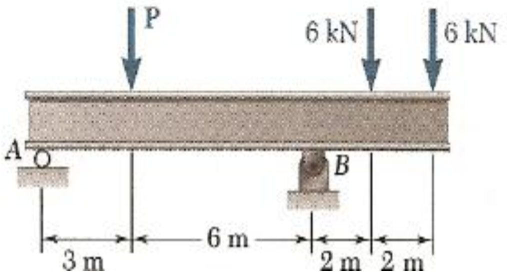
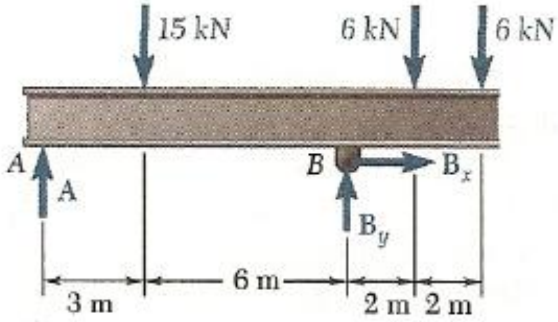
Exercices résolus en équilibre des corps rigides dans un plan

Problème résolu 4.2



On applique trois charges à une poutre tel qu'illustré. La poutre est supportée par un appui à rouleau au point A et par un appui à rotule au point B. En supposant que le poids de la poutre est négligeable, déterminez les réactions en A et en B, sachant que $P = 15$ kN.



SOLUTION

Diagramme du corps libre. On trace le diagramme du corps libre ; la réaction à l'appui A est verticale et elle est identifiée par $\mathbf{A}$; cependant, la réaction à l'appui B étant de direction inconnue, on la représente selon ses composantes $\mathbf{B}_x$ et $\mathbf{B}_y$. On suppose que chacune des composantes agit selon les directions illustrées à la figure ci-contre.

Équations d'équilibre. En écrivant les trois équations d'équilibre suivantes et en les résolvant par rapport à $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}_x$ et $\mathbf{B}_y$, on obtient

$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0$: $\qquad B_x = 0 \qquad \mathbf{B}_x = 0$ ◄

$+\circlearrowleft \Sigma M_A = 0$:

$$-(15\text{ kN})(3\text{ m}) + B_y(9\text{ m}) - (6\text{ kN})(11\text{ m}) - (6\text{ kN})(13\text{ m}) = 0$$

$$B_y = +21{,}0\text{ kN} \qquad \mathbf{B}_y = 21{,}0\text{ kN}\uparrow$$ ◄

$+\circlearrowleft \Sigma M_B = 0$:

$$-A(9\text{ m}) + (15\text{ kN})(6\text{ m}) - (6\text{ kN})(2\text{ m}) - (6\text{ kN})(4\text{ m}) = 0$$

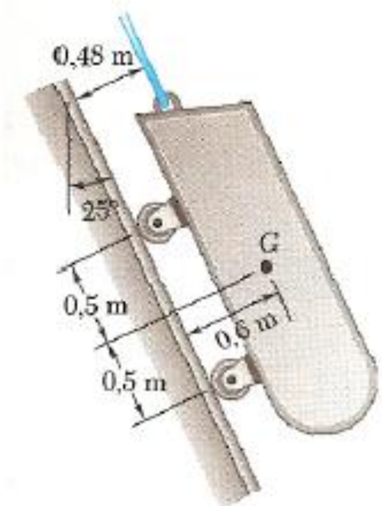
$$A = +6{,}00\text{ kN} \qquad \mathbf{A} = 6{,}00\text{ kN}\uparrow$$ ◄

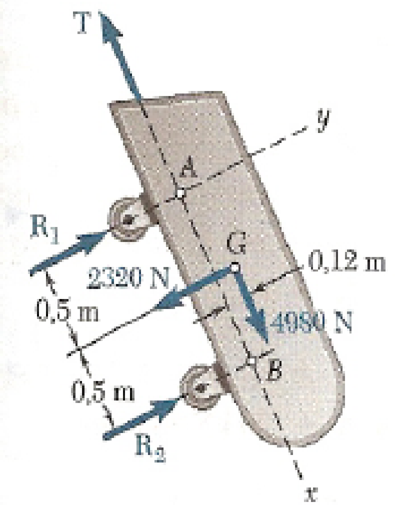
Vérification. On peut vérifier ces résultats en additionnant les composantes verticales de toutes les forces externes :

$$+\uparrow\Sigma F_y = +6{,}00\text{ kN} - 15\text{ kN} + 21{,}0\text{ kN} - 6\text{ kN} - 6\text{ kN} = 0$$

Problème résolu 4.3

Une benne de chargement de 5500 N est au repos sur des rails selon un angle de 25° avec la verticale. Son centre de gravité est à 0,6 m des rails, à mi-distance des deux essieux. La benne est retenue par un câble attaché à 0,48 m des rails. Calculez la tension dans le câble et la réaction à chacun des essieux montés.





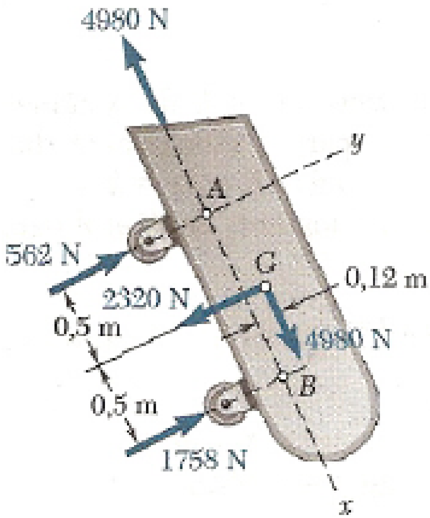
SOLUTION

Diagramme du corps libre. On trace d'abord le diagramme du corps libre. La réaction à chacune des roues est perpendiculaire aux rails tandis que la force de traction **T** est parallèle aux rails. Pour cette raison, on identifie l'axe des x parallèle aux rails et l'axe des y perpendiculaire aux rails. On décompose le poids de la benne de 5500 N selon ses composantes x et y.

$$W_x = +(5500 \text{ N}) \cos 25° = +4980 \text{ N}$$
$$W_y = -(5500 \text{ N}) \sin 25° = -2320 \text{ N}$$

Équations d'équilibre. On prend les moments par rapport au point A afin d'éliminer **T** et $\mathbf{R}_1$.

$$+\circlearrowleft \Sigma M_A = 0: \quad -(2320 \text{ N})(0{,}5 \text{ m}) - (4980 \text{ N})(0{,}12 \text{ m}) + R_2(1 \text{ m}) = 0$$
$$R_2 = +1758 \text{ N} \qquad \mathbf{R}_2 = 1758 \text{ N} \nearrow \blacktriangleleft$$



Ensuite, en prenant les moments par rapport au point B pour éliminer $\mathbf{T}$ et $\mathbf{R}_2$, on écrit

$$+\circlearrowleft \Sigma M_B = 0: \quad (2320\text{ N})(0{,}5\text{ m}) - (4980\text{ N})(0{,}12\text{ m}) - R_1(1\text{ m}) = 0$$
$$R_1 = +562\text{ N} \qquad \mathbf{R}_1 = +562\text{ N} \nearrow \blacktriangleleft$$

On obtient la valeur de T en solutionnant

$$\searrow+\Sigma F_x = 0: \quad +4980\text{ N} - T = 0$$
$$T = +4980\text{ N} \qquad \mathbf{T} = 4980\text{ N} \nwarrow \blacktriangleleft$$

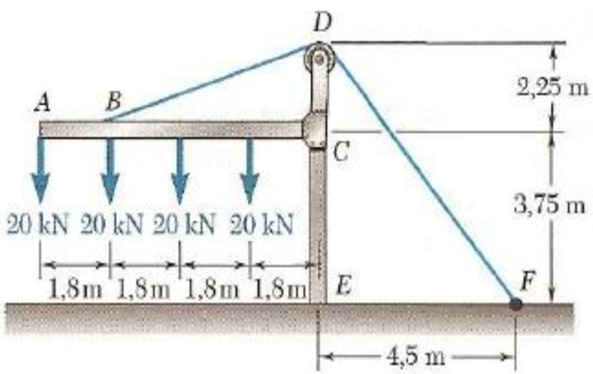
Le schéma ci-contre illustre les valeurs des différentes réactions.

Vérification. On peut vérifier les résultats à l'aide de l'équation d'équilibre suivante :

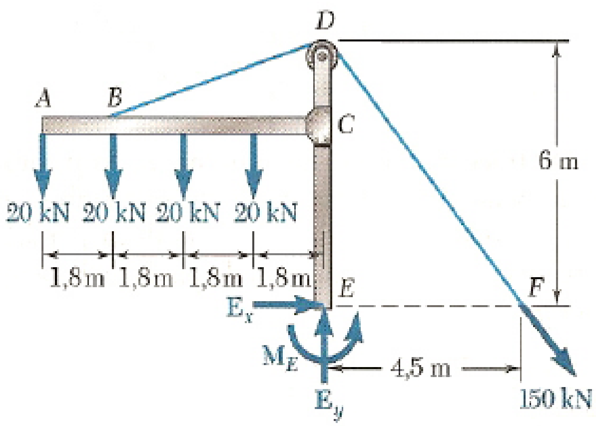
$$\nearrow+\Sigma F_y = +562\text{ N} + 1758\text{ N} - 2320\text{ N} = 0$$

On aurait pu aussi vérifier la solution en calculant les moments par rapport à un point autre que A ou B.

Problème résolu 4.4



Une structure supporte une section du toit d'un petit édifice, tel qu'illustré au schéma ci-contre. Sachant que la tension dans le câble BDF est de 150 kN, déterminez la réaction à l'encastrement E.



SOLUTION

Diagramme du corps libre. On trace le diagramme du corps libre de la structure et du câble *BDF*. On représente la réaction au point *E* par les composantes $\mathbf{E}_x$, $\mathbf{E}_y$ et le couple $\mathbf{M}_E$. Les autres forces en présence agissant sur le corps libre sont les quatre charges de 20 kN et la tension appliquée à l'extrémité du câble au point *F*.

Équations d'équilibre. Sachant que $DF = \sqrt{(4{,}5\text{ m})^2 + (6\text{ m})^2} = 7{,}5$ m, on écrit

$$\overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = 0: \qquad E_x + \frac{4{,}5}{7{,}5}(150\text{ kN}) = 0$$

$$E_x = -90{,}0\text{ kN} \qquad \mathbf{E}_x = 90{,}0\text{ kN} \leftarrow \blacktriangleleft$$

$$+\uparrow\Sigma F_y = 0: \qquad E_y - 4(20\text{ kN}) - \frac{6}{7{,}5}(150\text{ kN}) = 0$$

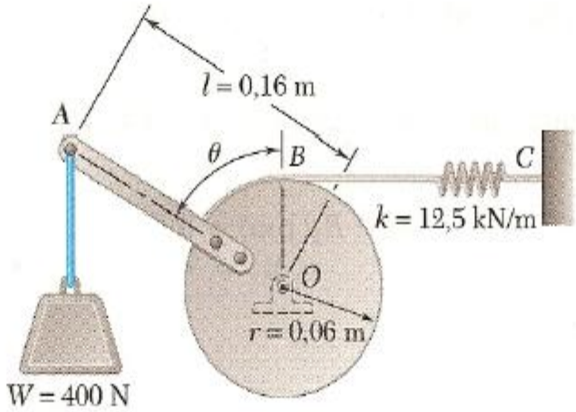
$$E_y = +200\text{ kN} \qquad \mathbf{E}_y = 200\text{ kN}\uparrow \blacktriangleleft$$

$$+\circlearrowleft\Sigma M_E = 0: \qquad (20\text{ kN})(7{,}2\text{ m}) + (20\text{ kN})(5{,}4\text{ m}) + (20\text{ kN})(3{,}6\text{ m})$$

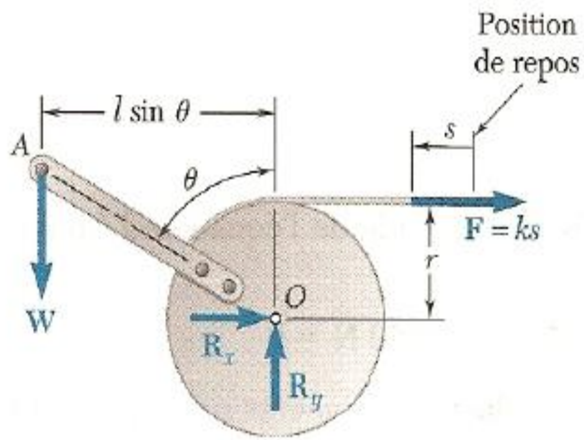
$$+ (20\text{ kN})(1{,}8\text{ m}) - \frac{6}{7{,}5}(150\text{ kN})(4{,}5\text{ m}) + M_E = 0$$

$$M_E = +180{,}0\text{ kN}\cdot\text{m} \qquad \mathbf{M}_E = 180{,}0\text{ kN}\cdot\text{m}\circlearrowleft \blacktriangleleft$$

Problème résolu 4.5



Un poids de 400 N est attaché à l'extrémité A du levier OA. La constante élastique du ressort BC est de $k = 12,5$ kN/m. Le ressort est au repos quand $\theta = 0$. Déterminez la position d'équilibre.



SOLUTION

Diagramme du corps libre (DCL). On trace le DCL du système composé du levier et du cylindre. En identifiant par s l'allongement du ressort par rapport à sa position au repos, on a : $s = r\theta$ et $F = ks = kr\theta$.

Équation d'équilibre. Si l'on additionne les moments de **W** et **F** par rapport au point O, on a :

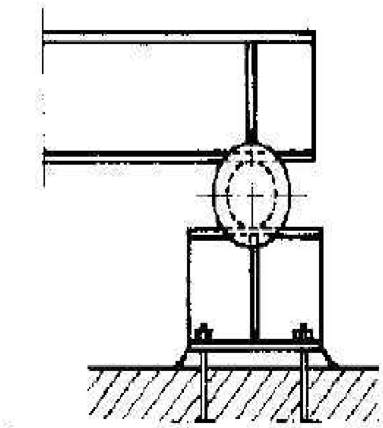
$$+\circlearrowleft \Sigma M_O = 0: \qquad Wl \sin \theta - r(kr\theta) = 0 \qquad \sin \theta = \frac{kr^2}{Wl}\,\theta$$

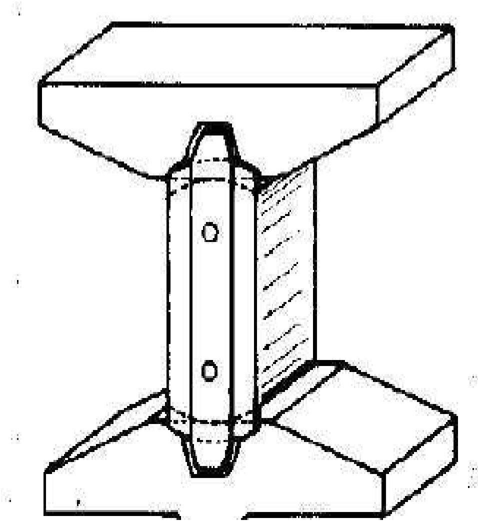
En substituant les valeurs données, on obtient

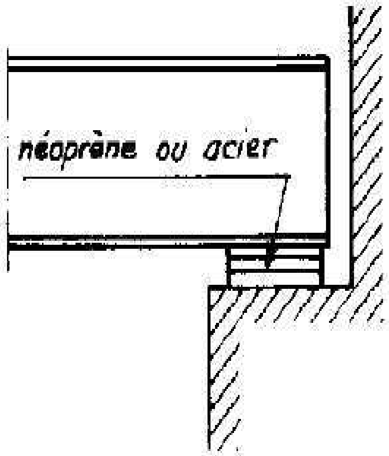
$$\sin \theta = \frac{(12{,}5 \text{ kN/m})(0{,}06 \text{ m})^2}{(400 \text{ N})(0{,}16 \text{ m})}\,\theta \qquad \sin \theta = 0{,}703\,\theta$$

Une solution par essais et erreurs donne $\qquad \theta = 0$ ou $\theta = 80{,}3°$ ◀

Exemples d'appuis simples glissants (ou libres) :

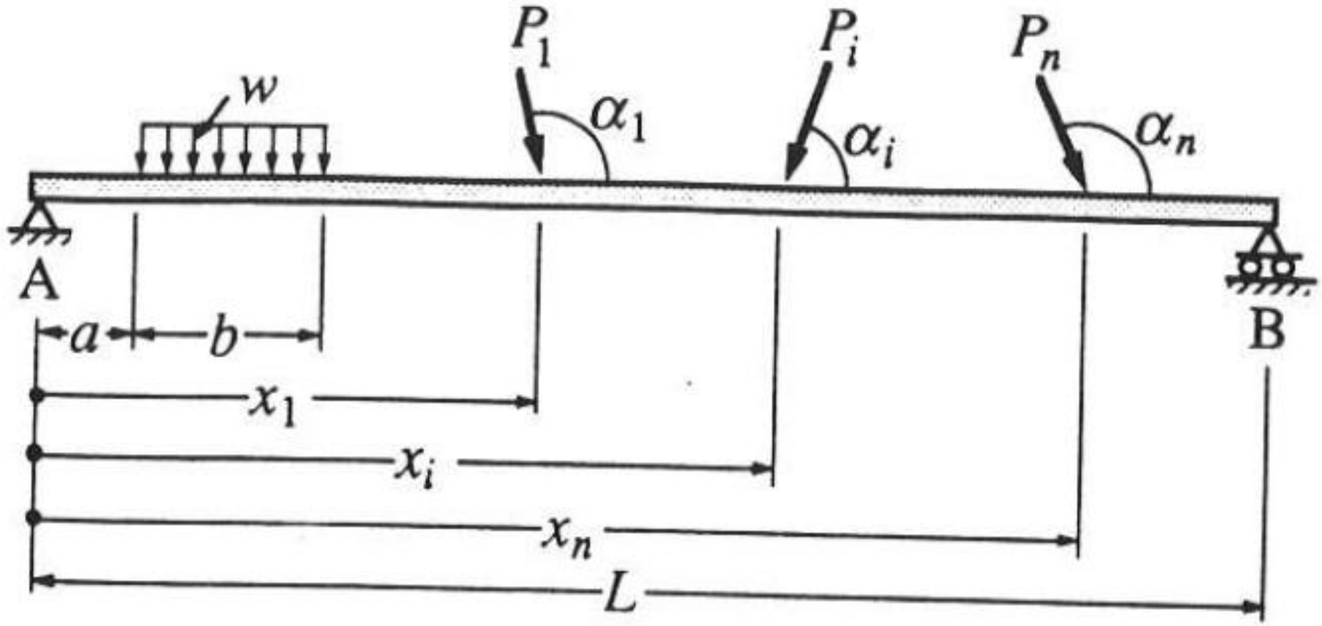






- Poutres

a) Poutre simple: poutre pourvue d'un appui double et d'un appui simple



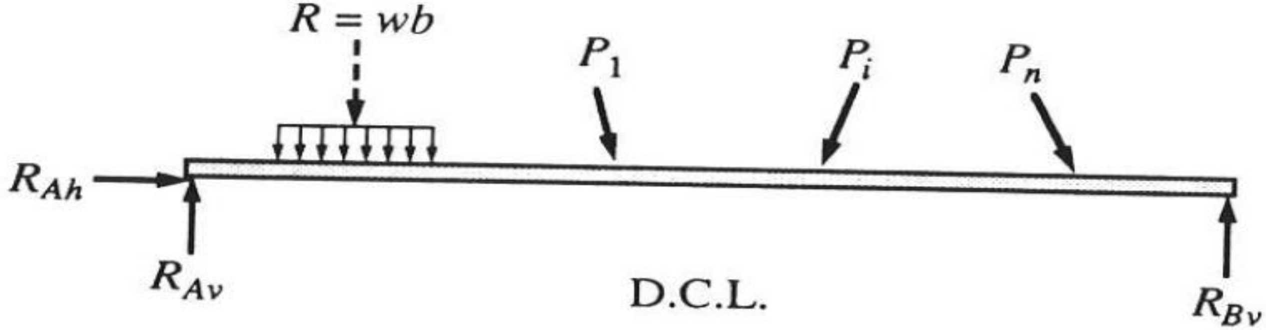


Fig. 7.10

Équations d'équilibre (43):

$$\Sigma F_h = 0 : \quad R_{Ah} - \sum_{i=1}^{n} P_i \cos \alpha_i = 0 \longrightarrow R_{Ah} = \sum_{i=1}^{n} P_i \cos \alpha_i$$

Il est plus simple d'utiliser immédiatement la troisième équation de l'équilibre plan ($\Sigma M = 0$). En effet, cette équation est vraie quel que soit le point choisi pour le calcul des moments. Si on choisit le point A ou B, on élimine une des réactions verticales inconnues.

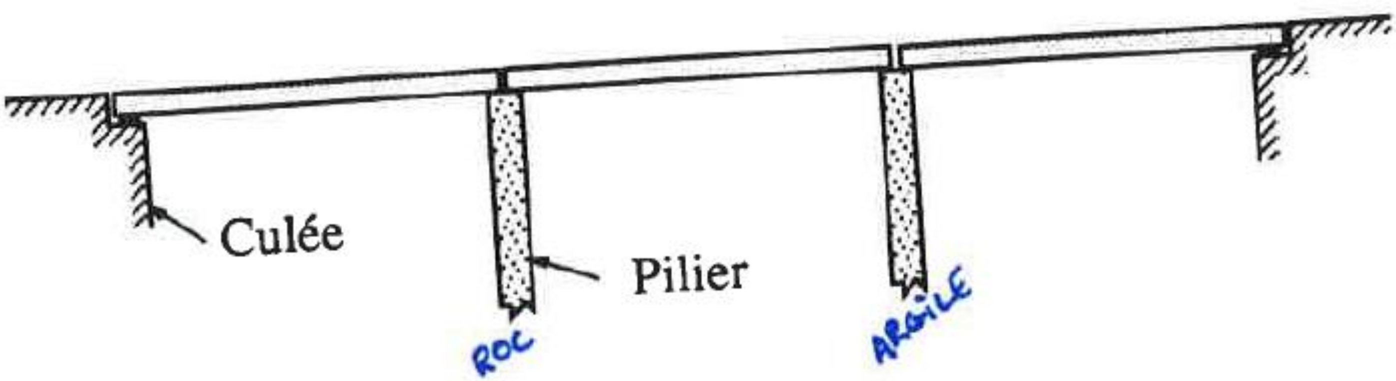
$$\overset{+}{\curvearrowleft} \Sigma M_A = 0 : \quad R_{Bv}\, L - (wb)\,(a + b/2) - \Sigma(P_i \sin \alpha_i)\,(x_i)$$

$$R_{Bv} = \frac{wb\,(a + 0{,}5\, b) - \Sigma(P_i \sin \alpha_i)\, x_i}{L}$$

$$\sum F_v = 0 : \quad R_{Av} + R_{Bv} - wb - \sum P_i \sin \alpha_i = 0$$

$$R_{Av} = wb + \sum P_i \sin \alpha_i - R_{Bv}$$

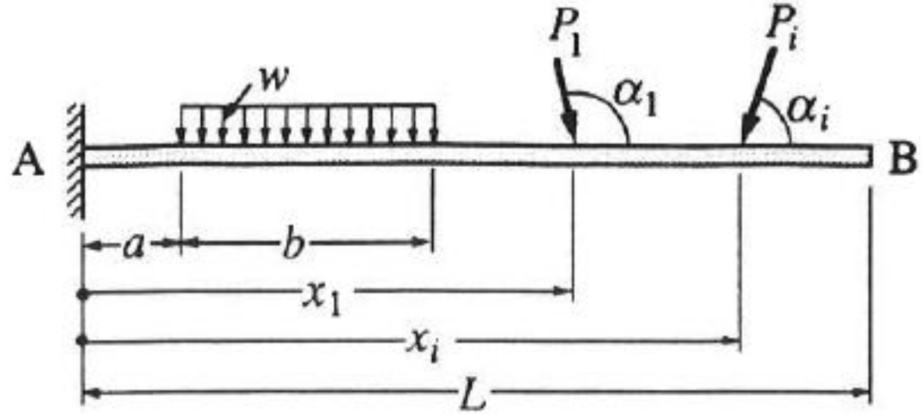
Exemple de poutres simples: pont à travées indépendantes

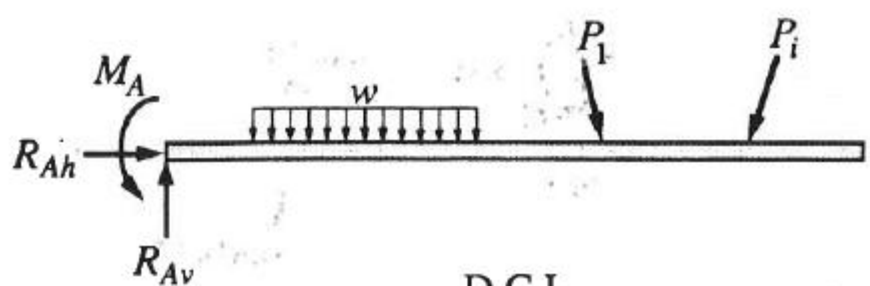


Notes: 1) Chaque travée est une poutre simple appuyée sur une culée et un pilier, ou sur deux piliers.

2) Au moins une des extrémités de chaque poutre est retenue horizontalement.

b) Porte-à-faux: élément sur un appui unique forcément un appui triple





D.C.L.

Équations d'équilibre

$$\sum F_h = 0 : \quad R_{Ah} - \sum_{i=1}^{n} P_i \cos \alpha_i = 0 \longrightarrow R_{Ah} = \sum_{i=1}^{n} P_i \cos \alpha_i$$

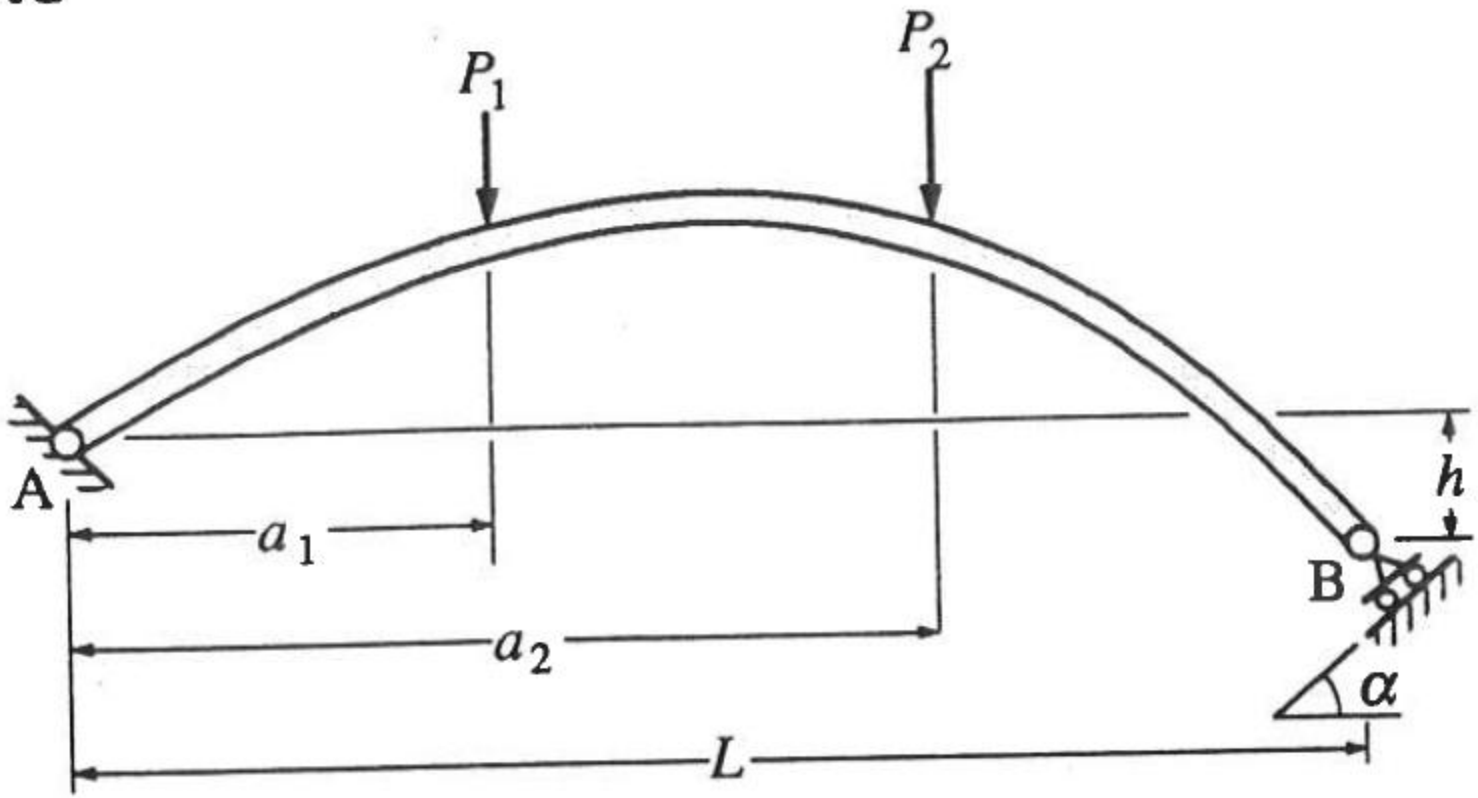
$$\sum F_v = 0 : \quad R_{Av} - wb - \sum P_i \sin \alpha_i = 0$$

$$R_{Av} = wb + \sum P_i \sin \alpha_i$$

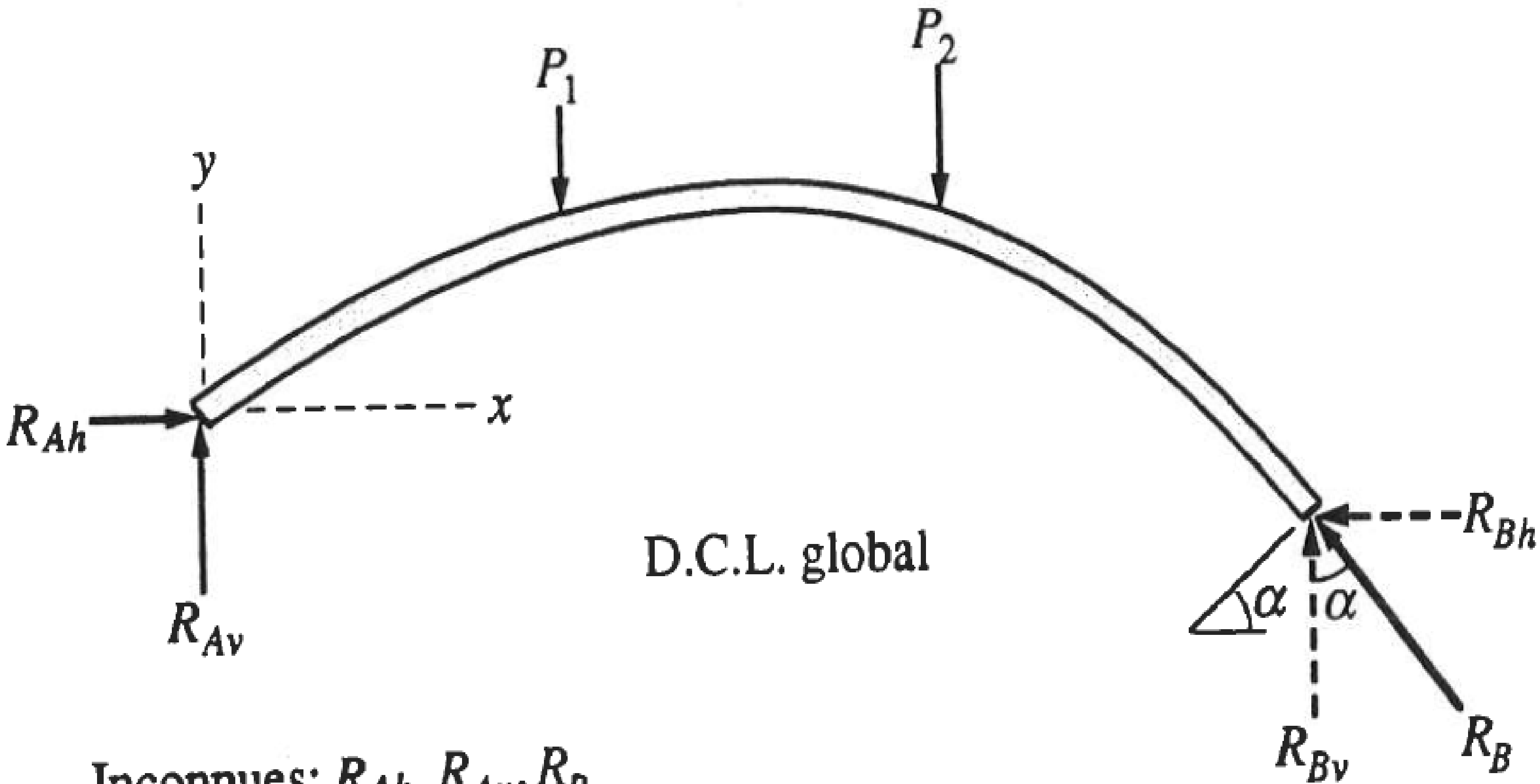
$$\overset{+}{\sum M_A} = 0 : \quad M_A - (wb)\,(a + b/2) - \sum (P_i \sin \alpha_i)\, x_i = 0$$

$$M_A = (wb)\,(a + b/2) + \sum (P_i \sin \alpha_i)\, x_i$$

Exemple



Paramètres connus $\begin{cases} \text{la géométrie: } L, h, a_1, a_2 \text{ et } \alpha \\ \text{les charges appliquées: } P_1 \text{ et } P_2 \end{cases}$



Inconnues: R_{Ah}, R_{Av}, R_B

Inconnues: R_{Ah}, R_{Av}, R_B

Équation géométrique: $R_{Bh} = R_{Bv} \tan\alpha$

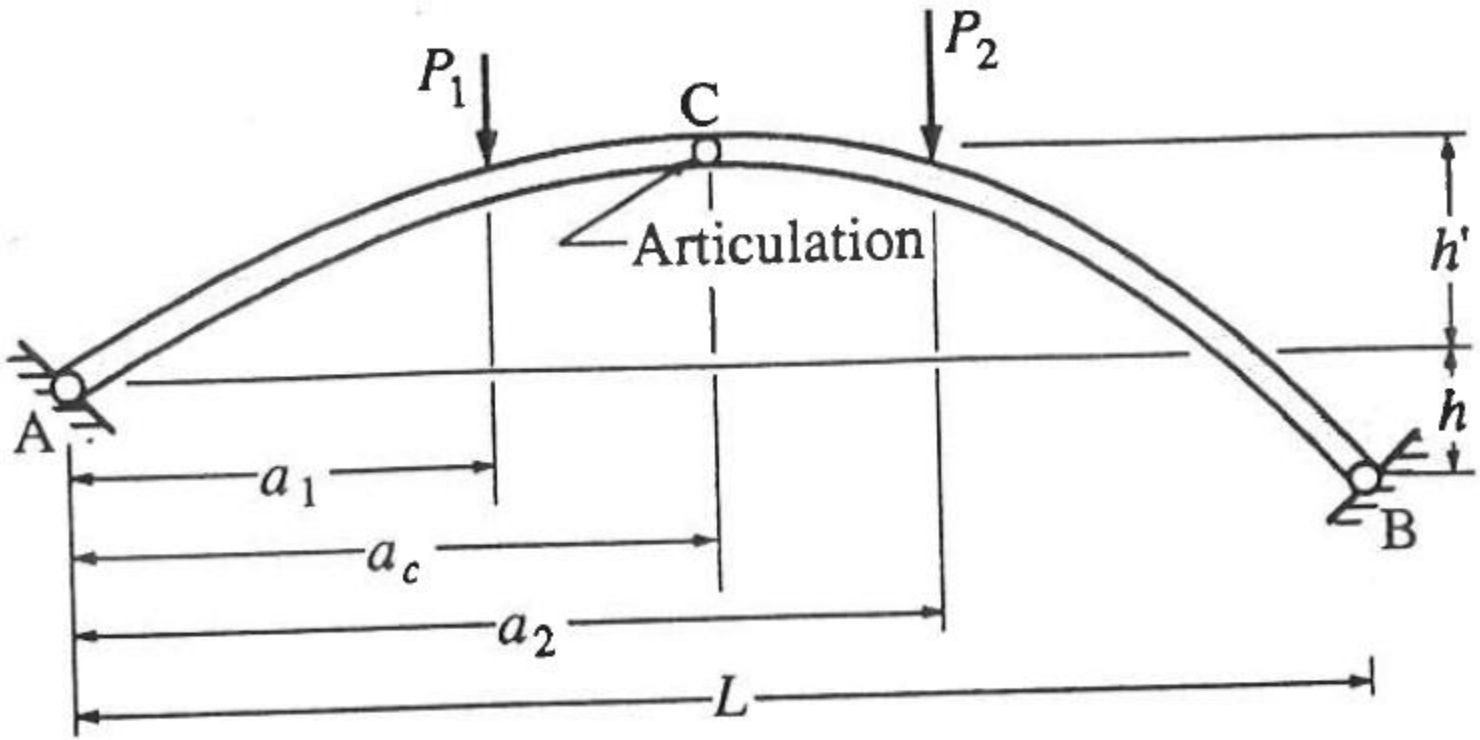
Équations d'équilibre: $\sum F_h = 0 \quad R_{Ah} - R_{Bh} = 0 \qquad (R_{Ah} = R_{Bh})$

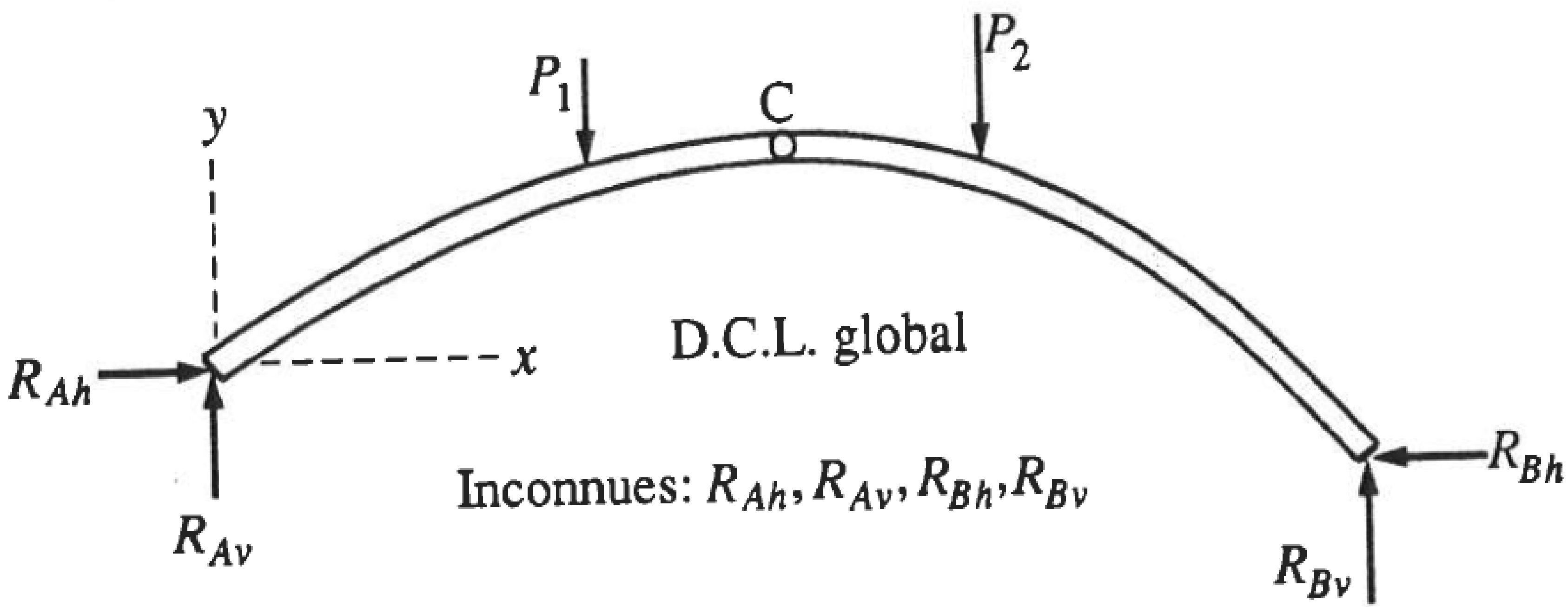
$$\sum F_v = 0 \quad R_{Av} + R_{Bv} - P_1 - P_2 = 0$$

$$\overset{+}{\sum M_A} = 0 \quad R_{Bv} L - R_{Bh} h - P_1 a_1 - P_2 a_2 = 0$$

De la dernière équation, on obtient: $R_{Bv} = \dfrac{P_1 a_1 + P_2 a_2}{L - h\tan\alpha}$

Exemple



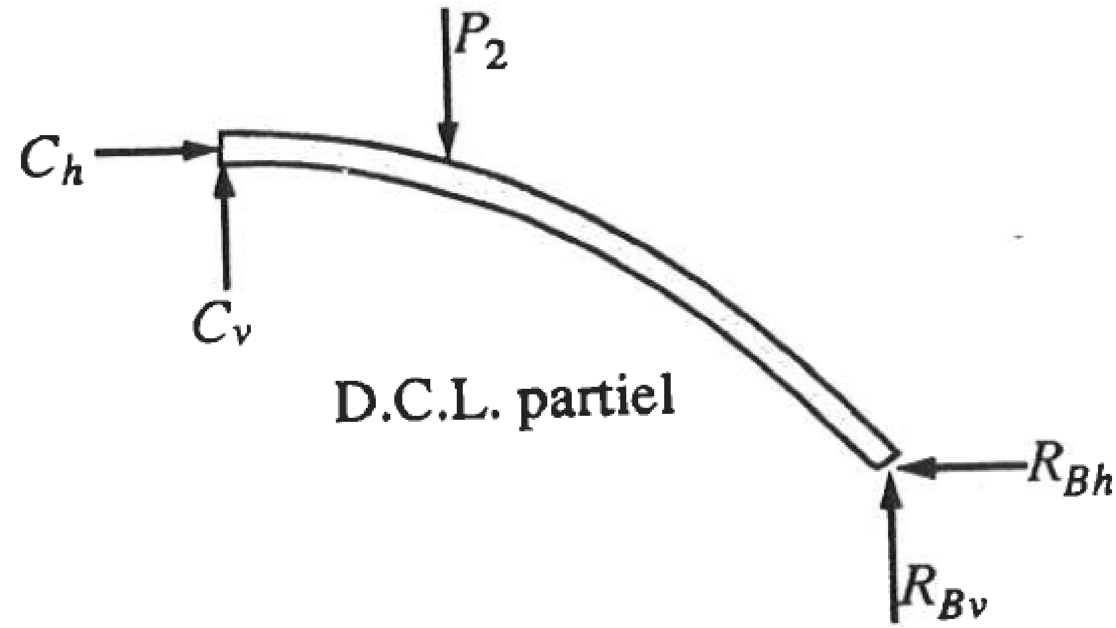

P_1
P_2
C
y
x
D.C.L. global
R_{Ah}
R_{Av}
R_{Bh}
R_{Bv}
Inconnues: $R_{Ah}, R_{Av}, R_{Bh}, R_{Bv}$

$$\sum F_h = 0 : \quad R_{Ah} - R_{Bh} = 0 \qquad (1)$$

$$\sum F_v = 0 : \quad R_{Av} + R_{Bv} - P_1 - P_2 = 0 \qquad (2)$$

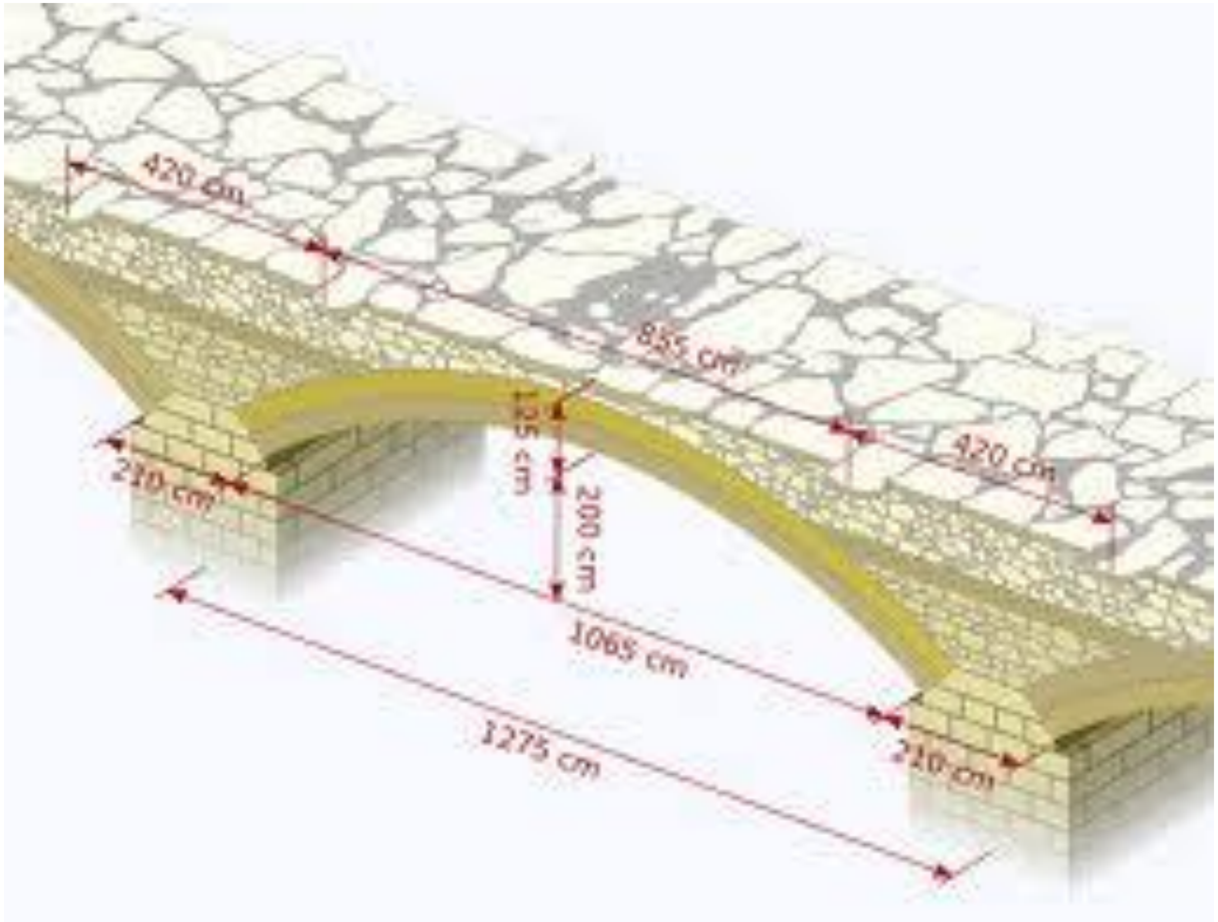
$$\overset{+}{\sum M_A} = 0 : \quad R_{Bv} L - R_{Bh} h - P_1 a_1 - P_2 a_2 = 0 \qquad (3)$$

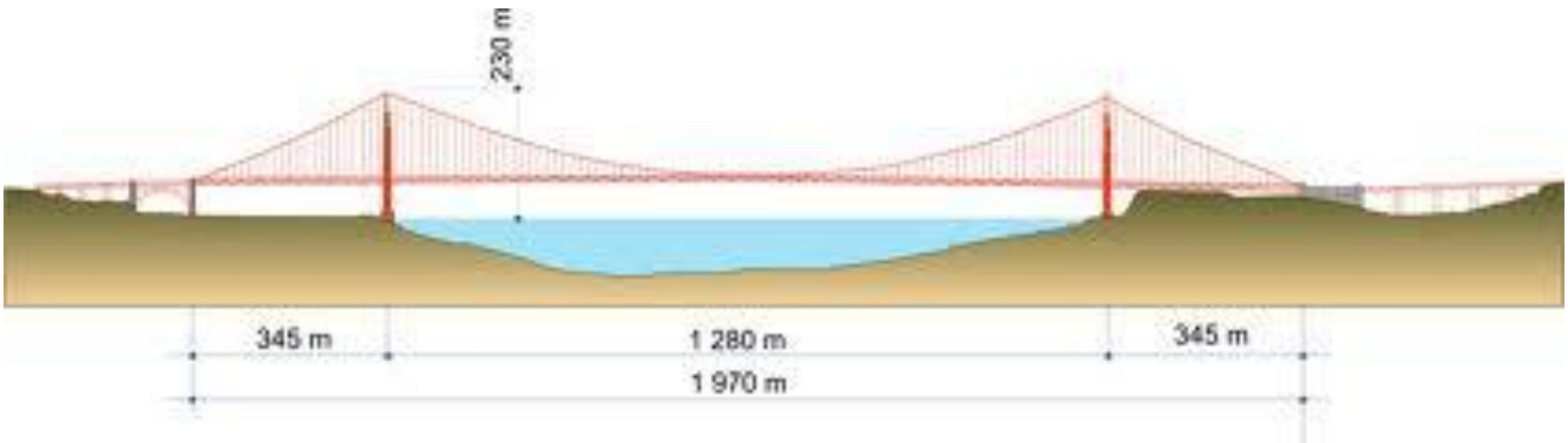
Une articulation ne transmet que des forces



$$\overset{+}{\sum} M_C = 0 : \quad R_{Bv}(L - a_c) - R_{Bh}(h + h') - P_2(a_2 - a_c) = 0$$

(3) et (4) $\longrightarrow R_{Bh}$ et R_{Bv} (1) $\longrightarrow R_{Ah}$ (2) $\longrightarrow R_{Av}$


420 cm
855 cm
420 cm
125 cm
200 cm
210 cm
1065 cm
210 cm
1275 cm


230 m
345 m
1 280 m
345 m
1 970 m