Autre cas particulier du théorème de Varignon: forces parallèles

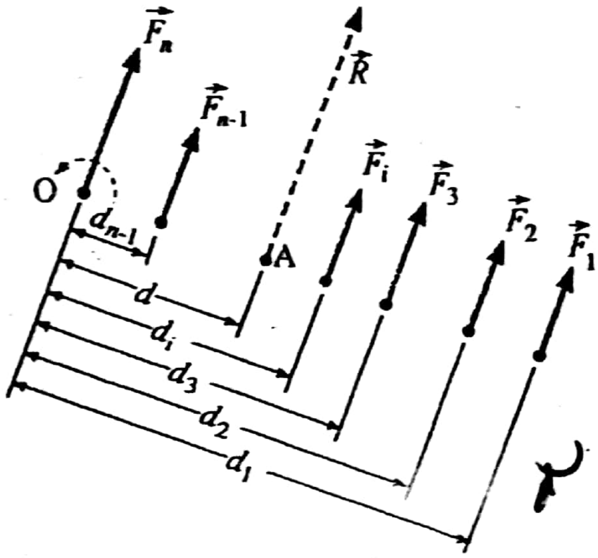


Fig. 3.14

Note: Le moment par rapport au point O est positif antihoraire.

L'intensité de $\vec{R}$ est donnée par:

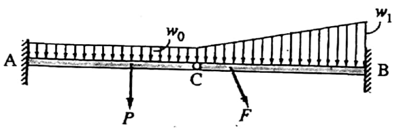
$$R = \sum_{i=1}^{n} F_i \tag{31}$$

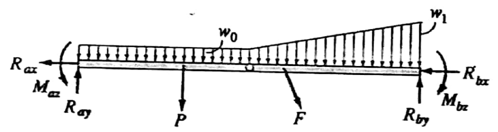
Le bras de levier de la ligne d'action de $\vec{R}$ par rapport au point O est donné par:

$$d = \frac{\sum_{i=1}^{n} F_i \, d_i}{R} \tag{32}$$

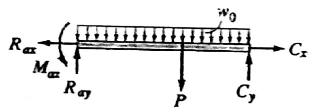
La résultante appliquée au point A a le même effet par rapport au point O que toutes les forces F_i. On peut donc remplacer toutes les forces F_i par la résultante appliquée au point A.

Exemple 4.4

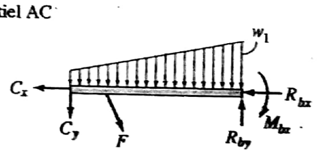




D.C.L. global



D.C.L. partiel AC



D.C.L. partiel BC

- Charges réparties

Pour le calcul des réactions, on peut remplacer la charge répartie par sa résultante (D.C.L. global). Lorsqu'on utilise un D.C.L. partiel (voir fig. 6.6), on doit considérer la charge répartie partielle agissant sur le D.C.L. partiel. On peut remplacer la charge répartie partielle par une résultante partielle.

a) Charge répartie uniforme

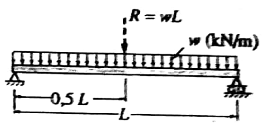


Fig. 7.2

b) Charge répartie triangulaire

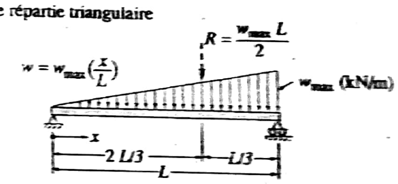


Fig. 7.3

c) Charge répartie uniforme et triangulaire

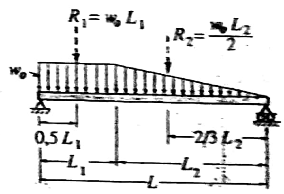
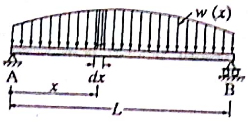
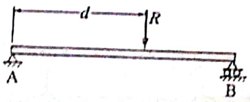


Fig. 7.4

d) Charge répartie quelconque

La charge répartie doit être définie en fonction de x: $w(x)$





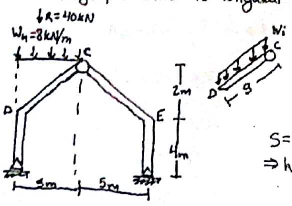
$$R = \int_0^L w\,dx \tag{45}$$

$$Rd = \int_0^L (w\,dx)x \tag{46}$$

$$d = \frac{\int_0^L w\,x\,dx}{R} \tag{47}$$

Fig. 7.5

C1 Charge par unité de longueur verticale ou horizontale.



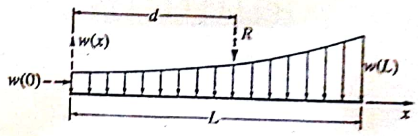
$S = \sqrt{2^2+5^2} = 5,38\,m$

$\Rightarrow W_i = \frac{40}{5,38} = 7,43\ kN/m$

Chapitre 7 - Exemples

Exemple 7.1

Trouver la résultante du chargement suivant et son point d'application.



Variation parabolique croissante $w(L) > w(0)$	$w = w_o + kx^2$
Variation parabolique décroissante $w(L) < w(0)$	$w = w_o - kx^2$
Variation cubique croissante $w(L) > w(0)$	$w = w_o + kx^3$
Variation cubique décroissante $w(L) < w(0)$	$w = w_o - kx^3$

Exemple: variation cubique $w(0) = 1$ kN/m, $w(L) = 2$ kN/m, $L = 8$ m

$$w(L) = w_o + k\,(L)^3$$

$$2 = 1 + k\,(8)^3 \longrightarrow k = 0{,}00195$$

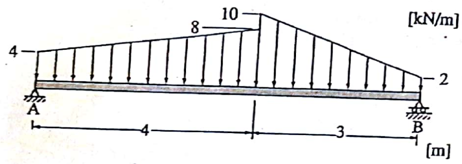
Éq. (45) $\rightarrow R = \int_0^8 w\,dx = \int_0^8 (1 + 0{,}00195\,x^3)\,dx$

$$R = \left| x + \frac{0{,}00195\,x^4}{4} \right|_0^8 \approx 10\ \text{kN}$$

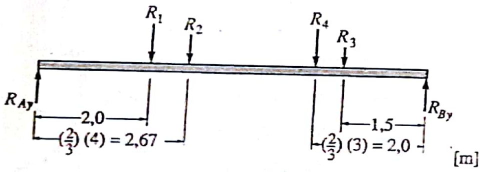
Éq. (47) $\rightarrow d = \dfrac{\int_0^8 wx\,dx}{R} = \dfrac{\left| \frac{x^2}{2} + \frac{0{,}00195\,x^5}{5} \right|_0^8}{10} = 4{,}48$ m

Exemple 7.2

Trouver les résultantes du chargement suivant.



Pour le calcul des réactions, on peut remplacer les changements distribués par les résultantes.



$R_1 = 4$ kN/m x 4 m = 16 kN

$R_2 = \dfrac{(8-4) \times 4}{2} = 8$ kN

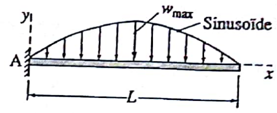
$R_3 = 2$ kN/m x 3 m = 6 kN

$R_4 = \dfrac{(10-2) \times 3}{2} = 12$ kN

$R_{Ay} = 21{,}1$ kN $\qquad R_{By} = 20{,}9$ kN

Exemple 7.3

Calculer les réactions d'appui du porte-à-faux.

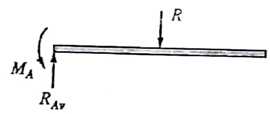


$w = w_{max} \sin \frac{\pi x}{L}$

(Éq. 45) $\longrightarrow$ $R = \int_0^L w\,dx = \int_0^L w_{max} \sin \frac{\pi x}{L}\,dx = w_{max} \left| \frac{-L}{\pi} \cos \frac{\pi x}{L} \right|_0^L$

$R = w_{max} \left[\frac{-L}{\pi} \cos \pi - \left(\frac{-L}{\pi} \cos 0 \right) \right] = w_{max} \left(\frac{2L}{\pi} \right)$

$\cos \pi = -1{,}0 \qquad \cos 0 = 1{,}0$



$\Sigma F_v = 0 \qquad R_{Av} - R = 0$

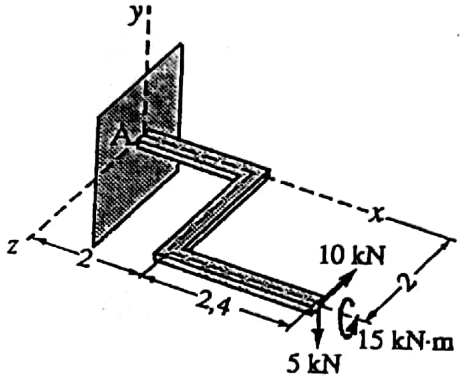
$R_{Av} = R = \dfrac{2\, w_{max}\, L}{\pi}$

$\overset{+}{\Sigma M_A} = 0 \qquad M_A - R\left(\frac{L}{2}\right) = 0$

$M_A = \dfrac{w_{max}\, L^2}{\pi}$

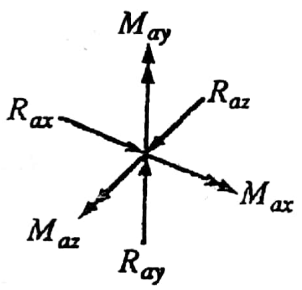
Exemple 7.5

Calculer les réactions à l'appui A.



Dans les problèmes 3D, on peut étudier l'équilibre dans 3 plans

(couple agissant autour d'un axe parallèle à l'axe x, c'est-à-dire dans le plan yz)



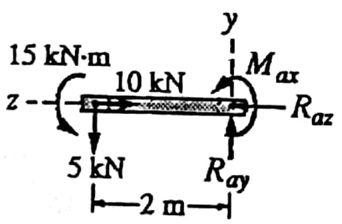
$\Sigma F_x = 0 \qquad R_{ax} = 0$

$\Sigma F_y = 0 \qquad R_{ay} = 5$ kN

$\Sigma F_z = 0 \qquad R_{az} = 10$ kN

$\vec{R}_A = 5\vec{j} + 10\vec{k}$

→ Projection dans y - z



$\overset{+}{\curvearrowleft} \Sigma M_{Ax} = 0$

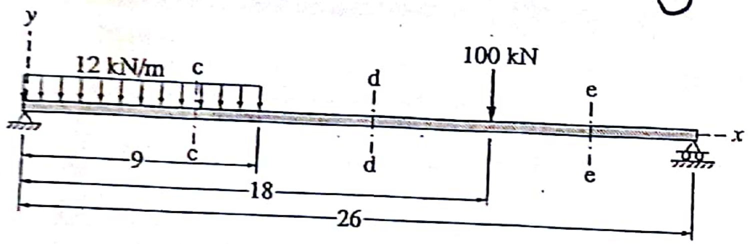
$M_{ax} + (5)(2) + 15 = 0$

$M_{ax} = -25$ kN·m

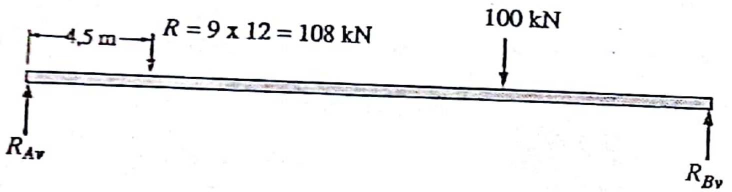
Exemple 7.6

Calculer les efforts aux sections C, D, E de la poutre suivante.

(Introduction au calcul des efforts internes)



① **Calcul des réactions**



$\overset{+}{\curvearrowleft}\sum M_A = 0$ $\quad (R_{Bv})(26) - (100)(18) - (108)(4{,}5) = 0$

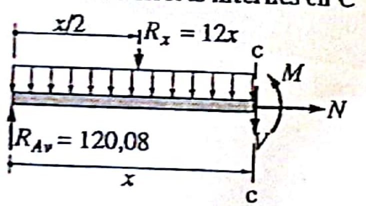
$R_{Bv} = 87{,}92$ kN

$\sum F_v = 0$ $\quad R_{Av} + R_{Bv} = 208$ kN $\longrightarrow R_{Av} = 120{,}08$ kN

Vérification:

$\overset{+}{\curvearrowleft}\sum M_B \overset{?}{=} 0$ $\quad - (120{,}08)(26) + (100)(8) + (108)(21{,}5) = -0{,}08$ kN·m

② **Calcul des efforts internes en C** $\quad (0 \le x \le 9\text{ m})$



M = moment fléchissant

N = effort normal

V = effort tranchant

$\sum F_h = 0$ $\quad N = 0$

$\sum F_v = 0$ $\quad R_{Av} - V - R_x = 0$

$V = R_{Av} - R_x = 120{,}08 - 12x$ (droite)

$x = 0 \rightarrow V = R_{Av} = 120{,}08$ kN

$x = 9\text{ m} \rightarrow V = 120{,}08 - 108 = 12{,}08$ kN

$\overset{+}{\curvearrowleft}\sum M_{coupe} = 0$ $\quad M + 12x\,(x/2) - (R_{Av})(x) = 0$

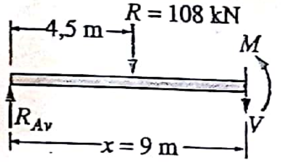
$M = 120{,}08x - 6x^2$ (parabole)

$\boxed{\dfrac{dM}{dx} = V}$

$x = 0 \rightarrow M = 0$

$x = 9\text{ m} \rightarrow M = (120{,}08)(9) - 6\,(9)^2 = 594{,}72$ kN·m

Vérification à $x = 9$ m



$\sum F_v = 0$ $\quad R_{Av} - V - 108 = 0$

$V = 120{,}08 - 108 = 12{,}08$ kN

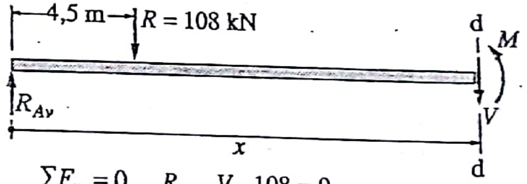
$\overset{+}{\curvearrowleft}\sum M_{coupe} = 0$

$M - (R_{Av})(9) + (R)(4{,}5) = 0$

$M = (120{,}08)(9) - (108)(4{,}5)$

$M = 594{,}72$ kN

③ **Calcul des efforts internes en D** $\quad (9\text{ m} \le x \le 18\text{ m})$



$\sum F_v = 0$ $\quad R_{Av} - V - 108 = 0$

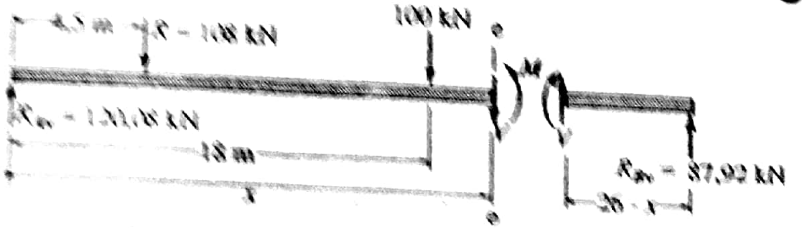
$V = 12{,}08$ kN (constante)

$\overset{+}{\curvearrowleft}\sum M_{coupe} = 0$ $\quad M - (R_{Av})(x) + 108\,(x - 4{,}5) = 0$

$M = 120{,}08x - 108x + 486 = 0$

$M = 12{,}08x + 486$ (droite) $\quad \begin{cases} x = 9\text{ m} \rightarrow M = 594{,}72\text{ kN·m} \\ x = 18\text{ m} \rightarrow M = 703{,}44\text{ kN·m} \end{cases}$

④ Calcul des efforts internes en E (18 m ≤ x ≤ 26 m)



D.C.L. partiel (gauche)	D.C.L. partiel (droite)
$\sum F_y = 0 \longrightarrow R_{Ay} - V - 108 - 100 = 0$ $V = -87{,}92$ kN	$R_{By} + V = 0$ $V = -R_{By} = -87{,}92$ kN
$\overset{+}{\curvearrowleft}\sum M_{coupe} \longrightarrow M - (120{,}08)(x) + 108\,(x - 4{,}5) + 100\,(x - 18) = 0$ $M = -87{,}92\,x + 2286$ (droite)	$-M + 87{,}92\,(26 - x) = 0$ $M = -87{,}92\,x + 2286$

$x = 18$ m $M = 703{,}44$ kN·m

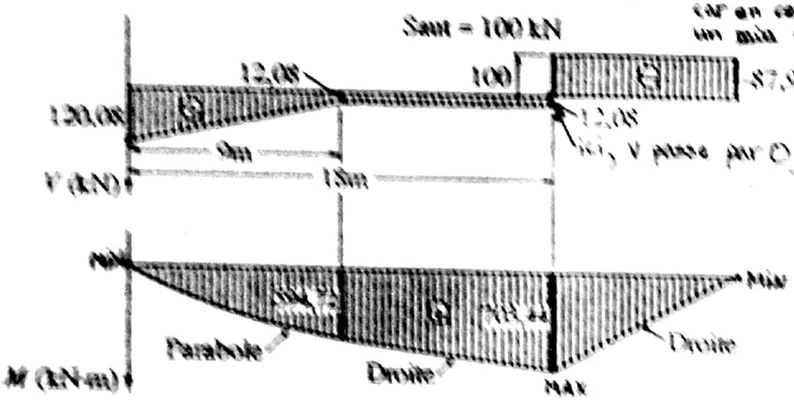
$x = 26$ m $M = 0$

$\boxed{\dfrac{dM}{dx} = V}$

$M_{min} = 0$

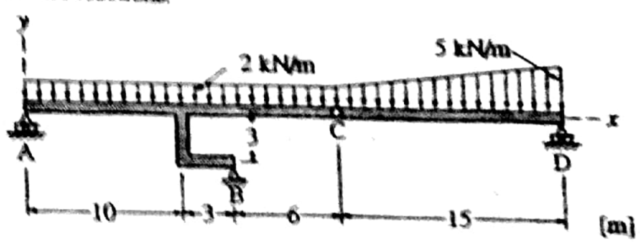
$M_{MAX} = 703{,}44$ à l'endroit où V = 0 car en ce point j'ai un min ou un max.

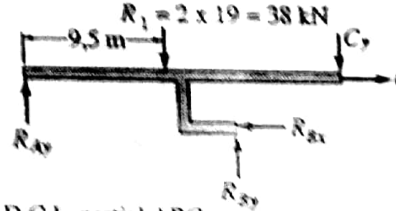
⑤ Diagrammes



Exemple 7.7

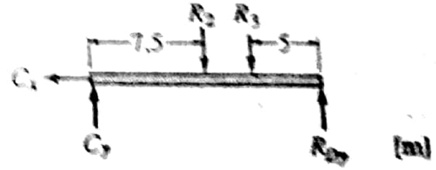
Calculer les réactions.





D.C.L. partiel ABC

$R_2 = 2 \times 15 = 30$ kN
$R_3 = (5 - 2)\,15/2 = 22{,}5$ kN



D.C.L. partiel CD

1) D.C.L. partiel CD :

$\sum F_x = 0$ $C_x = 0$

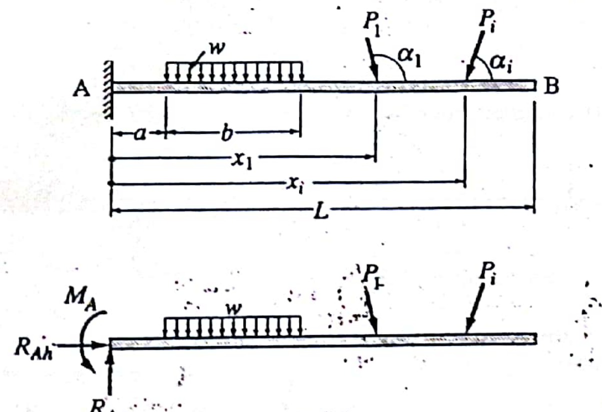
$\overset{+}{\curvearrowleft}\sum M_C = 0$ $(R_{Dy})(15) - (R_2)(7{,}5) - R_3\,(10) =$

$R_{Dy} = 30$ kN

$\sum F_y = 0$ $R_{Dy} + C_y - R_2 - R_3 = 0$

$C_y = R_2 + R_3 - R_{Dy} = 22{,}5$ kN

b) Porte-à-faux: élément sur un appui unique forcément un appui triple



D.C.L.

Fig. 7.12

Équations d'équilibre (43):

$$\sum F_h = 0: \quad R_{Ah} - \sum_{i=1}^{n} P_i \cos \alpha_i = 0 \rightarrow R_{Ah} = \sum_{i=1}^{n} P_i \cos \alpha_i$$

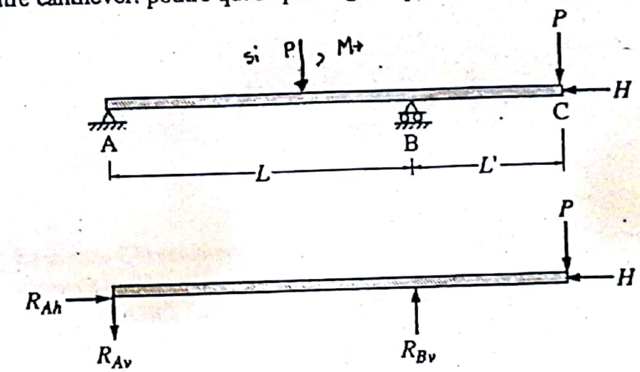
$$\sum F_v = 0: \quad R_{Av} - wb - \sum P_i \sin \alpha_i = 0$$

$$R_{Av} = wb + \sum P_i \sin \alpha_i$$

$$\overset{+}{\curvearrowleft}\sum M_A = 0: \quad M_A - (wb)(a + b/2) - \sum (P_i \sin \alpha_i)\, x_i = 0$$

$$M_A = (wb)(a + b/2) + \sum (P_i \sin \alpha_i)\, x_i$$

c) Poutre cantilever: poutre qui se prolonge en porte-à-faux



D.C.L.

Fig. 7.13

L'action de la charge P par rapport au point B est un moment horaire. La réaction R_{Av} doit donc agir vers le bas pour produire un moment antihoraire par rapport au point B. À l'appui A, la poutre a tendance à se soulever, la réaction R_{Av} empêche le soulèvement en agissant vers le bas. La plus grande réaction R_{Av} vers le bas est obtenue en considérant les charges agissant uniquement sur le porte-à-faux BC.

$$\overset{+}{\curvearrowleft}\sum M_A = 0: \quad R_{Bv} L - P(L + L') = 0$$

$$R_{Bv} = \frac{P(L + L')}{L} \quad (> P)$$

$$\sum F_v = 0: \quad -R_{Av} + R_{Bv} - P = 0$$

$$R_{Av} = R_{Bv} - P = \frac{PL'}{L}$$

↳ Agissant vers le bas

$R_{BVmax} = \frac{P(L+L')}{L}$

$R_{BV} = \frac{P \cdot x}{L}$

$R_{BV} \cdot L - P \cdot x = 0$

$R_{AV} = P \cdot \left(\frac{L - x}{L}\right)$

$R_{AV} = P - R_{BV}$

$R_{AVmin} = \frac{-P \cdot L'}{L}$

$0 \leqslant x \leqslant L$ $\qquad L \leqslant x \leqslant L + L$

d) Calcul des efforts dans les barres: méthode des noeuds.

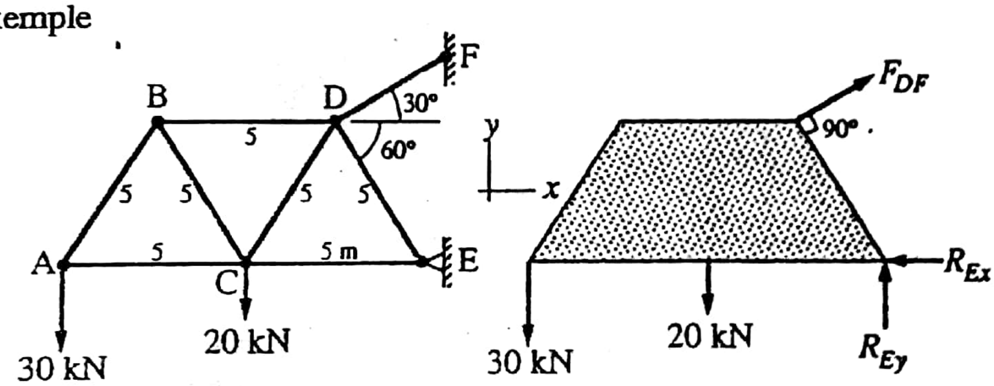
- Méthode à utiliser si on veut connaître les efforts dans toutes les barres.

- Chaque noeud est en équilibre et on utilise les équations d'équilibre du point matériel (équilibre translationnel; équations 36a, b et c).

- On procède noeud par noeud en choisissant un noeud où il n'y a que deux inconnues (deux équations de l'équilibre translationnel 2D), ou trois inconnues (trois équations de l'équilibre translationnel 3D).

- On admet que toutes les barres sont en traction, c'est-à-dire qu'elles tirent sur les noeuds. Un effort négatif signifie alors une compression, c'est-à-dire que la barre pousse sur le noeud.

Exemple



D.C.L.global: $\sum M_E = 0$: $(30)(10) + (20)(5) - 5F_{DF} = 0$

$F_{DF} = 80$ kN

$\sum F_x = 0$: $R_{Ex} = F_{DF} \cos 30° = 69{,}3$ kN

$\sum F_y = 0$: $R_{Ey} = 30 + 20 - F_{DF} \sin 30° = 10$ kN

Équilibre du noeud A:

$\sum F_y = 0$: $-30 + F_{AB} \sin 60° = 0$

$F_{AB} = 34{,}6$ kN (traction)

$\sum F_x = 0$: $F_{AB} \cos 60° + F_{AC} = 0$

$F_{AC} = -17{,}3$ kN (compression)

Noeud A

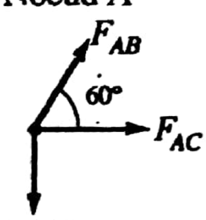


Fig. 7.22