

Chapitre 6

Calcul de l'effort tranchant (Cisaillement)

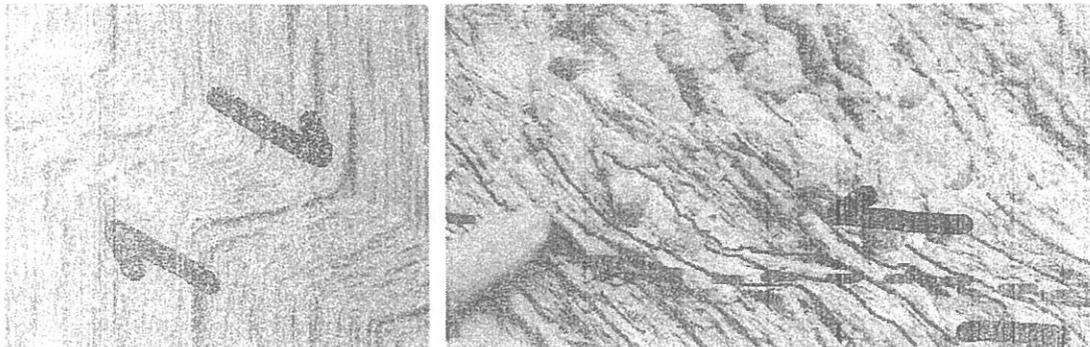


FIGURE 6.1 – Poutre en bois développant un cisaillement

6.1 Contraintes et déformations dues à l'effort tranchant

On considère une longueur élémentaire d'une poutre soumise à un effort tranchant et coupée par un plan dans le sens longitudinal comme schématisé dans la figure (6.2).

Considérons l'équilibre du prisme $\Sigma_1\Sigma'_1$ suivant l'axe z :

$$\sum F_z = 0 \rightarrow \iint_{\Sigma_1} \sigma_z dS - \iint_{\Sigma'_1} (\sigma_z + d\sigma_z) dS + dz \int_{AB} \tau_n dl = 0 \quad (6.1)$$

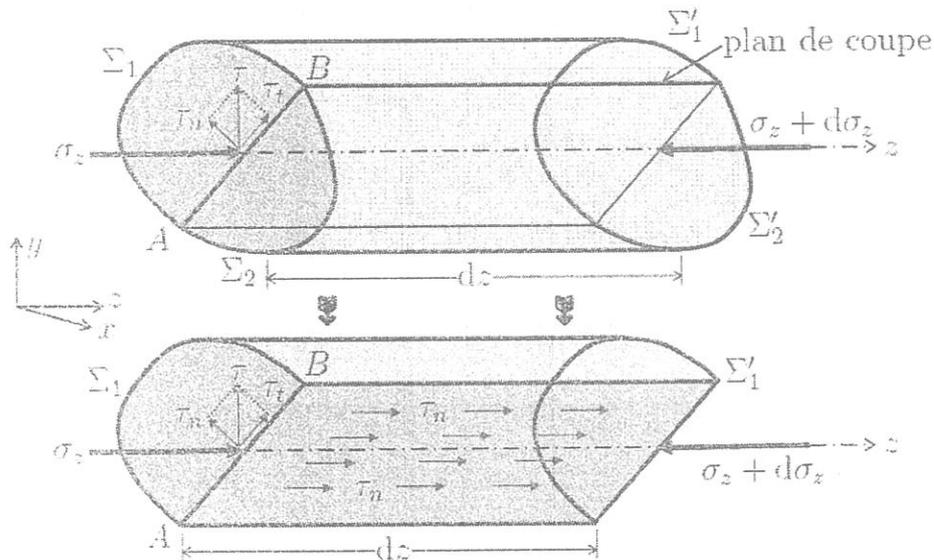


FIGURE 6.2 – Longueur élémentaire d'une poutre chargée par un effort tranchant

$$\Rightarrow \int_{AB} \tau_n dl = \iint_{\Sigma_1} \frac{d\sigma_z}{dz} dS \quad (6.2)$$

or on sait que :

$$\sigma_z = -\frac{My}{I_x} \Rightarrow \frac{d\sigma_z}{dz} = -\frac{y}{I_x} \frac{dM}{dz} = \frac{yV_y}{I_x} \quad (6.3)$$

$$\Rightarrow \int_{AB} \tau_n dl = \iint_{\Sigma_1} \frac{yV_y}{I_x} dS = \frac{V_y}{I_x} \iint_{\Sigma_1} y dS \quad (6.4)$$

$$\Rightarrow \int_{AB} \tau_n dl = \frac{V_y S_x^*}{I_x} \quad (6.5)$$

cette dernière équation représente le flux de τ_n à travers la courbe AB où S_x^* est le moment statique de la section Σ_1 par rapport à l'axe x .

En utilisant l'expression du flux de contrainte de τ_n , on peut constater que pour calculer τ_x et τ_y , il faut prendre la coupe AB parallèle respectivement aux axes Gy et Gx .

En théorie simplifiée dans la pratique et en tenant compte du fait que l'effort tranchant est généralement vertical, τ_x est négligé et τ_y est constante

à un niveau donné. On obtient donc la formule suivante appelée **Formule de JOURAVSKI** :

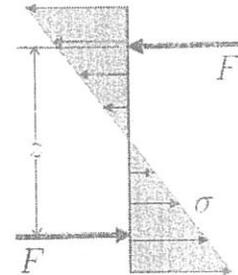
$$\tau_{y_{moy}} = \frac{V_y S_x^*}{I_x b(y)} \quad (6.6)$$

Soit τ_G la contrainte tangentielle moyenne au niveau de G , en appliquant la formule de JOURAVSKI on obtient :

$$\tau_G = \frac{V_y (S_x^*)_0}{I_x b_0} = \frac{V_y}{b_0 \frac{I_x}{(S_x^*)_0}} \quad (6.7)$$

F étant la résultante des forces de compression. On a :

$$F = \iint_{y>0} \sigma_z dS = \frac{M}{I_x} \iint_{y>0} y dS = \frac{M}{\frac{I_x}{(S_x^*)_0}} \quad (6.8)$$



D'où, on trouve :

$$M = F \frac{I_x}{(S_x^*)_0} = Fz \quad \rightarrow \quad z = \frac{I_x}{(S_x^*)_0} \quad (6.9)$$

où z est le bras de levier du couple $(F, -F)$.

On trouve donc :

$$\tau_G = \frac{V_y}{b_0 z} \quad (6.10)$$

Remarques :

☛ Dans l'expression de la contrainte $\tau(y) = \frac{V_y S_x^*}{I_x b(y)}$, on a S_x^* qui est maximal pour $y = 0$. De plus, $b(y)$ est en général minimal pour $y = 0$. On peut donc constater que $\tau(y)$ est maximal pour $y = 0$.

L'expression de $\tau_G = \frac{V_y}{b_0 z}$ donne donc en général la valeur maximale de τ .

☛ Pour les sections courantes, on a $z = \alpha h$ où h représente la hauteur totale de la section et on a en général $0,7 < \alpha < 0,9$.

La limitation des contraintes tangentielles passe donc par l'augmentation de la largeur b_0 ou la hauteur totale h .

☛ La section $b_0 z$ qui définit τ_G s'appelle la section réduite à l'effort tranchant.

6.2 Gauchissement des sections

D'après la formule de JOURAVSKI, la contrainte τ est fonction de y . L'application de la loi de HOOKE nous donne : $\tau = G\gamma$ avec $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$. On peut constater donc que les déformations angulaires γ sont également fonction de y .

D'où, la section est dans l'impossibilité de rester plane après déformation par effort tranchant et cela provoque le phénomène de gauchissement (voir figure 6.3).

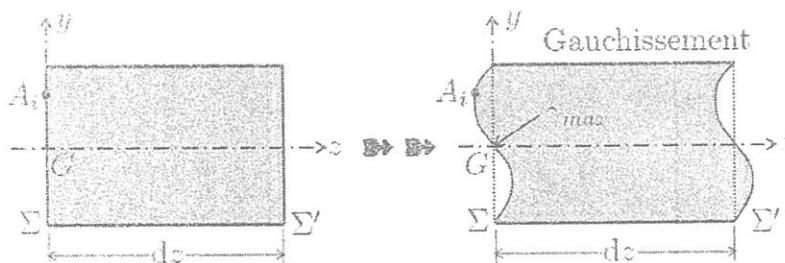


FIGURE 6.3 – Gauchissement par effort tranchant

6.3 Énergie potentielle de déformation due à un effort tranchant V

Conformément au cours de MMC, l'énergie potentielle de déformation par unité de volume est donnée par :

$$U = \frac{1}{2}\sigma\epsilon \quad (6.11)$$

On peut constater facilement que l'énergie potentielle de déformation par élément de volume dV est donnée par :

$$dU = \frac{1}{2}\sigma\epsilon dV \quad (6.12)$$

Dans le cas d'un cisaillement dû à un effort tranchant, on a : $\sigma = \tau_{zy}$, $\epsilon = \gamma_{zy}$ et $dV = dSdz$. D'où l'expression de l'énergie :

$$dU = \frac{1}{2}\tau_{zy}\gamma_{zy}dSdz = \frac{\tau_{zy}^2}{2G}dSdz \quad (6.13)$$

dans une section donnée, l'expression de l'énergie devient :

$$U = \frac{dz}{2G} \iint_{\Sigma} \tau_{zy}^2 dS \quad (6.14)$$

$$\tau_{zy} = \frac{V_y S_x^*}{I_x b(y)} \Rightarrow U = \frac{dz}{2G} \iint_{\Sigma} \frac{V_y^2 (S_x^*)^2}{I_x^2 b^2(y)} b(y) dy \quad (6.15)$$

Pour une poutre entière, l'expression prend la forme :

$$U = \int_0^L \frac{V_y^2}{2GA_1} dz \quad (6.16)$$

avec :

$$\frac{1}{A_1} = \frac{1}{I_x^2} \int_{(H)} \frac{(S_x^*)^2}{b(y)} dy \quad (6.17)$$

où A_1 est appelée **section réduite de l'énergie potentielle de déformation** due à un effort tranchant V_y . Il s'agit d'une caractéristique géométrique de la section.

✦ Exercice 1 :

Déterminer l'expression de la section réduite A_1 relative au calcul de l'énergie potentielle de déformation pour une section rectangulaire ($B \times H$) ?

⇒ Solution 1 :

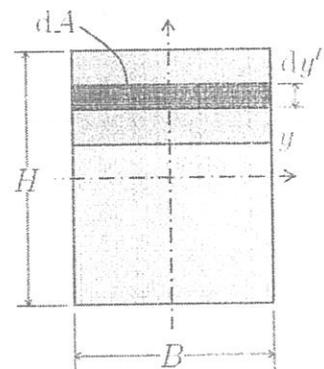
Le moment statique réduit est :

$$S_x^* = \int_y^{\frac{H}{2}} y' dA \quad (6.18)$$

$$= \int_y^{\frac{H}{2}} B y' dy' \quad (6.19)$$

$$= B \left[\frac{1}{2} y'^2 \right]_y^{\frac{H}{2}} \quad (6.20)$$

$$\Rightarrow S_x^* = \frac{B}{2} \left(\frac{H^2}{4} - y^2 \right) \quad (6.21)$$



$$\Rightarrow \int_{(H)} \frac{(S_x^*)^2}{b(y)} dy = \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \frac{B}{4} \left(\frac{H^2}{4} - y^2 \right)^2 dy \quad (6.22)$$

$$= \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \frac{B}{4} \left(\frac{H^4}{16} - \frac{H^2}{2} y^2 + y^4 \right) dy \quad (6.23)$$

$$= \frac{B}{4} \left[\frac{H^4}{16} y - \frac{H^2}{6} y^3 + \frac{y^5}{5} \right]_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \quad (6.24)$$

$$= \frac{B}{4} \left[\frac{H^5}{32} - \frac{H^5}{48} + \frac{H^5}{160} + \frac{H^5}{32} - \frac{H^5}{48} + \frac{H^5}{160} \right] \quad (6.25)$$

$$= \frac{BH^5}{4} \left[\frac{1}{16} - \frac{1}{24} + \frac{1}{80} \right] \quad (6.26)$$

$$= \frac{BH^5}{120} \quad (6.27)$$

sachant que $I_x = \frac{BH^3}{12}$, on obtient :

$$A_1 = \frac{I_x^2}{\int_{(H)} \frac{(S_x^*)^2}{b(y)} dy} = \frac{\frac{B^2 H^6}{144}}{\frac{BH^5}{120}} = \frac{120}{144} BH \quad (6.28)$$

$$\Rightarrow \boxed{A_1 = \frac{5}{6} BH \quad (\text{section rectangulaire})} \quad (6.29)$$

Fin exercice.

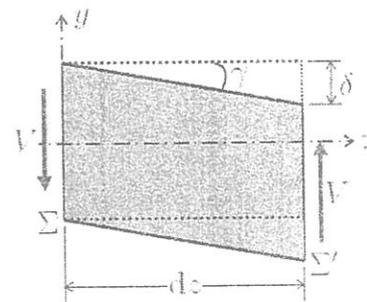
Pour une poutre sollicitée par des efforts normaux, des efforts tranchants et des moments fléchissants, l'expression de l'énergie potentielle de déformation est donc :

$$U = \int_0^L \left(\frac{N(z)^2}{2EA} + \frac{M(z)^2}{2EI} + \frac{V(z)^2}{2GA_1} \right) dz \quad (6.30)$$

6.3.1 Déformations dues à un effort tranchant

Soient deux sections d'une poutre Σ et Σ' distantes de dz et chargées par un effort tranchant V . Le déplacement relatif des deux sections peut être obtenu par le théorème de CASTIGLIANO :

$$\frac{\partial U}{\partial V} = \delta \quad (6.31)$$



l'énergie potentielle de déformation est exprimée par :

$$U = \frac{V^2 dz}{2GA_1} \rightarrow \frac{\partial U}{\partial V} = \frac{V dz}{GA_1} \quad (6.32)$$

géométriquement, on peut constater facilement qu'on a :

$$\delta = \tan \gamma dz \approx \gamma dz \quad (6.33)$$

en regroupant les expressions précédentes, on a :

$$\frac{\partial U}{\partial V} = \delta = \frac{V dz}{GA_1} = \gamma dz \quad (6.34)$$

on a donc au final :

$$\delta = \frac{V dz}{GA_1} \quad \text{et} \quad \gamma = \frac{V}{GA_1} \quad (6.35)$$

⇒ Exercice 2 :

Déterminer la déformation maximale d'une poutre bi-appuyée chargée uniformément par une densité q sur toute sa longueur L ?

La section droite de la poutre étant rectangulaire et de dimensions $(B \times H)$

⇒ Solution 2 :

Comme déjà montré, l'effort tranchant est maximal au niveau des appuis et a comme expression :

$$V_{\max} = \frac{qL}{2} \quad (6.36)$$

pour une section rectangulaire, on a démontré dans l'exercice 1 que :

$$A_1 = \frac{5}{6} BH \quad (6.37)$$

la déformation maximale vaut :

$$\gamma_{\max} = \frac{V_{\max}}{GA_1} = \frac{\frac{qL}{2}}{G \frac{5}{6} BH} \quad (6.38)$$

$$\rightarrow \gamma_{\max} = \frac{3}{5} \frac{qL}{GBH} \quad (6.39)$$

6.3.2 Comparaison des déplacements dus à la flexion et l'effort tranchant

On compare les déplacements générés par un effort tranchant et son moment fléchissant dans une poutre encadrée comme montré dans la figure (6.4).

Calcul des déplacements dus au moment fléchissant $M(z)$:

On considère la formule suivante (elle sera démontrée dans la suite de ce cours - Chap. : Calcul des déplacements) :

$$\frac{d^2V_1(z)}{dz^2} = \frac{M(z)}{EI} \quad (6.40)$$

$$M(z) = -P(L - z) \rightarrow \frac{d^2V_1(z)}{dz^2} = -\frac{P}{EI}(L - z) \quad (6.41)$$

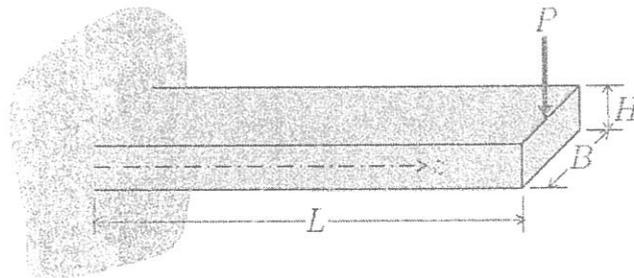


FIGURE 6.4 – Comparaison des déplacements - poutre encadrée

$$\rightarrow \frac{dV_1(z)}{dz} = -\frac{P}{EI} \left(C_1 + Lz - \frac{1}{2}z^2 \right) \quad (6.42)$$

$$\rightarrow V_1(z) = -\frac{P}{EI} \left(C_2 + C_1z + \frac{L}{2}z^2 - \frac{1}{6}z^3 \right) \quad (6.43)$$

en utilisant les conditions aux limites au niveau de l'encastrement, on obtient :

$$\frac{dV_1}{dz}(0) = 0 \rightarrow -\frac{P}{EI}C_1 = 0 \rightarrow C_1 = 0 \quad (6.44)$$

$$V_1(0) = 0 \rightarrow -\frac{P}{EI}C_2 = 0 \rightarrow C_2 = 0 \quad (6.45)$$

$$\Rightarrow V_1(z) = -\frac{P}{EI} \left(\frac{L}{2}z^2 - \frac{1}{6}z^3 \right) \quad (6.46)$$

le déplacement maximal est obtenu pour $z = L$:

$$f_1 = -\frac{PL^3}{3EI} \quad (6.47)$$

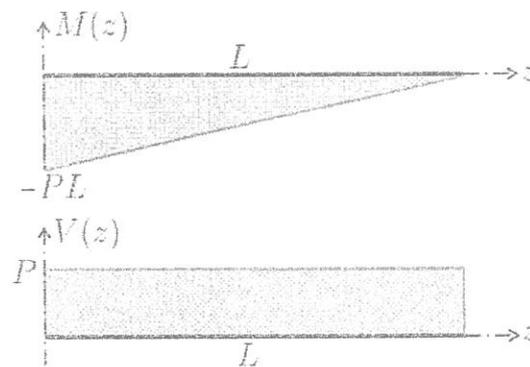


FIGURE 6.5 – DMF et DET de la poutre encastrée

Calcul des déplacements dus à l'effort tranchant $V(z)$:

A une position z donnée, le déplacement généré par l'effort tranchant est :

$$v_2 = -\frac{Pz}{GA_1} \quad (6.48)$$

pour l'extrémité libre de la poutre, on a :

$$f_2 = -\frac{PL}{GA_1} \quad (6.49)$$

Comparons les deux déplacements générés par le moment fléchissant et l'effort tranchant :

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{-\frac{PL^3}{3EI}}{-\frac{PL}{GA_1}} = \frac{L^2 GA_1}{3EI} = \frac{L^2 \frac{E}{2(1+\nu)} \frac{5}{6} BH}{3EI} = \frac{5}{36} \frac{L^2 BH}{(1+\nu)I} \quad (6.50)$$

$$\Rightarrow \frac{f_1}{f_2} = \frac{5}{36} \frac{L^2 BH}{(1+\nu) \frac{BH^3}{12}} \quad (6.51)$$

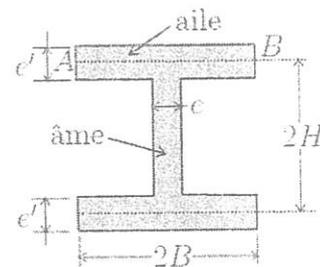
$$\Rightarrow \frac{f_1}{f_2} = \frac{5}{3(1+\nu)} \left(\frac{L}{H} \right)^2 \quad (6.52)$$

Ce résultat montre qu'en général $\frac{f_1}{f_2}$ est élevé et que les déplacements dus à l'effort tranchant V peuvent être négligés devant ceux dus au moment fléchissant M .

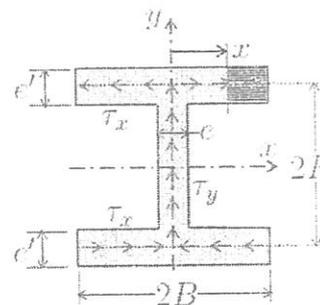
6.4 Cas particulier des sections composées de profilés minces

6.4.1 Cas d'un profilé ouvert à paroi mince

Considérons une section en I à profilés minces. Dans une section AB de l'aile, τ_y s'annule sur les deux faces de l'aile et varie sur une faible épaisseur. On peut donc supposer que τ_x reste seule alors que $\tau_y = 0$. De la même façon pour l'âme, τ_x est négligée et τ_y reste seule.



On considère ici S_x^* de la partie hachurée par rapport à Gx . La formule de JOURAVSKI $\tau = \frac{VS_x^*}{I_x e}$ reste valable dans ce cas.



On a donc pour l'aile :

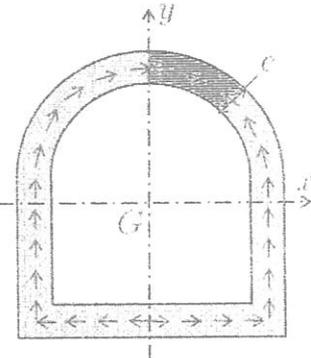
$$\tau_x = \frac{V_y(B-x)e'H}{I_x e'} = \frac{V_y H}{I_x} (B-x) \quad (6.53)$$

6.4.2 Cas d'un profilé mince de forme tubulaire admettant Gy comme axe de symétrie

Pour la partie hachurée entre coupure et l'axe Gy , on a :

$$\tau_m = \frac{V_y S_x^*}{I_x e_m} \quad (6.54)$$

On signale que le fait de couper de part et d'autre par rapport à l'axe y , d'une façon symétrique, et de prendre la surface entre les deux coupures nous donne le même résultat que le premier cas.



Cette forme est répandue en GC pour les ponts de type "Dalots voûtés".

Cas d'un pont caisson (pont voussoir) : τ est tangente à la direction de l'axe moyen du profilé et est donnée par :

$$\tau = \frac{V_y S_x^*}{2e I_x} \quad (6.55)$$



Pour le calcul de l'énergie potentielle de déformation, la section réduite relative à l'énergie est donnée par :

$$A_1 = \frac{I_x^2}{\int_{(\Gamma)} \frac{(S_x^*)^2}{e} dl} \quad (6.56)$$

où Γ est le contour moyen du profilé fermé.

⇒ Exercice 3 :

Considérons une section annulaire circulaire comme montré dans la figure (6.6).

1. Déterminer les expressions de la contrainte τ dans le profilé et la contrainte maximale τ_{max} ?
2. Déterminer l'expression de la section réduite de l'énergie A_1 ?

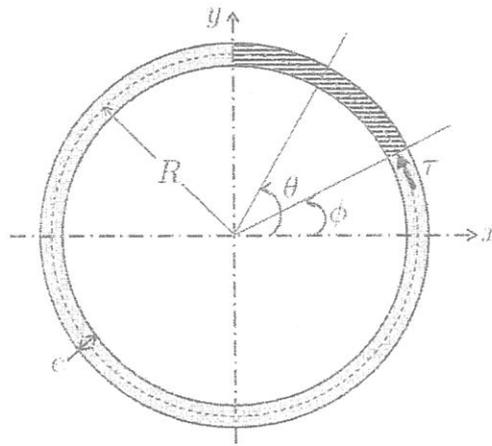


FIGURE 6.6 – Schéma de l'exercice 3

On suppose que l'aire de la section est $A = 2\pi Re$ et le moment d'inertie de flexion est $I_x = \pi R^3 e$.

⇒ Solution 3 :

1. Détermination de l'expression du moment d'inertie quadratique :

$$I_x = \iint_A y^2 dA = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} R^2 \sin^2 \theta R e d\theta = 4R^3 e \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta d\theta \quad (6.57)$$

$$\Rightarrow I_x = 4R^3 e \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos(2\theta)}{2} d\theta = 2R^3 e \left[\theta - \frac{1}{2} \sin(2\theta) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2R^3 e \cdot \frac{\pi}{2} \quad (6.58)$$

$$\rightarrow I_x = \pi R^3 e \quad (6.59)$$

le moment statique réduit de la section hachurée est :

$$S_x^* = \iint y dA = \int_0^{\frac{\pi}{2}} R \sin \theta e R d\theta = eR^2 [-\cos \theta]_0^{\frac{\pi}{2}} = eR^2 \cos \phi \quad (6.60)$$

$$\Rightarrow \tau = \frac{V_y S_x^*}{I_x e} = \frac{V_y e R^2 \cos \phi}{\pi R^3 e e} = \frac{V_y \cos \phi}{\pi R e} \quad (6.61)$$

$$\rightarrow \tau = \frac{2V_y \cos \phi}{A} \quad (6.62)$$

La contrainte maximale correspond à $\cos \phi = 1$, d'où :

$$\tau_{\max} = \frac{2V_y}{A} \quad (6.63)$$

2. on a :

$$\int_{(\Gamma)} \frac{(S_x^*)^2}{e} dl = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^2 R^4 \cos^2 \phi}{e} R d\phi \quad (6.64)$$

$$= 4eR^5 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \phi d\phi \quad (6.65)$$

$$= 4eR^5 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos(2\phi)}{2} d\phi \quad (6.66)$$

$$= 2eR^5 \left[\phi + \frac{1}{2} \sin(2\phi) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \quad (6.67)$$

$$= \pi R^5 e \quad (6.68)$$

on obtient donc :

$$A_1 = \frac{I_x^2}{\int_{(\Gamma)} \frac{(S_x^*)^2}{e} dl} = \frac{I_x^2}{\pi R^5 e} = \frac{\pi^2 R^6 e^2}{\pi R^5 e} \quad (6.69)$$

donc au final :

$$A_1 = \pi R e = \frac{A}{2} \quad (6.70)$$

6.4.3 Cas d'un profilé mince qui n'a pas Gy comme axe de symétrie

On a à déterminer en plus dans cette partie le centre de torsion !

Puisqu'on travaille avec l'hypothèse d'un profilé mince, on peut adopter les hypothèses suivantes :

$$\begin{cases} e' \ll h & \text{et } e \ll b \\ s' = be' & \text{et } s = 2he \end{cases} \quad (6.71)$$

En appliquant le théorème de JOURAVSKI au niveau de l'âme et l'aile du profilé (figure 6.7), on trouve :

$$\tau_{y(\text{âme})} = \frac{V_y S_x^*}{I_x e} = \frac{V_y}{I_x e} \left(s' h + \frac{e}{2} (h^2 - y^2) \right) \quad (6.72)$$

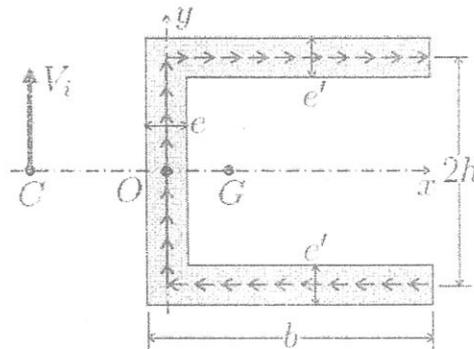


FIGURE 6.7 – Profilé en U soumis à un effort tranchant.

$$\tau_{x(\text{aile})} = \frac{V_y}{I_x e'} (b-x)h = \frac{V_y}{I_x} h(b-x) \quad (6.73)$$

L'équilibre de la section nous permet d'écrire les équations d'équilibre comme suit :

$$\sum F_{/x} = 0 \quad (6.74)$$

cette équation est naturellement vérifiée (figure 6.7).

$$\sum F_{/y} = V_y \Rightarrow \int_{(\text{âme})} \tau_y e dy = \frac{V_y}{I_x} \frac{h^2}{3} (6S' + S) = V_y \quad (6.75)$$

Cette équation est naturellement vérifiée puisque $I_x = \frac{h^2}{3} (6S' + S)$.

Il reste à vérifier l'équation d'équilibre des moments $\sum M_{/o} = 0$, pour cela il faut que la résultante des forces de cisaillement V_i passe par le centre de torsion tel que : $OC = \frac{M}{V_i}$

On a :

$$\sum M_{/o} = 2 \int_0^b \tau_x e' h dx = \frac{e' h^2 b^2}{I_x} V_y \quad (6.76)$$

on obtient donc la position du centre de pression comme suit :

$$OC = \frac{e' h^2 b^2}{I_x} \quad (6.77)$$

6.5 Cisaillement des boulons dans une poutre clouée

Considérons une poutre en T composées de deux planches collées ensemble dans un premier temps, puis clouée dans un deuxième temps.

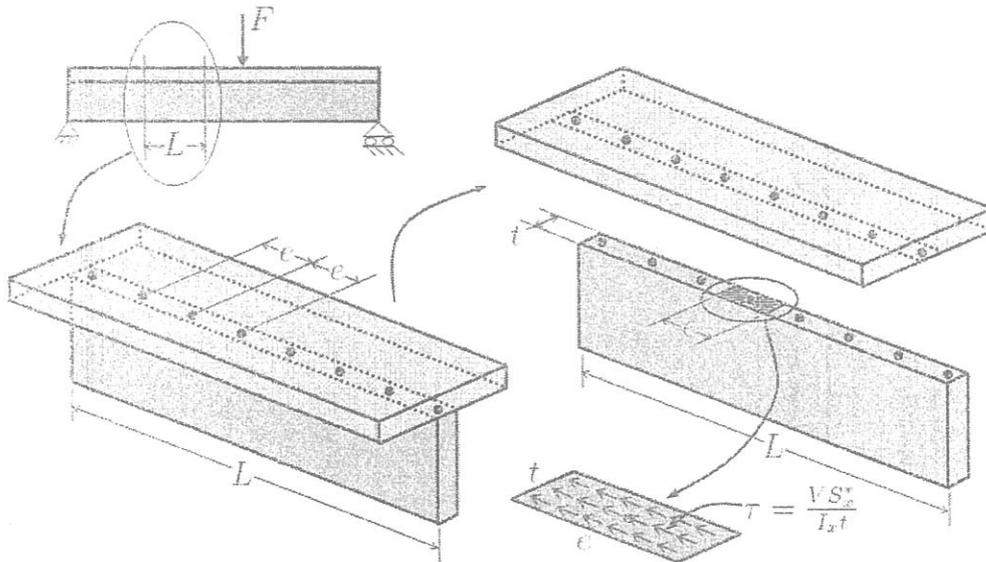


FIGURE 6.8 – Poutre en T clouée

La force de cisaillement à laquelle la section du clou doit résister est :

$$F_c = \tau t e = \frac{V S_x^*}{I_x t} t e = \frac{V S_x^*}{I_x} e = q e \quad (6.78)$$

où $q = \frac{V S_x^*}{I_x}$ est le flux de cisaillement.

Connaissant la résistance au cisaillement d'une section de clou $F_r = \frac{1}{4} \tau_0 \pi D^2$, τ_0 étant la limite élastique en cisaillement du matériau du boulon, on doit satisfaire la condition suivante :

$$F_r \geq F_c = q e \quad (6.79)$$

donc l'espacement des clous est : $e \leq \frac{F_r}{q}$

s'il y a deux rangées de clous, on doit avoir : $e \leq \frac{2F_r}{q}$
de même si le clou est en double cisaillement.

Examinons maintenant une poutre en T formée de deux plaques d'acier et de deux cornières (figure 6.9).

On a dans ce cas :

$$e_1 \leq \frac{2F_r}{q_1} \quad \text{avec} \quad q_1 = \frac{V S_{x1}^*}{I_x} \quad \text{et} \quad S_{x1}^* = A_1 \bar{y}_1 \quad (6.80)$$

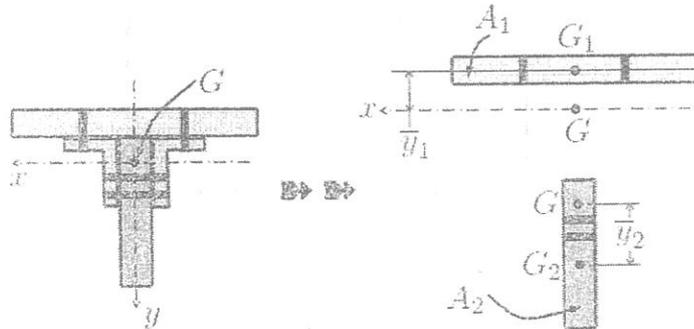


FIGURE 6.9 - aaa

$$e_2 \leq \frac{4F_r}{q_2} \quad \text{avec} \quad q_2 = \frac{VS_{x2}^*}{I_x} \quad \text{et} \quad S_{x2}^* = A_2 \bar{y}_2 \quad (6.81)$$

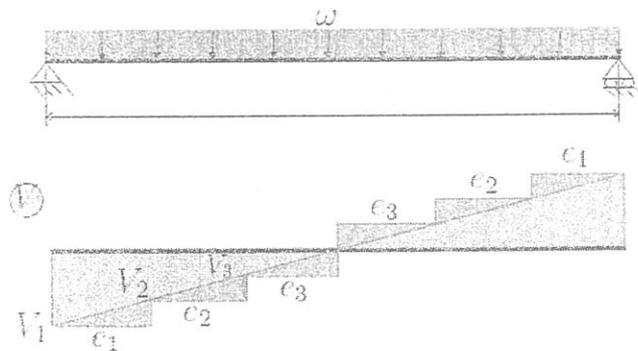


FIGURE 6.10 - Poutre en T connectée avec boulons et cornières