unités de chacune de ces valeurs doivent être dans un système d'unité cohérent.

3- Les forces entre deux particules (action et réaction) sont égales en amplitude, sont sur la même ligne d'action, mais de sens opposés.

La loi gravitationnelle de Newton

- Deux particules de masse **M** et **m** s'attirent mutuellement selon des forces de même intensité mais de sens opposé.

$$\boxed{F = G\frac{Mm}{r^2}} \qquad \text{Éq. 1.2}$$

Où :

$r =$ distance entre les deux particules
$G =$ constante gravitationnelle ($66{,}73 \times 10^{-12}$ m^3/(kg·s^2))

- À toute **action** répond une **réaction** égale et opposée. C'est le *Principe d'ACTION RÉACTION* dit « *Principe de parité des forces* » selon lequel une force isolée sans contrepartie ne peut exister dans le monde physique.

Considérons maintenant l'attraction terrestre. Puisque la masse de la terre est constante, que l'accélération gravitationnelle est constante et que la distance entre le centre de la terre et une particule à sa surface est à peu près constante, il est possible de simplifier l'équation 1.2. Dans le cas de l'attraction terrestre la force **F** exercée par la terre sur une particule est définie par son poids **W.**

$$W = \left(G\frac{M}{r^2}\right)m = m \cdot g \qquad \text{Éq. 1.3}$$

Où :

g = 9,81 m/s^2

1.3 Unités dans le Système International (SI)

Quantité	Unités	Symbole
Longueur	mètre	m
Masse	kilogramme	kg
Temps	seconde	s
Force	Newton	N

1 **N** représente la force appliquée sur une masse de 1 kg et donnant lieu à une accélération de 1m/s^2, soit :

$$1\,N = (1\,kg)(1\,m/s^2) = 1\,kg \cdot m/s^2$$

$$\Downarrow \qquad\qquad\qquad \Downarrow \quad \Downarrow$$

$$\boldsymbol{F} \qquad = \qquad \boldsymbol{m} \quad \boldsymbol{a}$$

Quantité	Unités	Symbole
Angle	radian	rad
Énergie	Joule	J (N.m)
Travail	Joule	J (N.m)
Moment de force	Newton-mètre	N.m
Pression	Pascal	Pa (N/m^2)
Contrainte	Pascal	Pa (N/m^2)

1.3.1 PRÉFIXES

Lorsqu'une quantité numérique est soit trop grande ou trop petite, un préfixe est utilisé. Voici les préfixes les plus souvent utilisés.

Facteur de multiplication	Préfixe	Symbole
$1\ 000\ 000\ 000\ 000 = 10^{12}$	téra	T
$1\ 000\ 000\ 000 = 10^{9}$	giga	G
$1\ 000\ 000 = 10^{6}$	méga	M
$1\ 000 = 10^{3}$	kilo	k
$0{,}01 = 10^{-2}$	centi	c
$0{,}001 = 10^{-3}$	milli	m
$0{,}000\ 001 = 10^{-6}$	micro	µ

1.3.2 FACTEURS DE CONVERSIONS

Même si le Système International est le plus utilisé de nos jours, il est important de pouvoir faire la conversion entre ce système et le système Impérial (anglo-saxone) encore beaucoup utilisé dans le domaine de la construction.

	SI		Anglo-saxonne
Accélération			
	1 m/s²	=	3.281 pi/s²
	0.3048 m/s²	=	1 pi/s²
	1 g = 9.81 m/s²	=	32.2 pi/s²
Force			
	1 N	=	0.2248 lb
	4.448 N	=	1 lb
Longueur			
	1 m	=	3.281 pi = 39.37 po
	25.4 mm	=	1 po
	1 km	=	0.6214 mi
	1.609 km	=	1 mi = 5280 pi
Moment, Travail			
	1 N•m = 1 J	=	0.7376 lb•pi
Pression			
	1 Pa = 1 N/m²	=	145,04 x 10⁶ PSI

	6894,8 Pa	=	1 PSI
Surface			
	1 m^2	=	10.76 pi^2 = 1550 po^2
	645.2 mm^2	=	1 po^2
	0.0929 m^2	=	1 pi^2
Volume			
	1 m^3	=	35.31 pi^3
	28,32 x 10^{-3} m^3	=	1 pi^3

Exemple 1.1
Faire la conversion de 2 km/h en m/s et en pi/s.

Solution

Puisque 1 km = 1000 m et que 1 h = 3600 s, 2 km/h est converti de la manière suivante :

$$2\ {}^{km}/_{h} = \frac{2\ km}{h}\left(\frac{1000\ m}{1\ km}\right)\left(\frac{1\ h}{3600\ s}\right) = \frac{2000\ m}{3600\ s} = 0.556\ {}^{m}/_{s}$$

Finalement, du tableau 1.4, on a que 1 m = 3.281 pi, donc 1 pi = (1 / 3.281) = 0.3048 m, ce qui nous permet de faire la conversion suivante :

$$0.556\ {}^{m}/_{s} = \left(\frac{0.556\ m}{s}\right)\left(\frac{1\ pi}{0.3048\ m}\right) = 1.82\ {}^{pi}/_{s}$$

1.4 *Rappel trigonométrique*

Pour les triangles rectangles, on utilise les principes suivants :

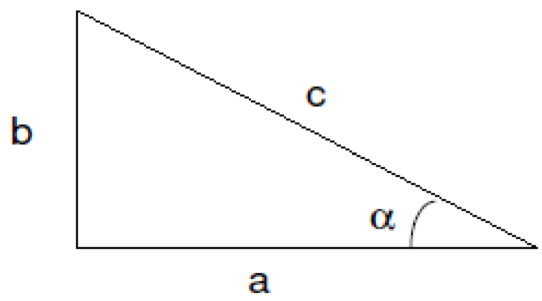


Figure 1.2

$$\cos \propto = \frac{a}{c}$$

$$\sin \propto = \frac{b}{c}$$ Éq. 1.5

$$\tan \propto = \frac{b}{a}$$ Éq. 1.6

$$a^2 + b^2 = c^2$$ Éq. 1.7

Pour les triangles quelconques, on utilise les principes suivants :

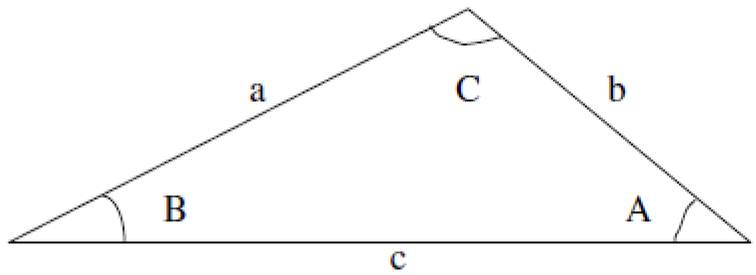


Figure 1.3

Loi des sinus

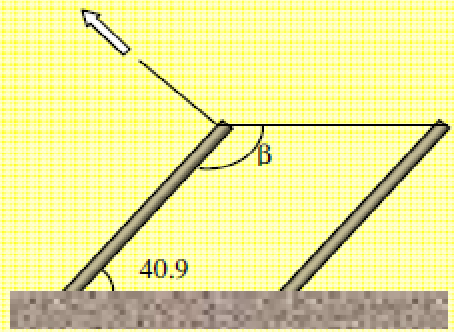
$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \qquad \text{Éq. 1.8}$$

Loi des cosinus

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos A \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos B \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos C \end{aligned} \qquad \text{Éq. 1.9}$$

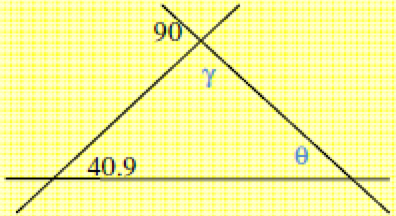
Exemple 1.2

On doit redresser deux poteaux parallèles qui sont distancé de 8m à leur base à partir d'un câble. Si la force est exercée à angle droit par rapport au premier poteau, trouver a) l'angle entre la force et l'horizontale et b) l'angle β.



Solution

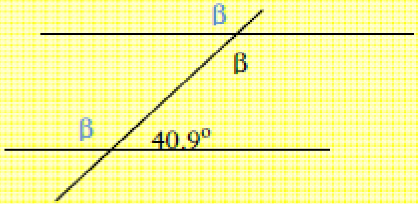
a) Puisque l'angle entre la force et le poteau est de 90°, on trouve, avec des triangles semblables :



Dans un premier temps, on peut identifier γ, comme étant = 90°

Puis par la somme des angles d'un triangle (180°), on trouve : $\theta = 180 - 90 - 40.9 = 49.1^{\circ}$

b) Pour trouver l'angle β, on peut utiliser des triangles semblables



On peut donc trouver β, en calculant : $180 - 40.9 = 139.1^{\circ}$

Pour ce qui concerne les cercles, les équations suivantes sont les plus utilisées :

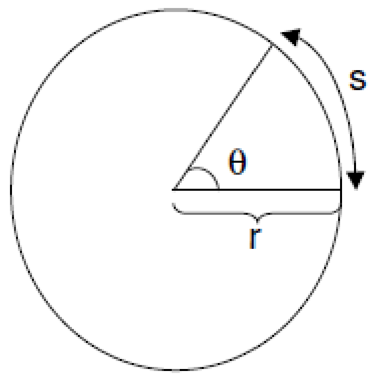


Figure 1.6

Périmètre d'un cercle : $P = 2 * \pi * r$ Éq. 1.10

Longueur d'un arc : $s = r * \theta$ (avec θ en radian) Éq. 1.11

Aire d'un cercle : $A = \pi * r^2$ Éq. 1.12

Combien de degré dans un cercle? 360^o

$360^o = 2 * \pi$ rad

1 radian vaut combien de degré?

$1\ rad * (\frac{360°}{2\pi\ rad}) = 57.296^o$

1.5 Problèmes de statique

Les problèmes de statique sont des représentations quantitatives des forces qui agissent sur des objets (particules, structures) qui sont en équilibre. L'utilisation des mathématiques permet de faire des liens entre diverses forces en jeu et prévoir ce qui peut se produire. Pour ce faire, il faut suivre une démarche logique qui est commune à toute résolution d'une problématique. Dans le cadre de ce cours, cette démarche se divise en cinq étapes :

1) Acquisitions des données

2) Résultats recherchés

3) DCL

4) Calculs

5) Réponses et conclusions

Cours #1

La STATIQUE des PARTICULES
Forces coplanaires

1. Résultante des forces
2. Décomposition des forces
3. Équilibre

PARTICULES

L'étude des particules ne se limite pas aux **corpuscules** ou aux **très petits objets.**

C'est l'étude des cas où la **taille** et la **forme des corps** n'influencent pas les résultats.

Pour les particules, les forces s'appliquent à un même point (forces concourantes).

FORCE

FORCE = Action d'un corps sur un autre corps

FORCE caractérisée par:

Point d'application

Grandeur (nombre + unités)

Direction (ligne d'action + sens)

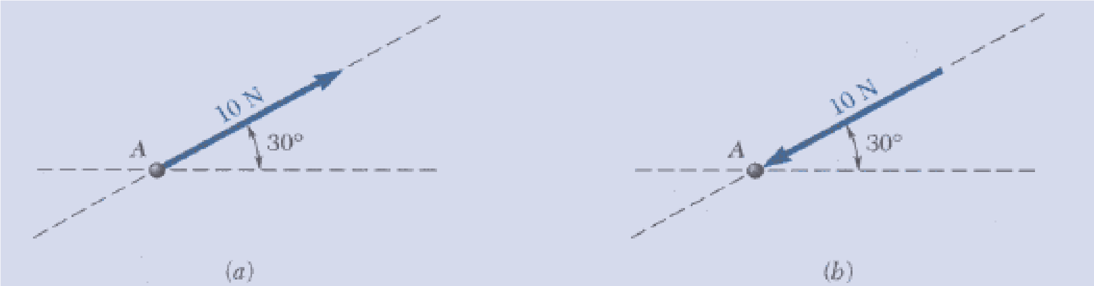


Figure 2.1

RÉSULTANTES de 2 FORCES

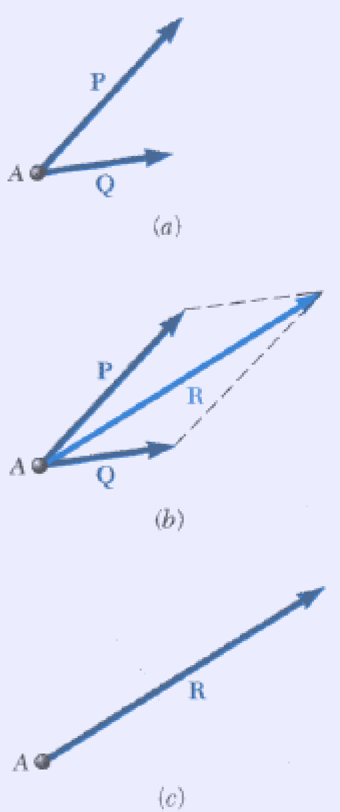


Figure 2.2

Règle du parallélogramme

Fondée sur l'expérimentation

Aucune preuve mathématique

VECTEURS vs SCALAIRES

L'application de la **règle du parallélogramme** s'applique à d'autres quantités physiques,
caractérisées par une **grandeur** et une **direction**:

Déplacement **Vitesse**
Accélération **Moments de force**

Ces quantités sont des **vecteurs**

Scalaires: quantité sans direction définies par un **nombre** et ses **unités**

Volume **Masse** **Énergie**

ADDITION VECTORIELLE

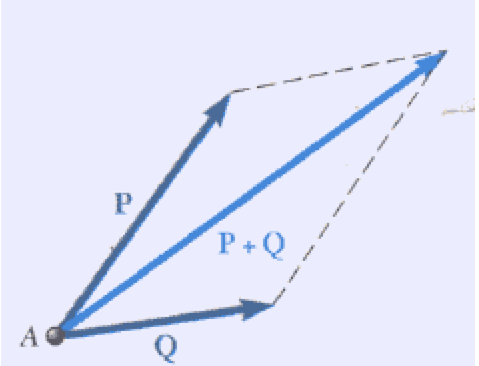


Figure 2.6

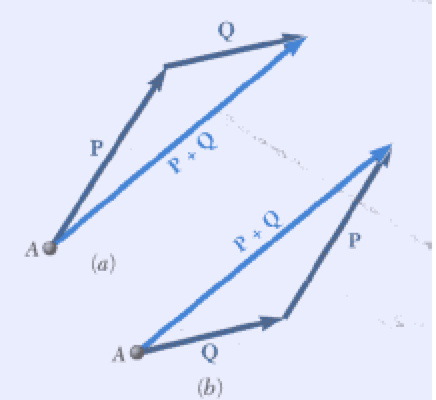


Figure 2.7

Commutativité:

P + Q = Q + P

SOUSTRACTION VECTORIELLE

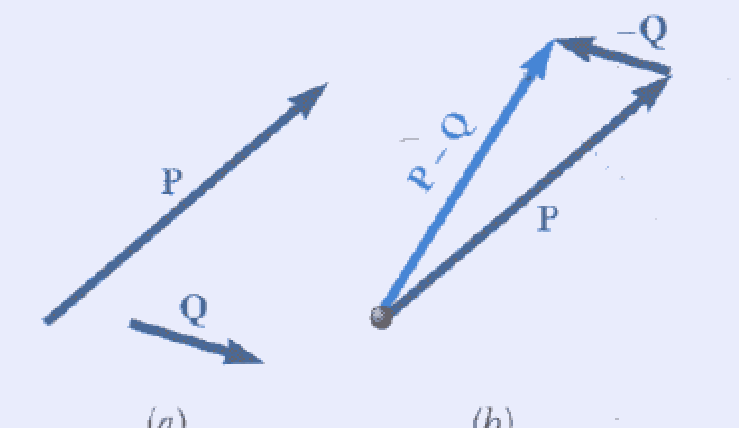


Figure 2.8

$$\mathbf{P} - \mathbf{Q} = \mathbf{P} + (-\mathbf{Q})$$

ADDITION de 3 VECTEURS et +

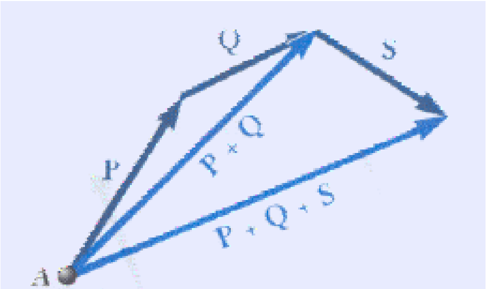


Figure 2.9

P + Q + S = (P + Q) + S

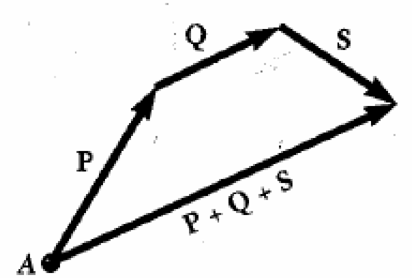


Figure 2.10

Pour les vecteurs coplanaires:

la méthode du polygone

ADDITION de 3 VECTEURS et +

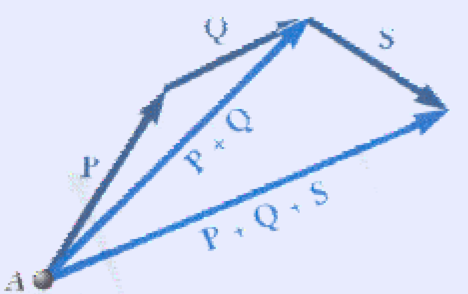


Figure 2.9

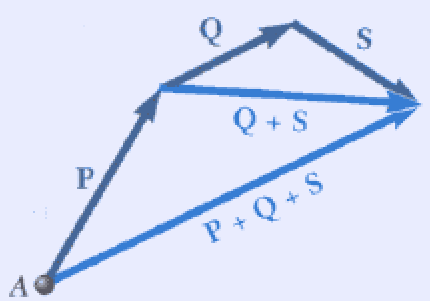


Figure 2.11

ASSOCIATIVITÉ

$$(\mathbf{P} + \mathbf{Q}) + \mathbf{S} = \mathbf{P} + (\mathbf{Q} + \mathbf{S})$$

ADDITION DE 3 VECTEURS et +

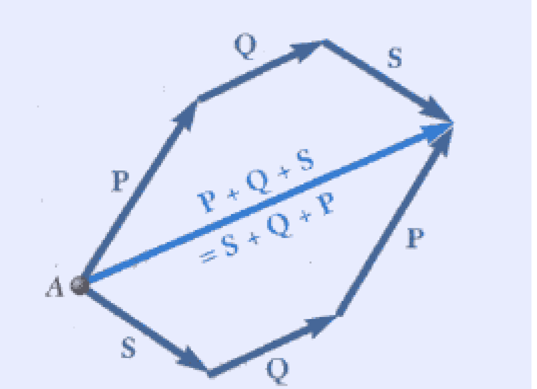


Figure 2.12

ASSOCIATIVITÉ et COMMUTATIVITÉ

$$\mathbf{P} + \mathbf{Q} + \mathbf{S}$$

$$= (\mathbf{P} + \mathbf{Q}) + \mathbf{S} = \mathbf{S} + (\mathbf{P} + \mathbf{Q}) = \mathbf{S} + (\mathbf{Q} + \mathbf{P}) =$$

$$\mathbf{S} + \mathbf{Q} + \mathbf{P}$$

L'ordre d'addition des vecteurs est sans importance

SCALAIRE X VECTEUR

k**P** =

vecteur de **même direction** et **sens** que **P**, si k > 0

vecteur de **même direction** et **sens opposé** à **P**, si k < 0

Grandeur de k**P** = | k | *P*

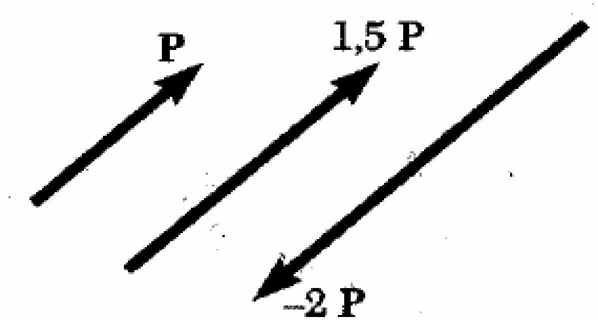


Figure 2.13

RÉSULTANTES de FORCES CONCOURANTES

Forces concourantes=
Forces passant par un même point

Soit une particule A soumise à plusieurs forces coplanaires et concourantes
La méthode du polygone permet de trouver la résultante R

Cette résultante R produit le même effet sur la particule A que l'ensemble des 3 forces concourantes appliquées

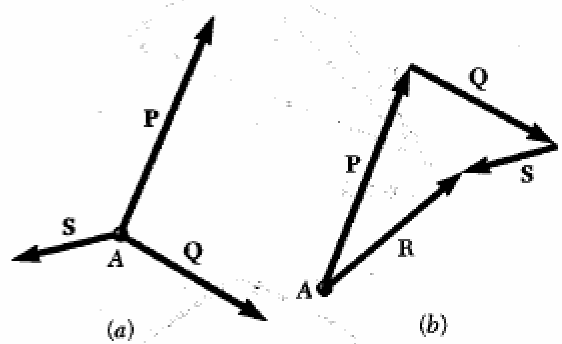


Figure 2.14

DÉCOMPOSITION d'un VECTEUR

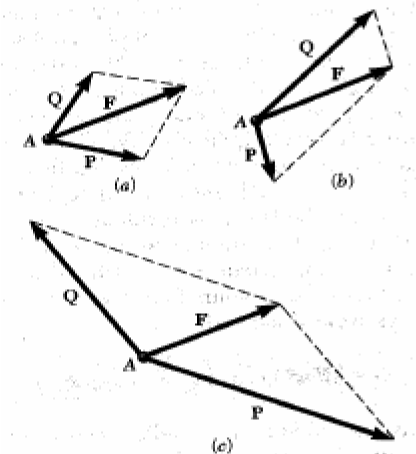


Figure 2.15

Une force **F** appliquée à une particule
peut être remplacée par 2 ou plusieurs forces
dont l'action globale produira le même effet.

Ces forces sont les **composantes** de la force **F**.

Un vecteur **F** peut être décomposé d'une multitude de façons.
Les ensembles de 2 composantes P et Q sont les plus intéressantes.

2 cas de DÉCOMPOSITION

-1-

F et sa composante **P** sont connus (grandeur et direction).

On trouve Q en appliquant la méthode du triangle

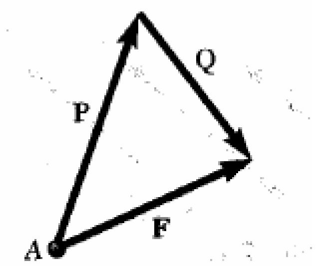


Figure 2.16

-2-

F et la ligne d'action de chacune des composantes sont connus.

On trouve la grandeur et le sens de P et Q en appliquant la règle du parallélogramme.

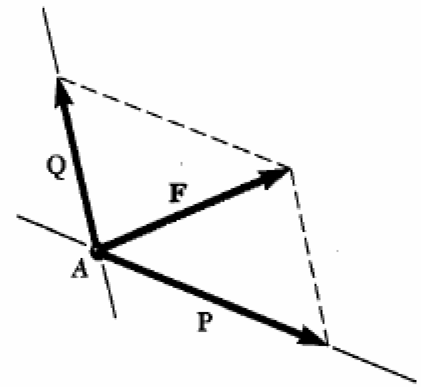
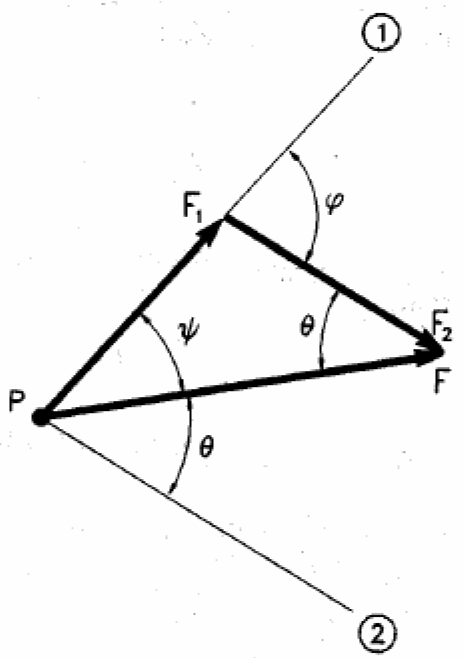


Figure 2.17

LOI du TRIANGLE



Les 6 équations les plus couramment utilisées sont:

LA LOI DES SINUS

$$\frac{\sin\theta}{F_1} = \frac{\sin\varphi}{F} = \frac{\sin\psi}{F_2}$$

LA LOI DU COSINUS

$$F^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\varphi$$

$$F_1^2 = F_2^2 + F^2 - 2F_2\,F\cos\theta$$

$$F_2^2 = F_1^2 + F^2 - 2F_1\,F\cos\psi$$

EXEMPLE: PROBLÈME

2.3 Deux forces (**P** et **Q**) sont appliquées au point A du crochet ci-contre. Sachant que $P = 60$ N et $Q = 25$ N, déterminez graphiquement la grandeur et la direction de leur résultante en utilisant a) la règle du parallélogramme et b) la méthode du triangle.

2.15 Résolvez trigonométriquement le problème 2.3.

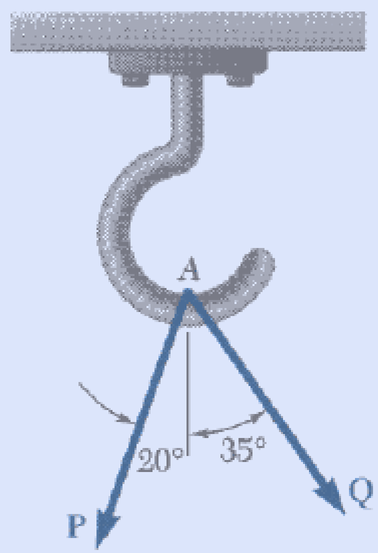


Figure P2.2 - P2.3 et P2.10

COMPOSANTES RECTANGULAIRES d'une FORCE

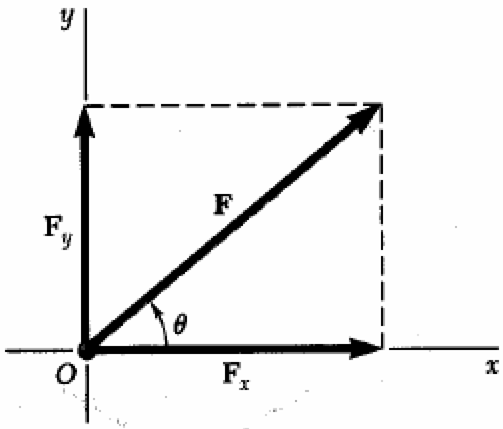


Figure 2.18

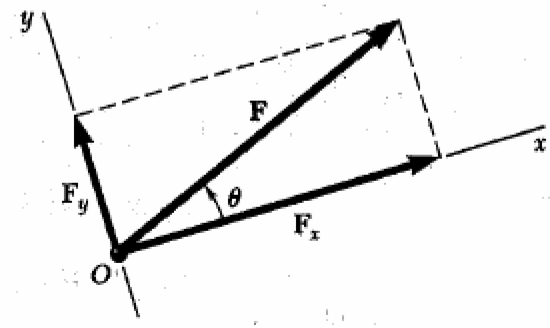


Figure 2.19

La plupart des problèmes sont simplifiés par la décomposition des forces en 2 **composantes perpendiculaires**

VECTEURS UNITAIRES

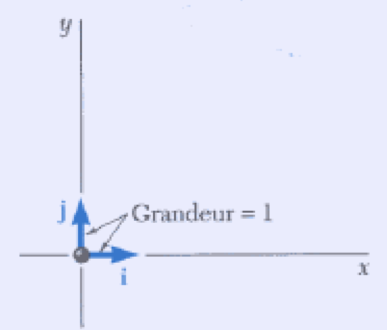


Figure 2.20

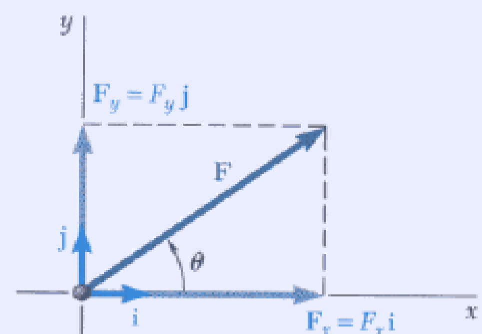


Figure 2.21

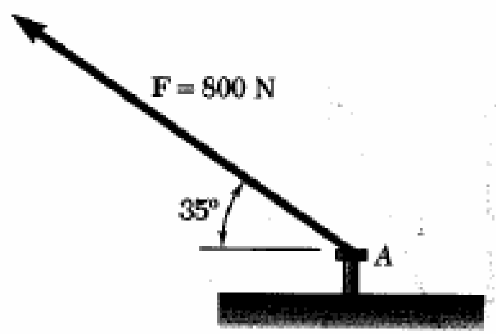
$$\mathbf{F} = F_x\,\mathbf{i} + F_y\,\mathbf{j}$$

$$F_x = F\cos\theta$$

$$F_y = F\sin\theta$$

EXEMPLE 1

Exemple 1. Une force de 800 N est appliquée à un boulon A tel qu'illustré à la figure 2.22*a*. Nous devons déterminer les composantes horizontale et verticale de la force.



(*a*)

Pour attribuer le bon signe aux composantes F_x et F_y, nous pouvons utiliser $\theta = 180° - 35° = 145°$ dans les équations 2.8. Nous pouvons aussi déterminer les signes de F_x et F_y en regardant le schéma (figure 2.22*b*) et appliquer simplement les fonctions trigonométriques à l'angle $\theta = 35°$. Nous avons

$$F_x = -F \cos \alpha = -(800 \text{ N}) \cos 35° = -655 \text{ N}$$
$$F_y = +F \sin \alpha = +(800 \text{ N}) \sin 35° = +459 \text{ N}$$

Les composantes de **F** donnent alors

$$\mathbf{F}_x = -(655 \text{ N})\mathbf{i} \qquad \mathbf{F}_y = +(459 \text{ N})\mathbf{j}$$

et nous pouvons écrire

$$\mathbf{F} = -(655 \text{ N})\mathbf{i} + (459 \text{ N})\mathbf{j}$$

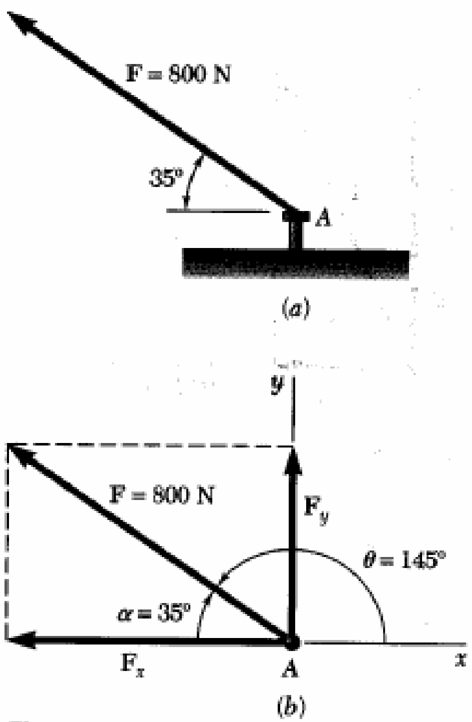
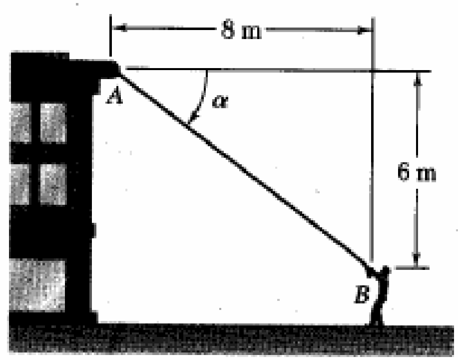


Figure 2.22

EXEMPLE 2

Exemple 2. Une personne tire sur une corde attachée au mur d'un édific avec une force de 300 N (figure 2.23*a*). Nous devons déterminer les composante horizontale et verticale de la force exercée par la corde au point *A*.



(*a*)

Exemple 2. Une personne tire sur une corde attachée au mur d'un édific avec une force de 300 N (figure 2.23*a*). Nous devons déterminer les composante horizontale et verticale de la force exercée par la corde au point *A*.

La figure 2.23*b* montre que

$$F_x = +(300\text{ N})\cos\alpha \qquad F_y = -(300\text{ N})\sin\alpha$$

Sachant que $AB = 10$ m et en référant à la figure 2.23*a*, nous trouvons

$$\cos\alpha = \frac{8\text{ m}}{AB} = \frac{8\text{ m}}{10\text{ m}} = \frac{4}{5} \qquad \sin\alpha = \frac{6\text{ m}}{AB} = \frac{6\text{ m}}{10\text{ m}} = \frac{3}{5}$$

Nous obtenons alors

$$F_x = +(300\text{ N})\tfrac{4}{5} = +240\text{ N} \qquad F_y = -(300\text{ N})\tfrac{3}{5} = -180\text{ N}$$

et nous écrivons

$$\mathbf{F} = (240\text{ N})\mathbf{i} - (180\text{ N})\mathbf{j}$$

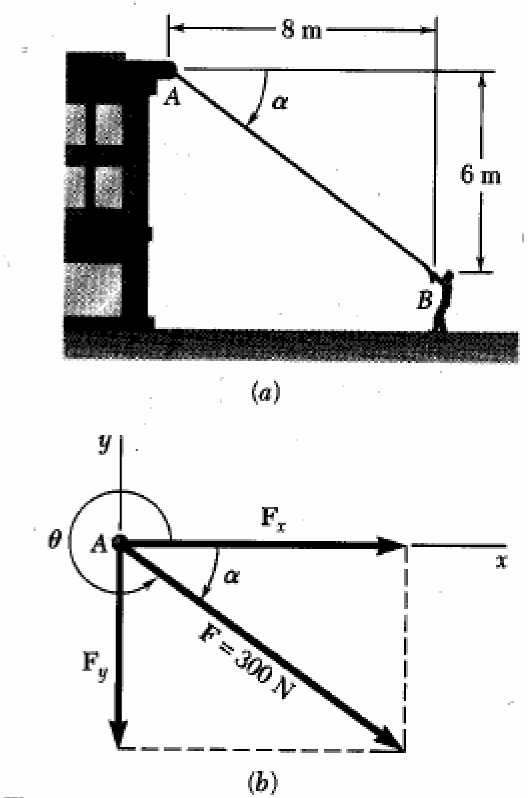


Figure 2.23

EXEMPLE 3

Exemple 3. Une force $\mathbf{F} = (700\ \text{N})\mathbf{i} + (1500\ \text{N})\mathbf{j}$ est appliquée sur un boulon A. Nous devons déterminer la grandeur de la force et indiquer sa direction en donnant l'angle θ qu'elle forme avec l'horizontale.

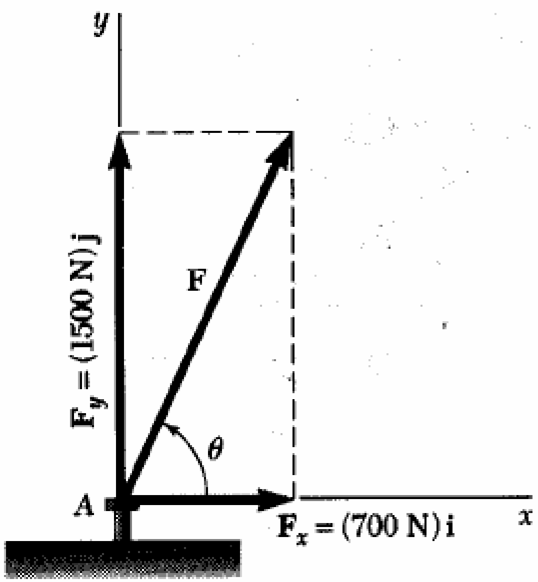


Figure 2.24

Exemple 3. Une force $\mathbf{F} = (700\ \text{N})\mathbf{i} + (1500\ \text{N})\mathbf{j}$ est appliquée sur un boulon A. Nous devons déterminer la grandeur de la force et indiquer sa direction en donnant l'angle θ qu'elle forme avec l'horizontale.

Dessinons d'abord un schéma pour illustrer les composantes rectangulaires et l'angle θ (figure 2.24). L'équation (2.9) donne

$$\tan \theta = \frac{F_y}{F_x} = \frac{1500\ \text{N}}{700\ \text{N}}$$

À l'aide d'une calculatrice[3], il nous reste à diviser 1500 N par 700 N ; l'arc tangente du quotient donne $\theta = 65{,}0°$. En isolant F de la seconde équation 2.8, nous obtenons

$$F = \frac{F_y}{\sin \theta} = \frac{1500\ \text{N}}{\sin 65{,}0°} = 1655\ \text{N}$$

Nous pouvons faciliter la dernière étape de calcul en plaçant la valeur de F_y en mémoire sur la calculatrice la première fois que nous l'utilisons ; il suffit ensuite de faire un rappel de mémoire et de diviser la valeur par sin θ.

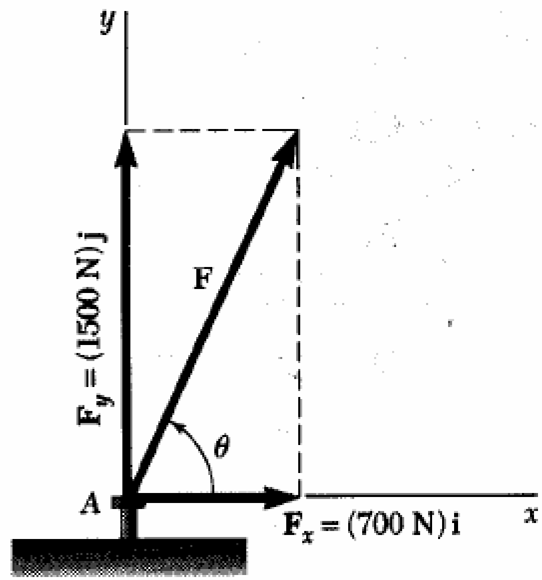


Figure 2.24

SOMME des FORCES par la méthode des COMPOSANTES RECTANGULAIRES

Pour $\mathbf{R} = \mathbf{P} + \mathbf{Q} + \mathbf{S}$

Par **décomposition** des forces

$$
\begin{aligned}
R_x\,\mathbf{i} + R_y\,\mathbf{j} &= (P_x\,\mathbf{i} + P_y\,\mathbf{j}) + (Q_x\,\mathbf{i} + Q_y\,\mathbf{j}) + (S_x\,\mathbf{i} + S_y\,\mathbf{j}) \\
&= (P_x + Q_x + S_x)\,\mathbf{i} + (P_y + Q_y + S_y)\,\mathbf{j}
\end{aligned}
$$

$$R_x = P_x + Q_x + S_x = \Sigma F_x$$

$$R_y = P_y + Q_y + S_y = \Sigma F_y$$

SOMME des FORCES par la méthode des COMPOSANTES RECTANGULAIRES
Exemple

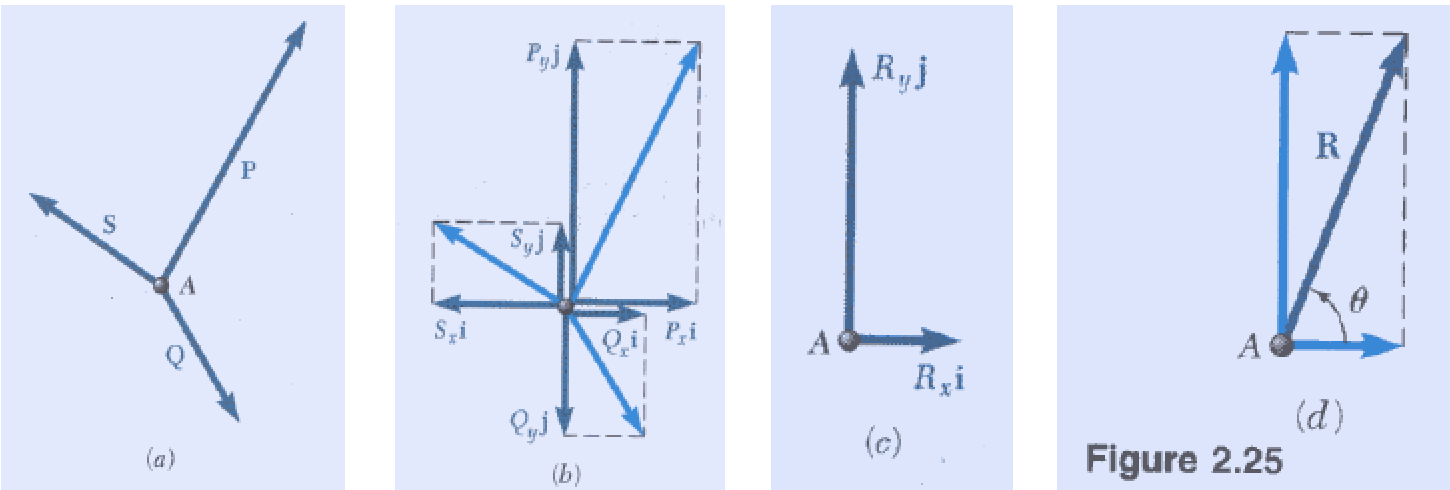


Figure 2.25

Méthode analytique pratique pour additionner **3 vecteurs et +**.

Souvent utilisée à la place de la **méthode trigonométrique** pour faire la somme de **2 vecteurs**

ÉQUILIBRE d'une PARTICULE

Une **particule** est en **équilibre** lorsque
la **résultante** des **forces** agissant sur elle est **nulle.**

D'un point de vue algébrique,
les conditions d'équilibre s'expriment à l'aide de l'équation:

$$\mathbf{R} = \Sigma \mathbf{F} = 0$$

Par décomposition rectangulaire on écrit:

$$\Sigma(F_x\,\mathbf{i} + F_y\,\mathbf{j}) = 0 \quad \text{ou} \quad \Sigma(F_x)\mathbf{i} + \Sigma(F_y)\,\mathbf{j}\,) = 0$$

Les conditions nécessaires et suffisantes d'équilibre sont donc:

$$\Sigma F_x = 0 \quad \text{et} \quad \Sigma F_y = 0$$

1ière LOI de NEWTON

Lorsque la **force résultante** appliquée à une particule est **nulle**:

La particule demeure **au repos** si elle était **initialement immobile**.

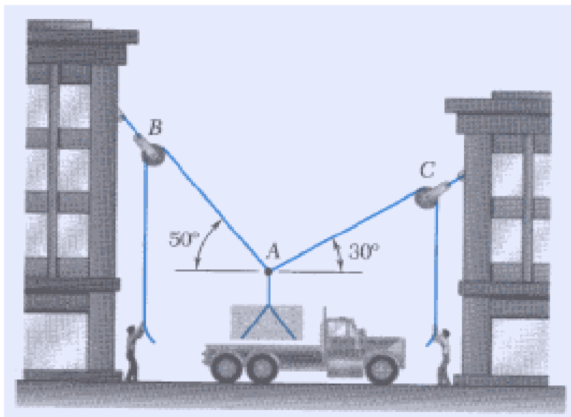
ou

La particule poursuit son mouvement à **vitesse constante** et en **ligne droite** si elle était **initialement en mouvement**.

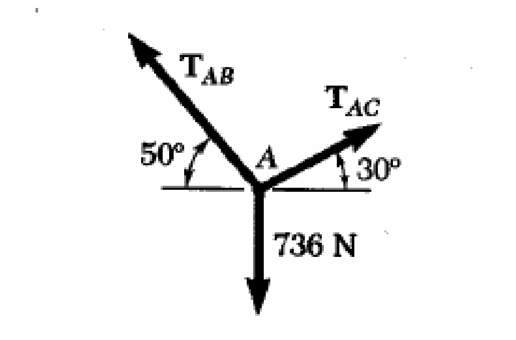
PROBLÈMES d'ÉQUILIBRE
Diagramme des forces

Bon nombre de problèmes
mettant en cause des
structures réelles
peuvent être ramenés à
l'**équilibre** d'une **particule**
localisée en un **point** de la structure.

ÉQUILIBRE de la PARTICULE
EXEMPLE



(a) Schéma d'ensemble



(b) Diagramme du corps libre

Une caisse de 75 kg est retenue par 2 câbles.
On cherche la tension dans les 2 câbles pour assurer l'équilibre de la caisse.

1. Choisir la particule à l'équilibre: Point A
2. Tracer le diagramme des forces ou diagramme du corps libre

W (de la caisse) = mg = (75 kg) (9.81 m/s^2) = 736 N

ÉQUILIBRE de la PARTICULE
EXEMPLE (suite)

3. Choisir une méthode de résolution:

a) **Méthode trigonométrique**

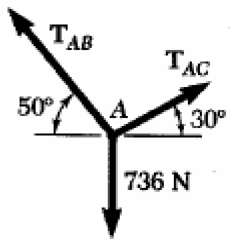
Méthode du triangle

ou

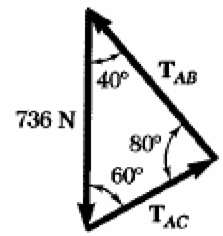
b) **Méthode analytique**

Composantes rectangulaires

ÉQUILIBRE de la PARTICULE
EXEMPLE (suite)



(*b*) Diagramme du corps libre



(*c*) Triangle des forces

Figure 2.29

a) Méthode trigonométrique

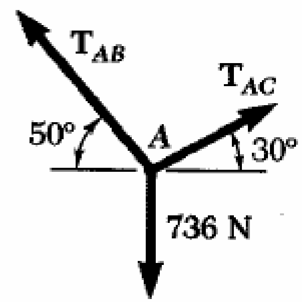
Par la loi des sinus:

$$\frac{T_{AB}}{\sin 60°} = \frac{T_{AC}}{\sin 40°} = \frac{736 \text{ N}}{\sin 80°}$$

2 équations – 2 inconnues (T_{AB} et T_{AC})

$T_{AB} = 647$ N et $T_{AC} = 480$ N

ÉQUILIBRE de la PARTICULE
EXEMPLE (suite)



(b) Diagramme du corps libre

b) **Méthode analytique**

$$\Sigma F_x = -T_{AB} \cos 50° + T_{AC} \cos 30° = 0$$

$$\Sigma F_y = T_{AB} \sin 50° + T_{AC} \sin 30° - 736 \text{ N} = 0$$

2 équations – 2 inconnues (T_{AB} et T_{AC})

T_{AB} = 647 N   et T_{AC} = 480 N

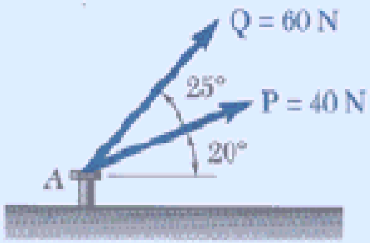
ÉQUILIBRE de la PARTICULE 2D

Les problèmes d'équilibre de la particule en 2D peuvent comporter un maximum de 2 **inconnues** car 2 **équations d'équilibre**:

1. La grandeur de 2 forces dont la direction est connue.
2. Les 2 composantes (grandeur et direction) d'une force.

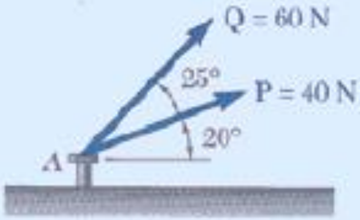
…

PROBLÈMES RÉSOLUS



PROBLÈME RÉSOLU 2.1

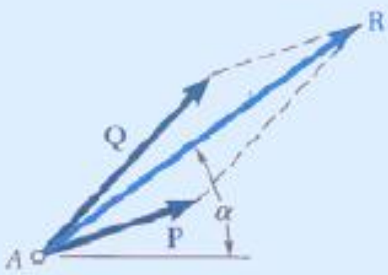
Calculez la résultante des forces **P** et **Q** appliquées au boulon *A*.



PROBLÈME RÉSOLU 2.1

Calculez la résultante des forces **P** et **Q** appliquées au boulon *A*.

SOLUTION

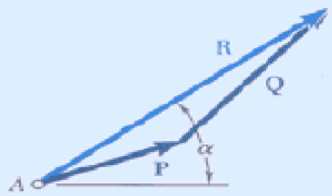


Solution graphique. On choisit une échelle de forces et on construit le parallélogramme qui a **P** et **Q** comme côtés. La grandeur et l'orientation de la résultante R sont mesurées à l'échelle sur le tracé ; on trouve

$R = 98\ \text{N} \qquad \alpha = 35°$ **R** $= 98\ \text{N} \angle 35°$ ◄

La règle du triangle peut aussi être utilisée : on place alors les vecteurs **P** et **Q** bout à bout et on mesure sur le dessin la grandeur et l'orientation de la résultante R.

$R = 98\ \text{N} \qquad \alpha = 35°$ **R** $= 98\ \text{N} \angle 35°$ ◄

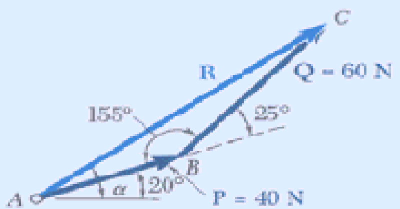


Solution trigonométrique. La règle du triangle est utilisée : dans ce triangle, on connaît les deux côtés et l'angle qu'ils déterminent. On applique la loi des cosinus et on obtient

$$R^2 = P^2 + Q^2 - 2PQ \cos B$$
$$R^2 = (40\ \text{N})^2 + (60\ \text{N})^2 - 2(40\ \text{N})(60\ \text{N}) \cos 155°$$
$$R = 97{,}73\ \text{N}$$

En utilisant la loi du sinus, on peut maintenant écrire

$$\frac{\sin A}{Q} = \frac{\sin B}{R} \qquad \frac{\sin A}{60\ \text{N}} = \frac{\sin 155°}{97{,}73\ \text{N}} \tag{1}$$



Calculatrice électronique. Si on résout l'équation 1 en fonction du sin A, on trouve

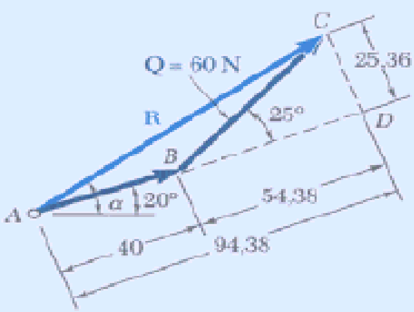
$$\sin A = \frac{(60\ \text{N}) \sin 155°}{97{,}73\ \text{N}}$$

En calculant d'abord le quotient du membre de droite et ensuite son arcsin, on obtient

$$A = 15{,}04° \qquad \alpha = 20° + A = 35{,}04°$$

Règle à calcul. En posant sin 155° = sin 25° et en ajustant la règle suivant le schéma ci-contre, on peut lire A = 150,0 et obtenir les mêmes réponses que précédemment.

$\mathbf{R} = 97{,}7\ \text{N} \measuredangle 35{,}0°$ ◄



Autre solution. On construit le triangle rectangle BCD et on a

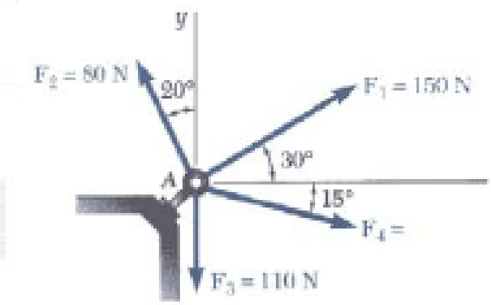
$$CD = (60\ \text{N}) \sin 25° = 25{,}36\ \text{N}$$
$$BD = (60\ \text{N}) \cos 25° = 54{,}38\ \text{N}$$

Alors, par le triangle ACD, on obtient

$$\tan A = \frac{25{,}36\ \text{N}}{94{,}38\ \text{N}} \qquad A = 15{,}04°$$

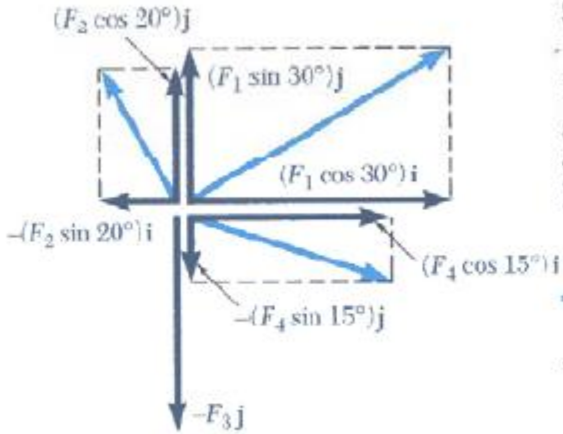
$$R = \frac{25{,}36}{\sin A} \qquad R = 97{,}73\ \text{N}$$

et finalement $\alpha = 20° + A = 35{,}04°$ $\mathbf{R} = 97{,}7\ \text{N} \measuredangle 35{,}0°$ ◄



PROBLÈME RÉSOLU 2.3

Calculez la résultante des quatre forces appliquées au boulon de la figure illustrée ci-contre.



SOLUTION

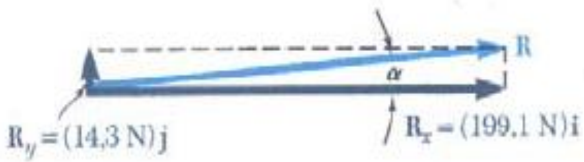
Les composantes x et y de chaque force sont obtenues par projection sur les axes choisis et leurs valeurs sont consignées dans le tableau ci-dessous. D'après la convention adoptée à la section 2.7, seront positives les composantes orientées vers la droite et les composantes orientées vers le haut.

Force	Grandeur N	Composante x N	Composante y N
$\mathbf{F}_1$	150	+129,9	+75,0
$\mathbf{F}_2$	80	−27,4	+75,2
$\mathbf{F}_3$	110	0	−110,0
$\mathbf{F}_4$	100	+96,6	−25,9
		$R_x = +199{,}1$	$R_y = +14{,}3$

La résultante $\mathbf{R}$ est donc

$$\mathbf{R} = R_x\mathbf{i} + R_y\mathbf{j} \qquad \mathbf{R} = (199{,}1\text{ N})\mathbf{i} + (14{,}3\text{ N})\mathbf{j}$$

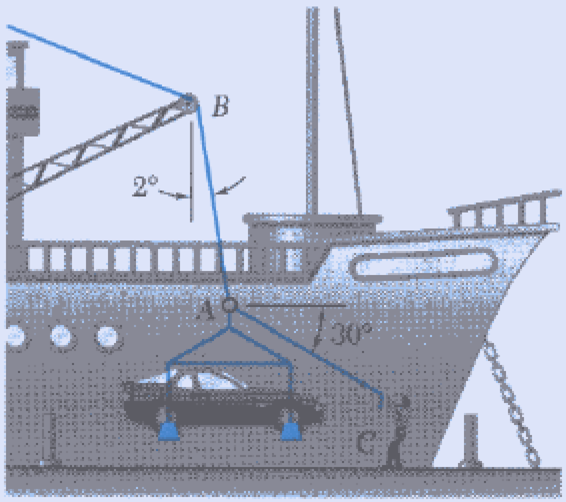
On peut maintenant calculer la grandeur et l'orientation de la résultante. Du triangle ci-contre, on peut tirer



$$\tan\alpha = \frac{R_y}{R_x} = \frac{14{,}3\text{ N}}{199{,}1\text{ N}} \qquad \alpha = 4{,}1°$$

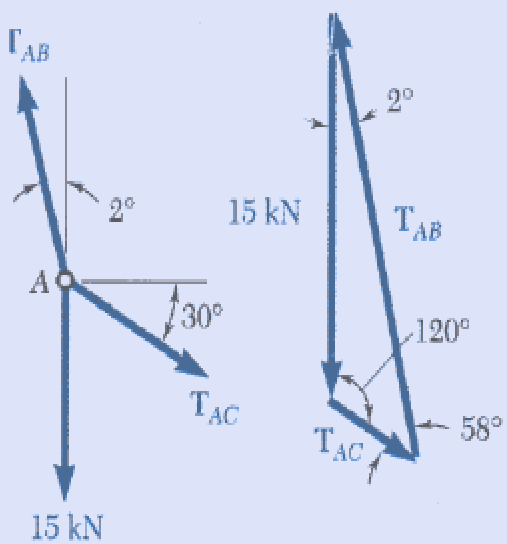
$$R = \frac{14{,}3\text{ N}}{\sin\alpha} = 199{,}6\text{ N} \qquad \mathbf{R} = 199{,}6\text{ N} \measuredangle 4{,}1° \blacktriangleleft$$

Le dernier calcul peut être simplifié si la valeur de R_y est mise en mémoire au commencement des calculs; elle sera rappelée pour être divisée par sin α (voir note 4, p. 25).



PROBLÈME RÉSOLU 2.4

Lors du déchargement d'un cargo, on soulève une automobile de 1530 kg à l'aide d'un câble. Une corde, attachée au point *A*, est tirée de façon à centrer la voiture sur un point précis. L'angle entre le câble et la verticale est de 2°, tandis que celui formé par la corde et la ligne horizontale est de 30°. Déterminez l'effort de tension dans la corde.



SOLUTION

L'automobile a un poids de 1530 kg × 9,81 N/kg = 15 kN.

Diagramme du corps libre (DCL). On commence par isoler le point *A*, puis on trace le *schéma du DCL* : T_{AB} sera la tension dans le câble *AB*, et T_{AC} la tension dans la corde *AC*.

Condition d'équilibre. Puisqu'on n'a que trois forces appliquées en *A*, on doit tracer le triangle de forces pour exprimer son équilibre. La loi du sinus donne alors

$$\frac{T_{AB}}{\sin 120°} = \frac{T_{AC}}{\sin 2°} = \frac{15 \text{ kN}}{\sin 58°}$$

Avec une calculatrice, on calcule le dernier quotient et on l'envoie en mémoire. En multipliant successivement ce quotient par sin 120° et sin 2°, on obtient

$$T_{AB} = 15{,}3 \text{ kN} \qquad T_{AC} = 617 \text{ N}$$