

Chapitre 5

Calcul de la flexion des poutres

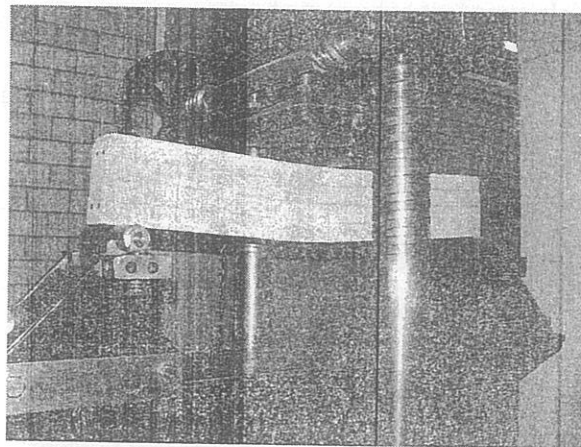


FIGURE 5.1 – Essai de flexion 3 points d'une poutre en Béton Armé

5.1 Introduction

Dans le domaine de la mécanique des structures et du génie civil, on fait recours en général à des éléments structurales sous forme de poutres prismatiques, en général droites et ayant un axe de symétrie.

Un élément d'un système structural est appelé poutre si ses dimensions transversales sont sensiblement petites par rapport à sa longueur (au moins $\leq \frac{L}{10}$) et s'il est soumis à des chargements extérieurs produisant des efforts

tranchants et des moments fléchissants. Une poutre donnée peut être également sollicitée par des efforts normaux et des moments de torsion.

On démontrera dans ce chapitre les formulations permettant de calculer les contraintes et les déformations dues à l'application d'un effort tranchant V ou un moment de flexion M .

Les cas de poutres les plus élémentaires seront traités à savoir des poutres isostatiques à sections circulaires, rectangulaires, en T, en I ou en caisson. Les chargements à prendre en compte sont des forces et des couples concentrés, des charges réparties uniformément ou triangulairement.

Donc les objectifs principaux du chapitre sont :

- Les diagrammes des efforts tranchants (DET) et des moments fléchissants (DMF). Cela nous permettra de déterminer les sollicitations maximales et les sections les plus sollicitées ;
- Les contraintes créées par un effort tranchant V et un moment fléchissant M ;
- Les déformations dues à un moment fléchissant M .

5.2 Diagrammes des efforts tranchants (DET) et des moments fléchissants (DMF)

5.2.1 Méthode des sections

Les efforts internes, appliqués au centroïde d'une section, sont calculés à l'aide de la méthode des sections qui consiste à couper la poutre en deux parties distinctes, à rechercher les réactions d'appuis d'une des deux parties et à appliquer les équations d'équilibre.

Afin d'obtenir les valeurs de V et M en tout point de la poutre, il faudrait alors faire une multitude de coupes. Le même résultat est obtenu en faisant une coupe à une distance x d'une extrémité et en faisant varier cette distance x .

Comme les équations d'équilibre seront différentes à chaque qu'une nouvelle force interviendra, on fera une coupe entre chaque deux forces ou couples concentrés successifs et à travers chaque force répartie différente. Cette procédure est explicitée dans l'exercice 1 suivant.

⇒ Exercice 1 :

Tracer le DET et le DMF de la poutre de la figure (5.2) ?

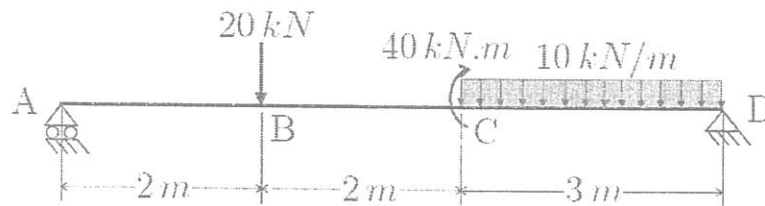


FIGURE 5.2 – Exemple d'application

⇒ Solution 1 :

On définit trois coupes comme montré dans la figure (5.3). On étudie dans la suite l'équilibre des tronçons A - 1, B - 2 et C - 3.

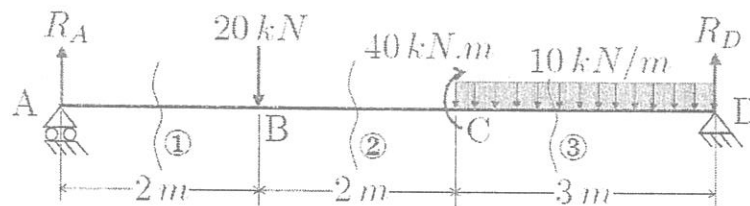


FIGURE 5.3 – Exemple d'application

On commence d'abord par la détermination des réactions d'appui du système.

$$\sum M/D = -7R_A + 20 \cdot 5 - 40 + 30 \cdot 1,5 = 0 \quad (5.1)$$

$$\rightarrow R_A = 15 \text{ kN} \quad (5.2)$$

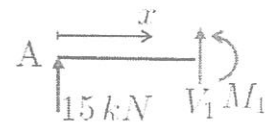
$$\sum F/y = 15 - 20 - 30 + R_D = 0 \quad (5.3)$$

$$\rightarrow R_D = 35 \text{ kN} \quad (5.4)$$

Équilibre de l'élément AB :

$$\sum F_{/y} = 15 + V_1 = 0 \rightarrow V_1 = -15 \text{ kN} \quad (5.5)$$

$$\sum M_{/1} = M_1 - 15x = 0 \rightarrow M_1 = 15x \quad (5.6)$$



pour $x = 0$: $M_A = 0 \text{ kN.m}$ et $V_A = -15 \text{ kN}$

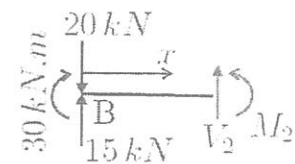
pour $x = 2 \text{ m}$: $M_B = 30 \text{ kN.m}$ et $V_B = -15 \text{ kN}$

Équilibre de l'élément BC :

$$\sum F_{/y} = -20 + 15 + V_2 = 0 \rightarrow V_2 = 5 \text{ kN} \quad (5.7)$$

$$\sum M_{/2} = 20x - 15x - 30 + M_2 = 0 \quad (5.8)$$

$$\rightarrow M_2 = -5x + 30 \quad (5.9)$$



pour $x = 0$: $M_B = 30 \text{ kN.m}$ et $V_B = 5 \text{ kN}$

pour $x = 2 \text{ m}$: $M_C = 20 \text{ kN.m}$ et $V_C = 5 \text{ kN}$

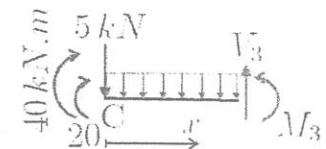
Équilibre de l'élément CD :

$$\sum F_{/y} = -5 - 10x + V_3 = 0 \quad (5.10)$$

$$\rightarrow V_3 = 10x + 5 \text{ kN} \quad (5.11)$$

$$\sum M_{/3} = 5x + 5x^2 - 20 - 40 + M_3 = 0 \quad (5.12)$$

$$\rightarrow M_3 = -5x^2 - 5x + 60 \quad (5.13)$$



pour $x = 0$: $M_C = 60 \text{ kN.m}$ et $V_C = 5 \text{ kN}$

pour $x = 3 \text{ m}$: $M_D = 0 \text{ kN.m}$ et $V_D = 35 \text{ kN}$

En utilisant les expressions obtenues des moments fléchissants et des efforts tranchants, on peut tracer le DMF et le DET comme présenté dans la figure (5.4).

Fin exercice.

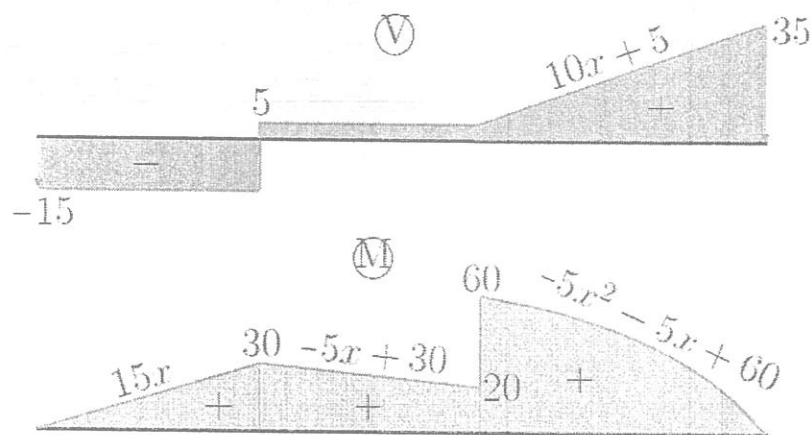


FIGURE 5.4 – DET et DMF de l'exemple d'illustration

En analysant le DET et le DMF de l'exemple précédent, on peut vérifier les règles suivantes dans lesquelles ces diagrammes doivent :

- Montrer toutes les valeurs caractéristiques de V et M (valeurs nulles, optimums, sauts ...);
- Vérifier les équations d'équilibre en chaque point de la poutre;

Ainsi, comme V et M sont des efforts internes qui équilibrent les forces externes en chaque point, on a :

- L'effort tranchant à l'origine est l'inverse de la force appliquée en ce point (R_A dans notre cas);
- Il y'a un saut dans le DET ou le DMF égal et opposé à la force ou au couple concentré appliqué;
- Le DET doit être fermé avec une force égale et opposée à la force appliquée à l'extrémité de la poutre (R_D dans notre cas);
- Les moments sont nuls aux appuis rotulés d'extrémités à moins qu'il y ait un couple concentré appliqué;
- Le DET est la dérivée du DMF (avec un signe opposé);
- Le DMF est l'intégrale du DET (avec un signe opposé).

La méthode des sections est basée sur les équations d'équilibre, mais en pratique elle devient complexe lorsque la structure comporte plusieurs

charges. On a intérêt dans ce cas à utiliser une autre méthode plus pratique que la méthode des sections. La méthode d'intégration répond à ce besoin et elle est présentée dans la partie suivante.

5.2.2 Méthode d'intégration

Cette méthode sera développée en cherchant, dans une structure donnée, les relations entre la charge répartie $p(x)$, l'effort tranchant $V(x)$ et le moment fléchissant $M(x)$.

Considérant une poutre chargée par répartition de charge quelconque (figure 5.5). En isolant une longueur dx de cette poutre, on peut écrire :

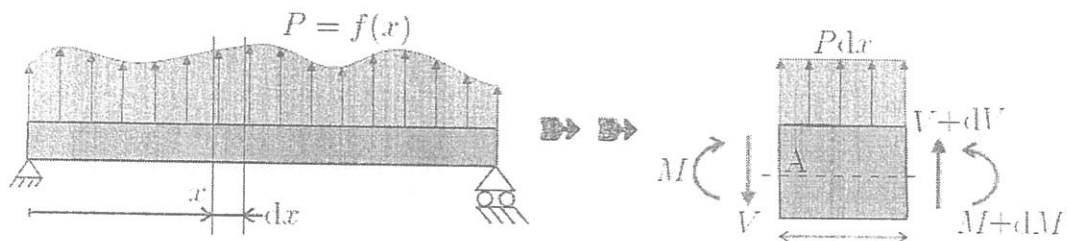


FIGURE 5.5 – Poutre chargée aléatoirement

$$\sum F_{/y} = -V + p dx + (V + dV) = 0 \quad (5.14)$$

$$\rightarrow \boxed{p = -\frac{dV}{dx}} \quad (5.15)$$

$$\sum M_{/A} = -M + (M + dM) + (V + dV)dx + p dx \cdot \frac{dx}{2} = 0 \quad (5.16)$$

$$\rightarrow dM + V dx + dV dx + p \frac{dx^2}{2} = 0 \quad (5.17)$$

en négligeant les termes de second ordre, à savoir $dV dx = p \frac{dx^2}{2} = 0$, il vient :

$$dM + V dx = 0 \quad (5.18)$$

$$\rightarrow \boxed{V = -\frac{dM}{dx} \quad \text{et} \quad p = \frac{d^2M}{dx^2}} \quad (5.19)$$

A une distance x de l'appui, on a donc :

$$V(x) = \int_0^x dV = \left[- \int_0^x p dx \right] + V_0 \quad (5.20)$$

$$M(x) = \int_0^x dM = \left[- \int_0^x V dx \right] + M_0 \quad (5.21)$$

⇒ Exercice 2 :

Déterminer les expressions de V et M pour les trois charges réparties de la figure (5.6) ?

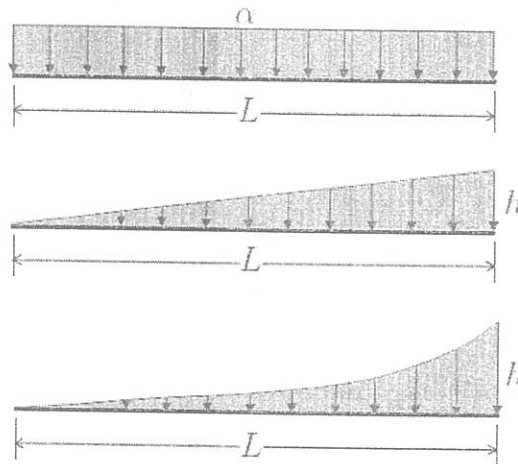


FIGURE 5.6 – Chargements répartis sur une poutre droite

⇒ Solution 2 :

Charge uniformément répartie vers le bas :

$$p(x) = -\alpha \quad (5.22)$$

$$\rightarrow V(x) = \alpha x + V_0 \quad (5.23)$$

$$\rightarrow M(x) = -\frac{1}{2}\alpha x^2 - V_0 x + M_0 \quad (5.24)$$

Charge triangulaire vers le bas :

$$p(x) = -\alpha x = -\frac{h}{L}x \quad (5.25)$$

$$\rightarrow V(x) = \alpha \frac{x^2}{2} + V_0 \quad (5.26)$$

$$\rightarrow M(x) = -\frac{\alpha}{6}x^3 - V_0x + M_0 \quad (5.27)$$

Charge parabolique vers le bas :

$$p(x) = ax^2 + bx + c \quad (5.28)$$

on a :

$$p(0) = c = 0 \rightarrow c = 0 \quad (5.29)$$

$$p'(0) = b = 0 \rightarrow b = 0 \quad (5.30)$$

$$p(L) = aL^2 = h \rightarrow a = \frac{h}{L^2} \quad (5.31)$$

en tenant compte de la direction de la charge on obtient :

$$p(x) = -\alpha x^2 = -\frac{h}{L^2}x^2 \quad (5.32)$$

$$\rightarrow V(x) = \frac{\alpha}{3}x^3 + V_0 \quad (5.33)$$

$$\rightarrow M(x) = -\frac{\alpha}{12}x^4 - V_0x + M_0 \quad (5.34)$$

Fin exercice.

D'une manière générale, on peut déduire ce qui suit :

- Connaissant les charges sur une poutre, on peut calculer le DET et le DMF tout le long de la poutre en faisant deux fois l'intégrale de la charge ;
- Inversement, connaissant le DMF, on peut retrouver les charges sur la poutre en dérivant 2 fois le moment fléchissant ;
- Le DET et le DMF sont dépendants l'un de l'autre ;
- Le DET et le DMF représentent d'une façon réelle les efforts en tout point d'une poutre ;
- Le moment fléchissant est optimal lorsque l'effort tranchant est nul ;
- Pour les expressions de $V(x)$ et $M(x)$ dont le terme de plus haut degré est en x^2 , la concavité des courbes est vers les y positifs si le terme en x^2 est positif (et inversement lorsque le terme en x^2 est négatif) ;
- En RDM, il est primordial de connaître la forme de la déformée d'une poutre en flexion. Lorsque les moments sont positifs, la fibre inférieure est tendue. Par contre, lorsque les moments sont négatifs, la fibre supérieure est tendue (voir figure 5.7).

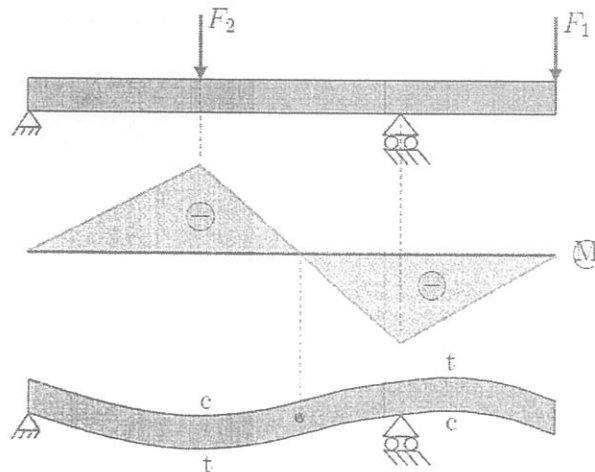


FIGURE 5.7 – Convention des signes en RDM

- On dessine souvent le diagramme des moments positifs vers le bas par analogie avec le sens de la déformée. Il faudra alors indiquer le signe + vers le bas (voir figure 5.8) ;

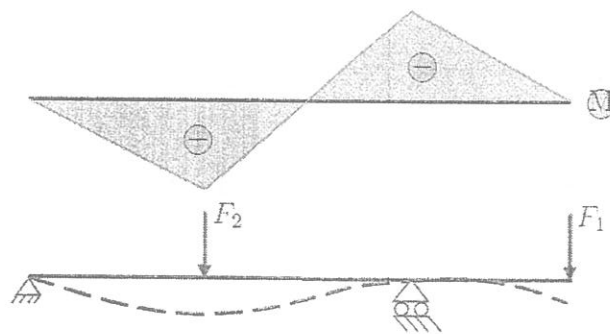


FIGURE 5.8 – Schématisation de la convention des signes en RDM

- Dans les expressions $p = -\frac{dV}{dx}$ et $V = -\frac{dM}{dx}$, la convention de signes est la suivante : M est positif dans le sens trigonométrique et V est positif suivant l'axe y positif sur une face positive (c-à-d qui a une normale dans le sens de $x > 0$).

Dans certaines références de la RDM, on trouvera une autre convention de signes (voir figure 5.9).

On a alors : $p = +\frac{dV}{dx}$ et $V = +\frac{dM}{dx}$.

Seul le signe de l'effort tranchant est inversé par rapport à la conven-

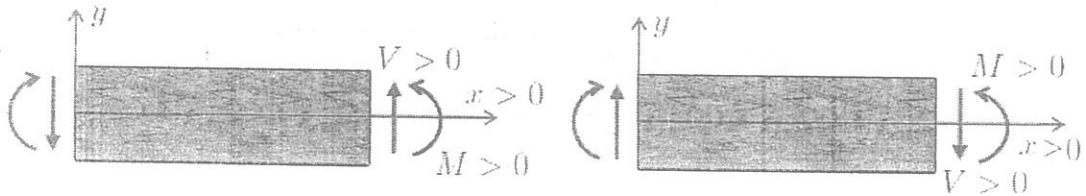


FIGURE 5.9 – Les conventions de signes utilisées en RDM

tion de signe précédente.

⇒ Exercice 3 :

Reprenons le schéma de l'exercice 1.

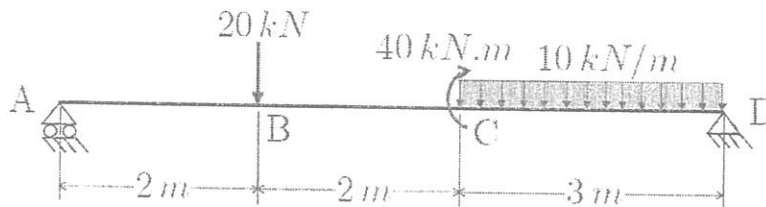


FIGURE 5.10 – Exemple d'application

Déterminer le DET et le DMF en utilisant la méthode d'intégration ?

⇒ Solution 3 :

Tronçon AB ($0 \leq x \leq 2$) :

$$p(x) = 0 \quad (5.35)$$

$$\rightarrow V(x) = - \int p dx + V_0 = -15 \quad (5.36)$$

$$\rightarrow M(x) = - \int V dx + M_0 = 15x \quad (5.37)$$

on a donc :

$$V_A = V(0) = -15 \text{ kN} \text{ et } V_B = V(2) = -15 \text{ kN}$$

$$M_A = M(0) = 0 \text{ kN.m} \text{ et } M_B = M(2) = 30 \text{ kN.m}$$

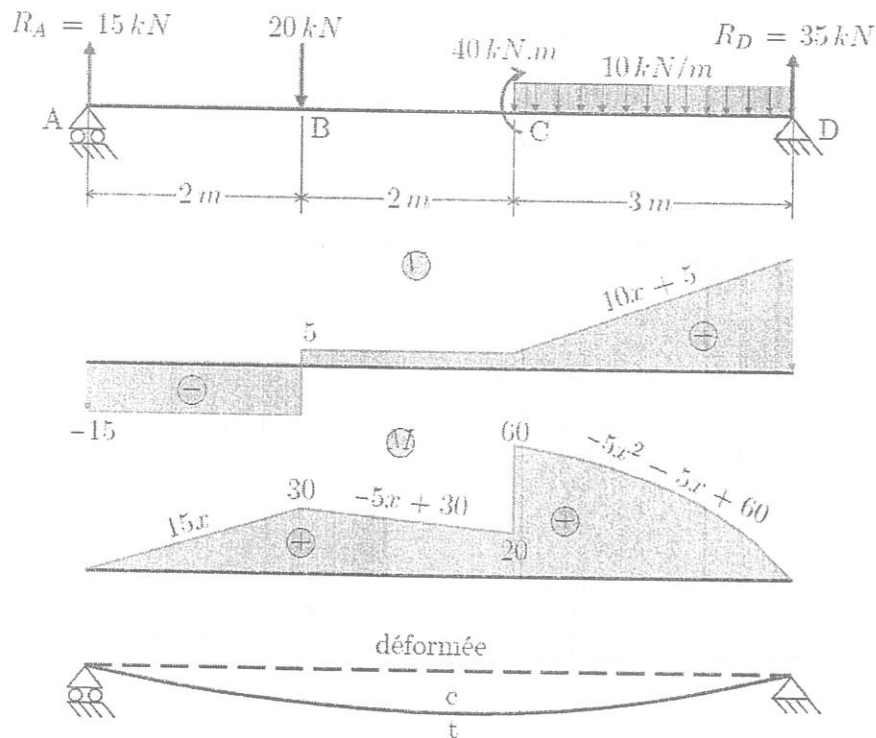


FIGURE 5.11 - Diagrammes des efforts - Exercice 3

Tronçon BC ($0 \leq x \leq 2$) :

$$p(x) = 0 \quad (5.38)$$

$$\rightarrow V(x) = - \int p dx + V_0 = 5 \quad (5.39)$$

$$\rightarrow M(x) = - \int V dx + M_0 = -5x + 30 \quad (5.40)$$

on a donc :

$$V_B = V(0) = 5 \text{ kN} \text{ et } V_C = V(2) = 5 \text{ kN}$$

$$M_B = M(0) = 30 \text{ kN.m} \text{ et } M_C = M(2) = 20 \text{ kN.m}$$

Tronçon CD ($0 \leq x \leq 3$) :

$$p(x) = -10 \quad (5.41)$$

$$\rightarrow V(x) = - \int p dx + V_0 = 10x + 5 \quad (5.42)$$

$$\rightarrow M(x) = - \int V dx + M_0 = -5x^2 - 5x + 60 \quad (5.43)$$

on a donc :

$$V_C = V(0) = 5 \text{ kN} \text{ et } V_D = V(3) = 35 \text{ kN}$$

$$M_C = M(0) = 60 \text{ kN.m} \text{ et } M_D = M(3) = 0 \text{ kN.m}$$

☛ Exercice 4 :

Déterminer d'une façon graphique le DET et le DMF de la poutre présentée dans la figure (5.12) ?

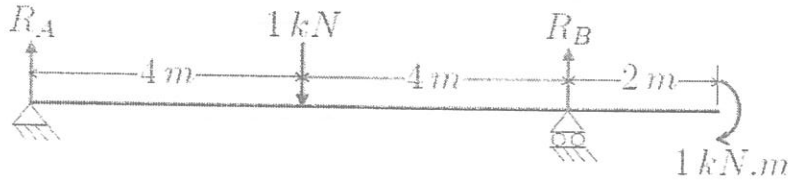


FIGURE 5.12 – Schéma de l'exercice 4

☛ Solution 4 :

Détermination des réactions d'appuis :

$$\sum M_{/A} = 8R_B - 4 \times 1 - 1 = 0 \quad (5.44)$$

$$\rightarrow R_B = \frac{5}{8} = 0,625 \text{ kN} \quad (5.45)$$

$$\sum F_{/y} = R_A - 1 + 0,625 = 0 \quad (5.46)$$

$$\rightarrow R_A = \frac{3}{8} = 0,375 \text{ kN} \quad (5.47)$$

Lorsque les charges sont simples, le DET et le DMF doivent être construits sans aucun calcul, en suivant les règles déjà citées auparavant.

Les diagrammes des efforts sont présentés dans la figure (5.13).

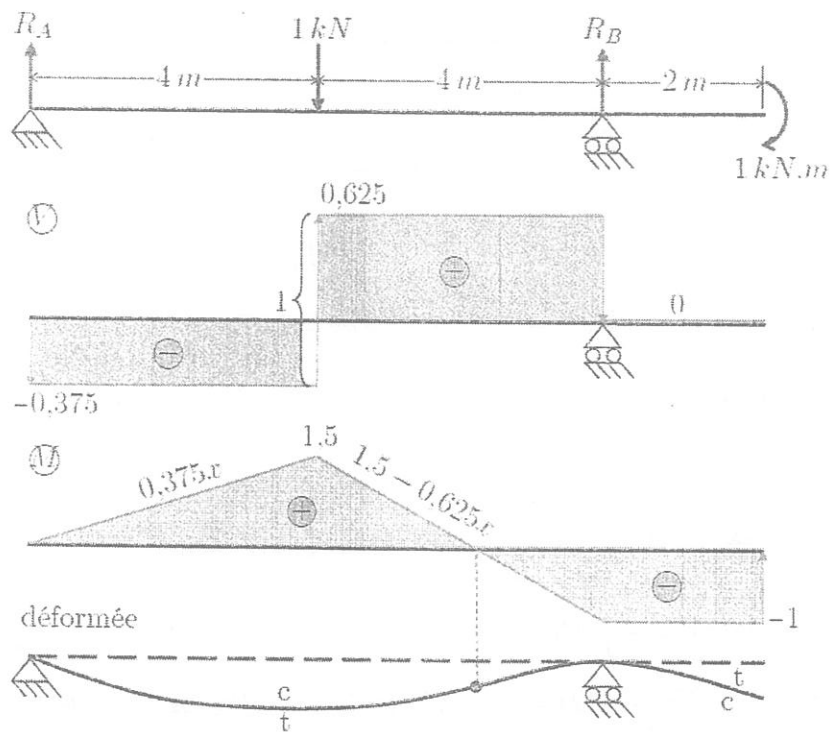


FIGURE 5.13 – Diagrammes des efforts - Exercice 4

⇔ Exercice 5 :

Considérons la poutre de la figure (5.14).

Déterminer le DET et le DMF de la poutre ?

⇒ Solution 5 :

Tronçon AC ($0 \leq x \leq 3$) :

$$p(x) = 0 \quad (5.48)$$

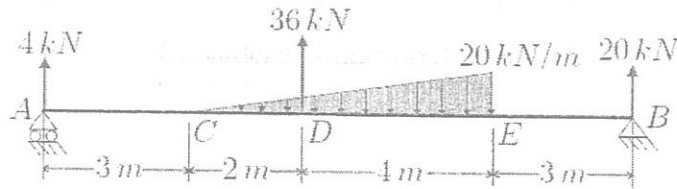


FIGURE 5.14 – Schéma de l'exercice 5

$$\rightarrow V(x) = - \int p dx + V_A = -4 \quad (5.49)$$

$$\rightarrow M(x) = - \int V dx + M_A = 4x \quad (5.50)$$

pour $x = 3 m$ on a : $V_C = V(3) = -4 kN$ et $M_C = M(3) = 12 kN.m$

Tronçon CD ($0 \leq x \leq 2$) :

$$p(x) = -3,33x \quad (5.51)$$

$$\rightarrow V(x) = - \int p dx + V_C = 1,66x^2 - 4 \quad (5.52)$$

$$\rightarrow M(x) = - \int V dx + M_C = -0,55x^3 + 4x + 12 \quad (5.53)$$

pour $x = 2 m$ on a : $V_D = V(2) = 2,66 kN$ et $M_D = M(2) = 15,55 kN.m$
on a $V = 0$ pour $x = 1,55 m$, donc : $M_{\max} = M(1,55) = 16,15 kN.m$

Tronçon DE ($0 \leq x \leq 4$) :

$$p(x) = -3,33x - 6,66 \quad (5.54)$$

$$\rightarrow V(x) = - \int p dx + V_D = - \int (-3,33x - 6,66) dx + (2,66 - 36) \quad (5.55)$$

$$\rightarrow V(x) = 1,66x^2 + 6,66x - 33,33 \quad (5.56)$$

$$\rightarrow M(x) = - \int V dx + M_D = -0,55x^3 - 3,33x^2 + 33,33x + 15,55 \quad (5.57)$$

pour $x = 4 m$ on a : $V_E = V(4) = 20 kN$ et $M_E = M(4) = 60 kN.m$
on a $V = 0$ pour $x = 2,9 m$, donc : $M_{\max} = M(2,9) = 70,7 kN.m$

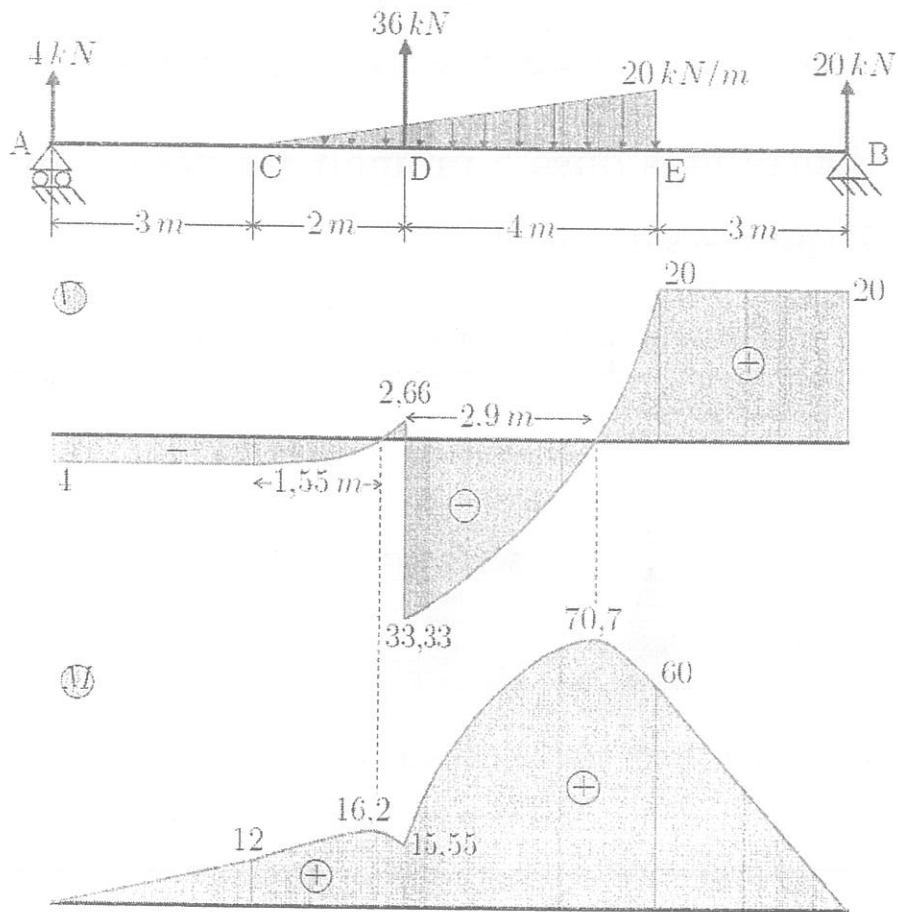


FIGURE 5.15 – Diagrammes des efforts - Exercice 5

Tronçon EB ($0 \leq x \leq 3$) :

$$p(x) = 0 \quad (5.58)$$

$$\rightarrow V(x) = - \int p dx + V_E = 20 \quad (5.59)$$

$$\rightarrow M(x) = - \int V dx + M_E = -20x + 60 \quad (5.60)$$

pour $x = 3 \text{ m}$ on a : $V_B = V(3) = 20 \text{ kN}$ et $M_B = M(3) = 0 \text{ kN.m}$

5.3 Contraintes dues à un moment fléchissant

5.3.1 Hypothèses de calcul

On se limitera au calcul des contraintes de flexion dans les poutres dont la section a au moins un axe de symétrie et pour lesquelles les moments fléchissants agissent autour des axes perpendiculaires à cet axe de symétrie (Exemples dans la figure 5.16).

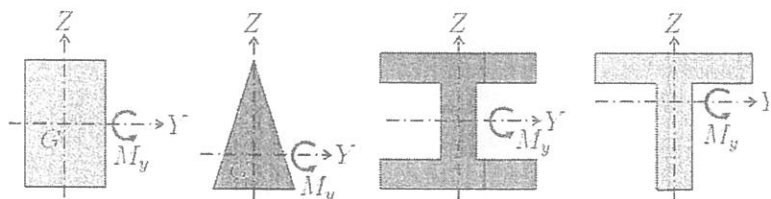


FIGURE 5.16 – Exemples de sections de poutres possédant au moins un axe de symétrie

Les hypothèses de calcul sont les suivantes :

- Les poutres sont rectilignes ;
- Les sections ont au moins un axe de symétrie ;
- Le moment de flexion agit dans le plan de symétrie ;
- Les déformations sont petites (comportement élastique) ;
- Les sections transversales planes et perpendiculaires à l'axe moyen restent planes et perpendiculaires à l'axe moyen après déformation (hypothèse de NAVIER-BERNOULLI).

5.3.2 Equation de la flexion

Considérons une poutre soumise à une flexion simple dont on isole une partie de longueur dx après déformation (figure 5.17).

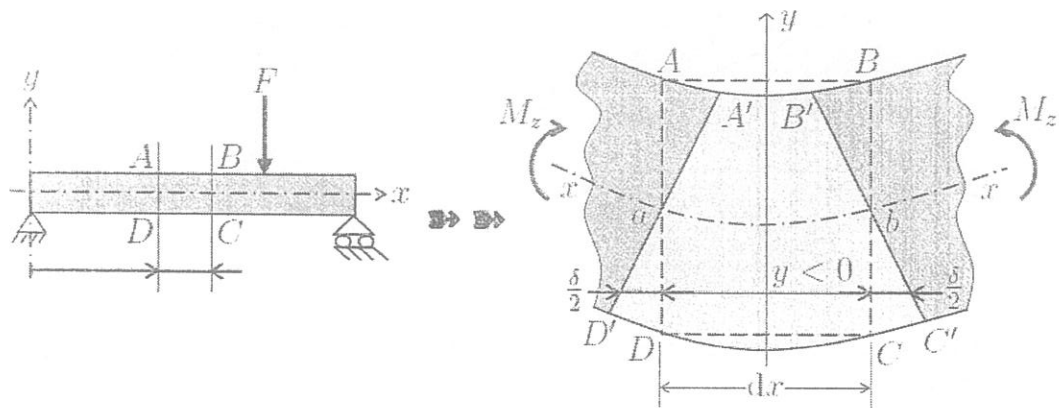


FIGURE 5.17 – Poutre sollicitée en flexion et détails sur une longueur élémentaire

Par définition de l'axe neutre, la déformation sur celui-ci (tension ou compression) est nulle. D'après la loi de HOOKE $\sigma = E\epsilon$, les contraintes sont donc également nulles sur l'axe neutre.

L'allongement δ est proportionnel à la distance y par rapport à l'axe neutre (voir figure 5.17). Donc, par unité de longueur on a :

$$\frac{\delta}{dx} = \epsilon_x = -Ky = \frac{\sigma_x}{E} \quad (5.61)$$

$$\rightarrow \sigma_x = -KEy = -K'y \quad (5.62)$$

pour un moment positif ($M > 0$), la déformation est positive lorsque y est négatif et inversement.

Dans une section donnée, les contraintes sont réparties comme explicité dans la figure (5.18).

Calculons la valeur de la constante K' .

Considérons l'équilibre de la section sous l'effet du moment extérieur M_z et des contraintes internes σ_x . Le moment M_z est égal à la somme des moments

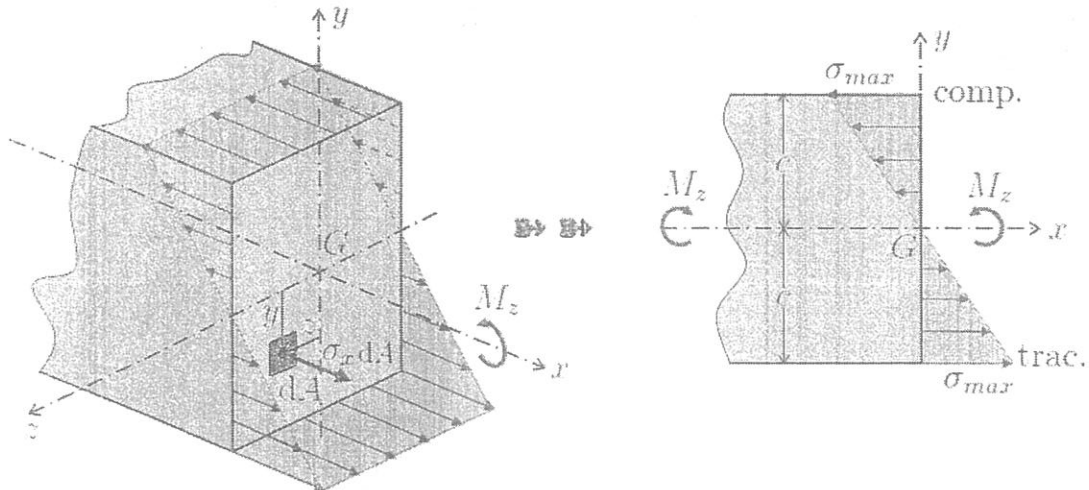


FIGURE 5.18 – Distribution des contraintes dans une section d'une poutre en flexion

de chaque petite force $f = \sigma_x dA$ par rapport à l'axe z . Les équations d'équilibre s'écrivent comme suit :

La somme des forces en x donne :

$$\sum F_x = \int_A \sigma_x dA = \int_A -K'y dA = -K'A \int_A y \frac{dA}{A} = -K'A \bar{y} = 0 \quad (5.63)$$

comme $K'A \neq 0$ on a $\bar{y} = 0$, ce qui signifie que l'axe neutre passe par le centroïde de la section.

La somme des moments par rapport à l'axe y donne :

$$\sum M_{/y} = \int_A z \cdot \sigma_x dA = \int_A -K'yz dA = -K'I_{yz} = 0 \quad (5.64)$$

comme $K' \neq 0$, on a $I_{yz} = 0$. Ce qui signifie que la section a au moins un axe de symétrie (voir chapitre du calcul géométrique des sections).

La somme des moments par rapport à l'axe z donne :

$$M_z = - \int y \cdot \sigma_x dA = K' \int y^2 dA = K'I_z \rightarrow K' = \frac{M_z}{I_z} \quad (5.65)$$

$$\rightarrow \boxed{\sigma_x = -\frac{M_z y}{I_z}} \quad (5.66)$$

En tenant compte des deux conventions de signes citées auparavant, on peut écrire d'une façon générale :

$$\sigma_x = \pm \frac{M_z y}{I_z} \quad \text{et} \quad \sigma_{x_{\max}} = \pm \frac{M_z \cdot c}{I_z} \quad (5.67)$$

où c est la distance entre l'axe neutre et le point de la section le plus éloigné de l'axe neutre.

On peut obtenir la même chose pour un moment M_y , soit :

$$\sigma_x = \pm \frac{M_y z}{I_y} \quad (5.68)$$

On peut constater que pour une section soumise à un moment fléchissant on a :

- Les contraintes sont maximales sur les fibres extrêmes ;
- Les contraintes augmentent en diminuant le moment d'inertie quadratique. Il y'a donc intérêt à appliquer les moments fléchissants autour de l'axe pour lequel le moment d'inertie est le plus grand ;
- Les contraintes sont faibles autour de l'axe neutre, il y'a donc intérêt à éloigner la matière de l'axe neutre ;
- Les contraintes de flexion sont des contraintes axiales.

5.3.3 Conception des poutres en flexion

Cas des charges connues

la procédure à suivre est en général comme suit :

- Tracer le DMF ;
- Calculer le moment maximal et le moment minimal ;
- Si la section de la poutre est inconnue, choisir une section et calculer σ_{\max} due aux charges avec :

$$\sigma_{\max} = \pm \frac{M_{\max} c}{I} \quad (5.69)$$

- Comparer σ_{\max} avec σ_{adm} :
 - si $\sigma_{\max} > \sigma_{adm}$, recommencer avec une autre section ;

- Si $\sigma_{\max} \leq \sigma_{adm}$, la section est bonne.

Au niveau du dernier point, il faut signaler que l'ingénieur a intérêt à optimiser la section de la poutre mais en respectant les coefficients de sécurité réglementaires.

Cas des charges inconnues

- Si la section est connue, calculer le moment admissible $M_{adm} = \frac{\sigma_{adm} I}{c}$
- Calculer ensuite les charges admissibles en utilisant la méthode d'intégration par exemple.

⇒ Exercice 6 :

Soit une poutre à section en U comme présenté dans la figure (5.19).

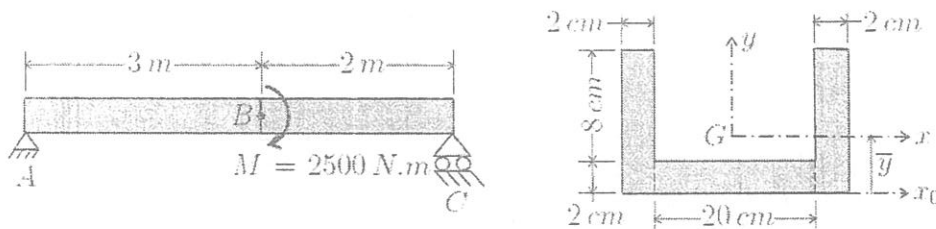


FIGURE 5.19 – Schéma de l'exercice 6

Calculer les contraintes de flexion maximales au niveau de la section B ?

⇒ Solution 6 :

Après développement, on obtient le DMF de la poutre présenté dans la figure (5.20).

Calcul de l'ordonnée \bar{y} du centre de gravité G et du moment d'inertie I_{x_G} :

$$\bar{y} = \frac{S_x}{A} = \frac{\sum y_{Gi} A_i}{\sum A_i} = \frac{(20 \cdot 2 \cdot 1) + (2 \cdot 10 \cdot 2 \cdot 5)}{(20 \cdot 2) + (2 \cdot 10) \cdot 2} = 3 \text{ cm} = 3 \cdot 10^{-2} \text{ m} \quad (5.70)$$

$$I_{x_0} = \left(2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot 10^3 \right) + \left(\frac{1}{3} \cdot 20 \cdot 2^3 \right) = 1387 \text{ cm}^4 \quad (5.71)$$

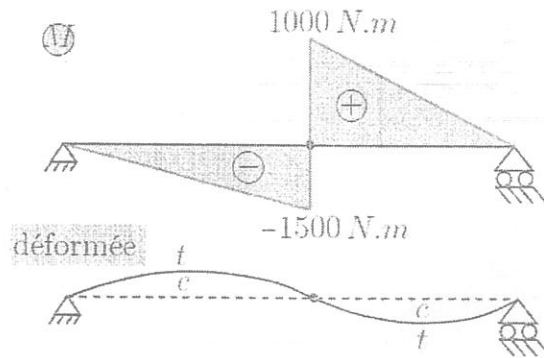


FIGURE 5.20 – DMF et déformée de la poutre - Exercice 6

En utilisant le théorème d'HYGENS, on obtient :

$$I_{x_G} = I_{x_0} - Ad^2 = 1387 - (80.3^2) = 667 \text{ cm}^4 = 667.10^{-8} \text{ m}^4 \quad (5.72)$$

Contraintes à la section B :

- A gauche de B :

$$\sigma_{\max_t} = \frac{1500.7.10^{-2}}{667.10^{-8}} = 15,7 \text{ MPa} \quad (5.73)$$

$$\sigma_{\max_c} = \frac{-1500.3.10^{-2}}{667.10^{-8}} = -6,7 \text{ MPa} \quad (5.74)$$

- A droite de B :

$$\sigma_{\max_t} = \frac{1000.3.10^{-2}}{667.10^{-8}} = 4,5 \text{ MPa} \quad (5.75)$$

$$\sigma_{\max_c} = \frac{-1000.7.10^{-2}}{667.10^{-8}} = -10,5 \text{ MPa} \quad (5.76)$$

↔ Exercice 7 :

Soit une poutre à section en I sollicitée par une densité de charge uniformément répartie sur toute sa longueur (figure 5.21).

Calculer les contraintes aux points ①, ②, ③ et ④ de la section de la poutre au niveau de l'appui B ?

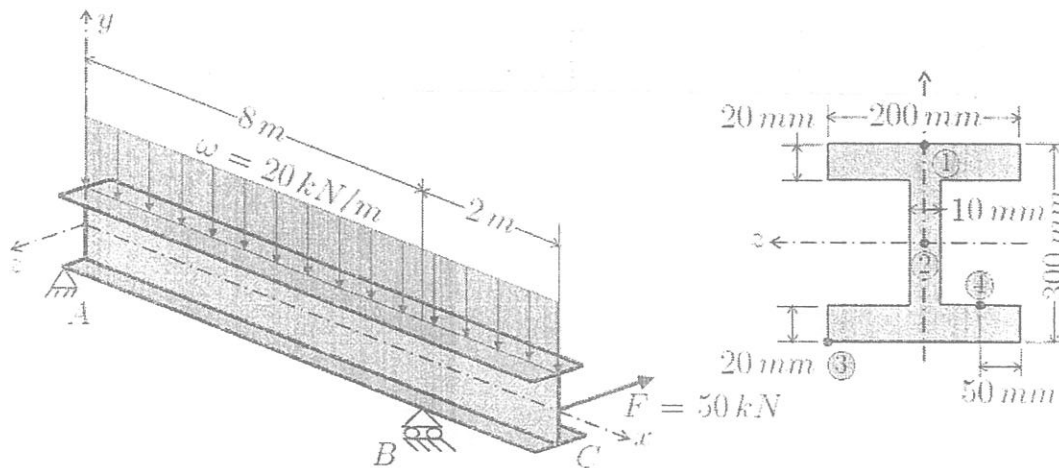


FIGURE 5.21 – Schéma de l'exercice 7

⇒ Solution 7 :

Puisqu'on a des chargements sur deux plans orthogonaux, on peut travailler d'une façon séparée sur ces deux plans :

plan xy :

Le calcul du DET et DMF de la poutre nous donne les résultats présentés sur la figure (5.22).

moment d'inertie quadratique :

$$I_z = \frac{bh^3}{12} - \frac{b'h'^3}{12} = \frac{200 \cdot 300^3}{12} - \frac{190 \cdot 260^3}{12} = 1,72 \cdot 10^8 \text{ mm}^4 \quad (5.77)$$

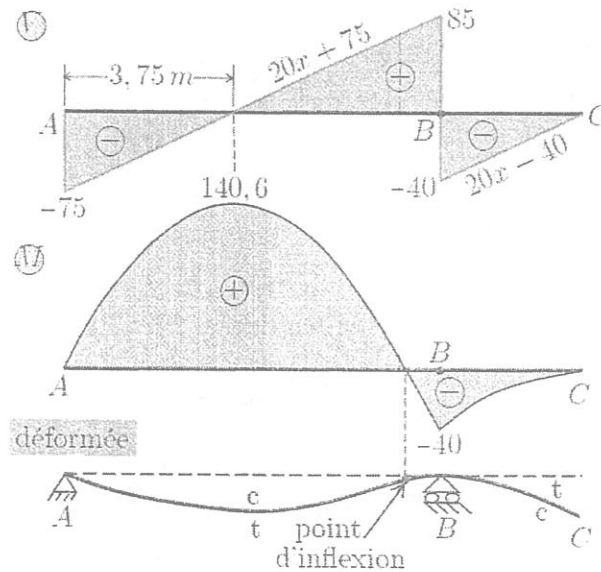
Le calcul des contraintes nous donne :

$$\sigma_1 = \frac{40 \cdot 10^6 \cdot 150}{1,72 \cdot 10^8} = 34,9 \text{ MPa} \quad (\text{tension}) \quad (5.78)$$

$$\sigma_2 = 0 \text{ MPa} \quad (5.79)$$

$$\sigma_3 = \frac{-40 \cdot 10^6 \cdot 150}{1,72 \cdot 10^8} = -34,9 \text{ MPa} \quad (\text{compression}) \quad (5.80)$$

$$\sigma_4 = \frac{-40 \cdot 10^6 \cdot 130}{1,72 \cdot 10^8} = -30,23 \text{ MPa} \quad (\text{compression}) \quad (5.81)$$

FIGURE 5.22 – DET et DMF sur le plan xy - Exercice 7

plan xz :

Le calcul du DET et DMF donne les résultats de la figure (5.23).

moment d'inertie quadratique :

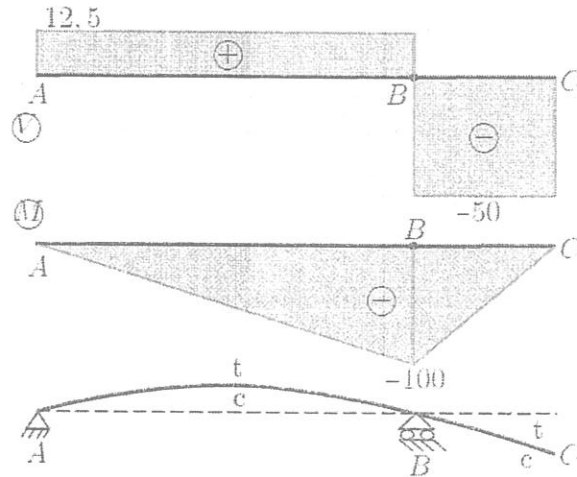
$$I_y = 2 \cdot \frac{20 \cdot 200^3}{12} + \frac{260 \cdot 10^3}{12} = 0,27 \cdot 10^8 \text{ mm}^4 \quad (5.82)$$

Le calcul des contraintes nous donne :

$$\sigma_1 = \sigma_2 = 0 \text{ MPa} \quad (5.83)$$

$$\sigma_3 = \frac{100 \cdot 10^6 \cdot 100}{0,27 \cdot 10^8} = 370,4 \text{ MPa} \quad (\text{tension}) \quad (5.84)$$

$$\sigma_4 = \frac{-100 \cdot 10^6 \cdot 50}{0,27 \cdot 10^8} = -185,2 \text{ MPa} \quad (\text{compression}) \quad (5.85)$$

FIGURE 5.23 – DET et DMF sur le plan xz - Exercice 7

5.4 Énergie potentielle de déformation

Pour l'effort normal, on a démontré que l'énergie potentielle de déformation a la forme suivante :

$$U = \int_0^l \frac{N^2}{2EA} dx \quad (5.86)$$

De la même façon, on peut démontrer que l'expression de l'énergie potentielle de déformation due à un moment fléchissant a la forme suivante :

$$U = \int_0^l \frac{M^2}{2EI} dx \quad (5.87)$$

5.5 Théorème de BARRÉ (Charges mobiles)

Soit une poutre isostatique soumise à l'action d'un convoi de charges mobiles (figure 5.24).

Dans quelle section se produira alors le moment maximal ?

Sous l'action du convoi de charges, le diagramme des moments fléchissants a une forme de polygone (ligne brisée). On peut donc conclure que la section Σ où se produira le moment fléchissant maximal sera située à la verticale d'une certaine charge P_k .

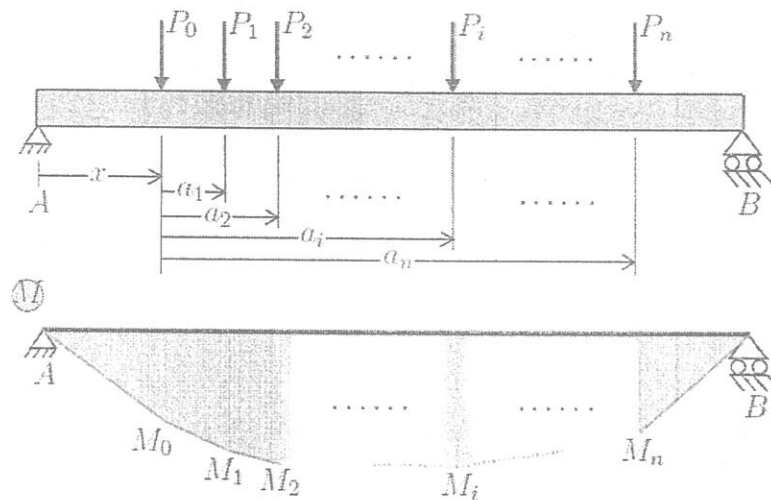


FIGURE 5.24 – Schéma du théorème de BARRÉ

Soit M_k le moment fléchissant à la verticale de la charge P_k .

La réaction d'appui est donnée par :

$$V_A = P_0 \left(1 - \frac{x}{l}\right) + \sum_{i=1}^n P_i \left(1 - \frac{x}{l} - \frac{a_i}{l}\right) \quad (5.88)$$

$$\rightarrow M_k = V_A(x + a_k) - P_0 a_k - \sum_{j=1}^{k-1} P_j (a_k - a_j) \quad (5.89)$$

$$M_{k_{\max}}? \rightarrow \frac{dM_k}{dx} = 0 \quad (5.90)$$

$$\rightarrow V_A + \frac{dV_A}{dx}(x + a_k) = 0 \quad (5.91)$$

$$\rightarrow P_0 \left(1 - \frac{x}{l}\right) + \sum_{i=1}^n P_i \left(1 - \frac{x}{l} - \frac{a_i}{l}\right) + (x + a_k) \left(-\frac{P_0}{l} - \frac{1}{l} \sum_{i=1}^n P_i\right) = 0 \quad (5.92)$$

$$\rightarrow \left(P_0 + \sum_{i=1}^n P_i\right) l - \left(P_0 x + \sum_{i=1}^n P_i (x + a_i)\right) - (x + a_k) \left(P_0 + \sum_{i=1}^n P_i\right) = 0 \quad (5.93)$$

soit R la résultante de toutes les charges P_i située à une distance X_R par rapport à l'appui A, on a :

$$\begin{cases} R &= P_0 + \sum_{i=1}^n P_i \\ R.X_R &= P_0x + \sum_{i=1}^n P_i(x + a_i) \end{cases} \quad (5.94)$$

les équations précédentes deviennent alors en fonction de R comme suit :

$$Rl - RX_R - (x + a_k)R = 0 \quad (5.95)$$

$$\rightarrow l - X_R - (x + a_k) = 0 \quad (5.96)$$

$$\rightarrow x + a_k = l - X_R \quad (5.97)$$

$$\rightarrow x_{P_k} = l - X_R \quad (5.98)$$

Donc R et P_k sont disposées d'une façon symétrique par rapport au milieu de la poutre.

5.6 Composition des sollicitations

5.6.1 Flexion déviée

Introduction

Une section d'une poutre est dite soumise à la flexion déviée si elle est soumise à une double flexion (flexion dans les deux plans de la section).

La flexion déviée (F.D.) peut être due à :

- Une double flexion pure ;
- Une double flexion simple ;
- Une flexion pure et une flexion simple ;
- Un chargement unique agissant en dehors des plans principaux.

Dans tous ces cas, la section Σ est soumise à un moment résultant M qui n'est porté ni par l'axe x ni par l'axe y .

Contraintes en flexion déviée

Par superposition des contraintes (voir figure 5.25), nous obtenons :

$$\sigma(x, y) = -\frac{M_x}{I_x}y - \frac{M_y}{I_y}x \quad (5.99)$$

d'après l'expression obtenue des contraintes $\sigma(x, y)$, l'épure spatiale du diagramme des contraintes est un plan.

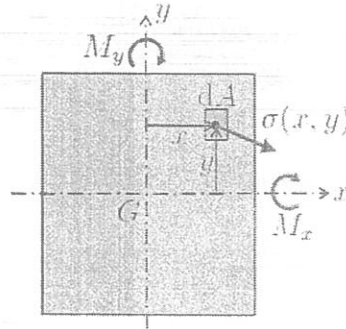


FIGURE 5.25 – Schématisation des contraintes créées par une flexion déviée

Axe neutre

L'axe neutre est caractérisé par $\sigma(x, y) = 0$, il s'agit de l'ensemble des points de la section droite qui ne sont ni tendus ni comprimés :

$$\sigma(x, y) = -\frac{M_x}{I_x}y - \frac{M_y}{I_y}x = 0 \quad (5.100)$$

d'où l'équation de l'axe neutre dans le plan xGy :

$$y = -\frac{M_y I_x}{M_x I_y}x \quad (5.101)$$

il s'agit d'un axe central mais qui est différent des axes Gx et Gy .

Remarques :

* On retrouve les cas particuliers de la flexion pure ou la flexion simple :

- Si $M_y = 0$, l'axe neutre est porté par $y = 0$;
- Si $M_x = 0$, l'axe neutre est porté par $x = 0$.

* Dans le cas de la flexion simple (ou pure), l'axe neutre est porté par la direction du moment. Donc, l'axe neutre est en même temps le support de M .

* Pour la flexion déviée, ce n'est pas généralement le cas, l'axe neutre se trouve dévié par rapport au support du moment résultant (voir figure 5.26).

(Δ) est la direction de l'axe neutre qui a comme équation :

$$y = -\frac{M_y I_x}{M_x I_y} x \quad (\Delta) \quad (5.102)$$

(Δ') est la direction du moment résultant qui a comme équation :

$$y = -\frac{M_x}{M_y} x \quad (\Delta') \quad (5.103)$$

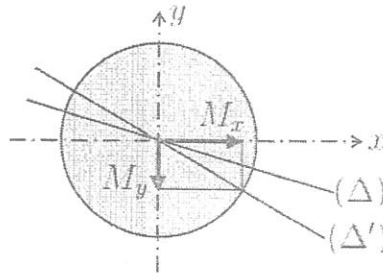


FIGURE 5.26 – Directions de l'axe neutre et le support du moment résultant en flexion déviée

Le fait que l'épure des contraintes est plane nous donne une expression des contraintes qui est fonction linéaire de la distance à l'axe neutre. Donc, les contraintes maximales de traction et de compression se produisent aux points les plus éloignés de l'axe neutre.

5.6.2 Flexion composée

Introduction

Une section d'une poutre est soumise à la flexion composée si elle est soumise en même temps à une flexion simple ou pure et un effort normal.

La flexion composée (F.C.) peut être due à :

- Un moment de flexion et un effort normal centré ;
- Un effort normal seul excentré ;
- Superposition des deux cas précédents ;
- Effort normal centré appliqué à une pièce courbe.

Contraintes en flexion composée

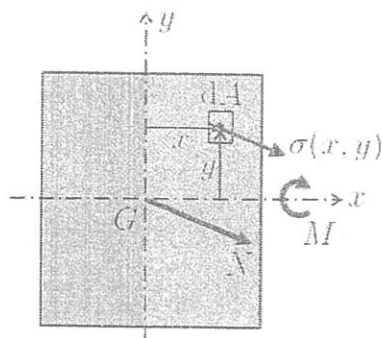


FIGURE 5.27 – Schématisation des contraintes créées par une flexion composée

Par superposition des contraintes (figure 5.27), on obtient :

$$\sigma(x, y) = \sigma_1(N) + \sigma_2(M) \quad (5.104)$$

$$= \frac{N}{A} - \frac{M}{I}y \quad (5.105)$$

où N est l'effort normal ; A est la section de la poutre et M est le moment fléchissant.

Axe neutre

L'axe neutre est caractérisé par $\sigma(x, y) = 0$:

$$\sigma(x, y) = \frac{N}{A} - \frac{M}{I}y = 0 \quad (5.106)$$

d'où l'équation de l'axe neutre :

$$y = \frac{NI}{AM} \quad (5.107)$$

Cet axe ne passe plus par G (figure 5.28). donc, ce n'est plus un axe central mais il reste perpendiculaire au plan moyen et parallèle à l'axe neutre dans le cas de la flexion simple ou pure.

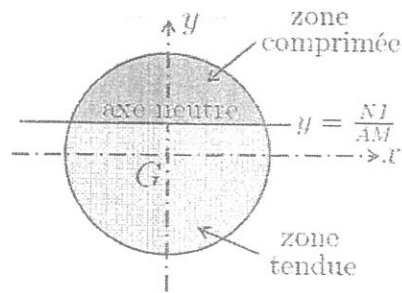


FIGURE 5.28 – Axe neutre en flexion composée

Cas de la flexion composée due à un effort normal N excentré

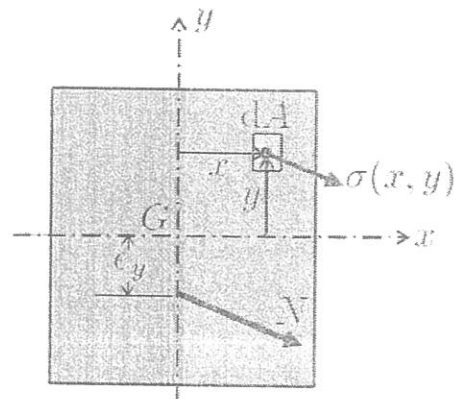


FIGURE 5.29 – Flexion composée due à un effort normal excentré

L'effort normal est N et le moment de flexion est $M_x = -Ne_y$. Dans ce cas, la formule donnant la position de l'axe neutre est donnée par :

$$y = \frac{NIx}{AM_x} = -\frac{NIx}{ANe_y} = -\frac{Ix}{Ae_y} \quad (5.108)$$

Centre de pression et noyau central d'une section

Contrairement à la flexion simple ou pure, l'axe neutre en flexion composée peut être situé en dehors de la section. c.à.d, physiquement, les différents points d'une section peuvent être soumis à des contraintes de même nature (soit de compression ou de traction).

Définition du centre de pression : On appelle centre de pression C le point fictif ou réel où doit s'appliquer l'effort normal réel N de façon à reproduire les mêmes facteurs de forces dans la section.

Définition du noyau central : Le noyau central d'une section (A) est le lieu géométrique (surface) des centres de pression qui engendrent des contraintes de même nature dans toute la section.

Question : Dans quelle condition une section soumise à la flexion composée est totalement tendue ou comprimée ?

Réponse : Il faut que le centre de pression C soit à l'intérieur du noyau central.

Remarques :

- ★ *Le centre de gravité appartient au noyau central (cas de l'effort normal seul) ;*
- ★ *La frontière du noyau central est caractérisé par des centres de pression qui engendrent des axes neutres qui sont tangents à la section (A).*

5.6.3 Flexion déviée composée

Introduction

Une section est soumise à une flexion déviée composée (F.D.C.) si elle est soumise en même temps à la flexion déviée et un effort normal (deux moments fléchissants et un effort normal).

La flexion déviée composée (F.D.C.) peut être due à :

- Un effort normal centré et deux moments fléchissants ;
- Un effort normal unique mais doublement excentré.

Contraintes en flexion déviée composée

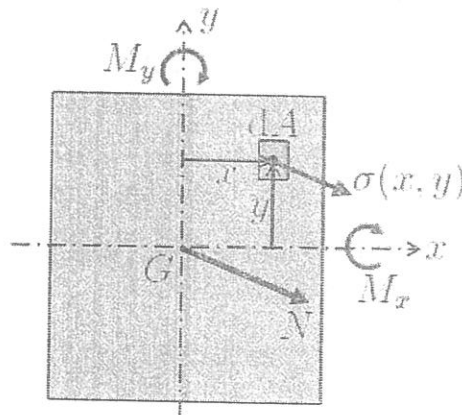


FIGURE 5.30 – Schématisation des contraintes créées par une flexion déviée composée

Par superposition des contraintes (figure 5.30), on obtient :

$$\sigma(x, y) = \sigma_1(N) + \sigma_2(M_x) + \sigma_3(M_y) \quad (5.109)$$

$$\rightarrow \sigma(x, y) = \frac{N}{A} - \frac{M_x}{I_x}y - \frac{M_y}{I_y}x \quad (5.110)$$

donc, l'épure spatiale des contraintes est un plan.

Axe neutre en flexion déviée composée

L'axe neutre correspond à $\sigma(x, y) = 0$. Donc, l'équation de l'axe neutre est :

$$y = -\frac{M_y I_x}{M_x I_y} x + \frac{N I_x}{A M_x} \quad (5.111)$$

l'axe neutre n'est ni central ni parallèle aux axes centraux principaux.

Si on utilise les coordonnées du centre de pression $C(e_x, e_y)$ tel que $M_x = -N e_y$ et $M_y = -N e_x$, alors l'équation de l'axe neutre devient :

$$\frac{e_x}{I_y} x + \frac{e_y}{I_x} y = -\frac{1}{A} \quad (5.112)$$

