

Chapitre 4

Calcul des systèmes réticulés

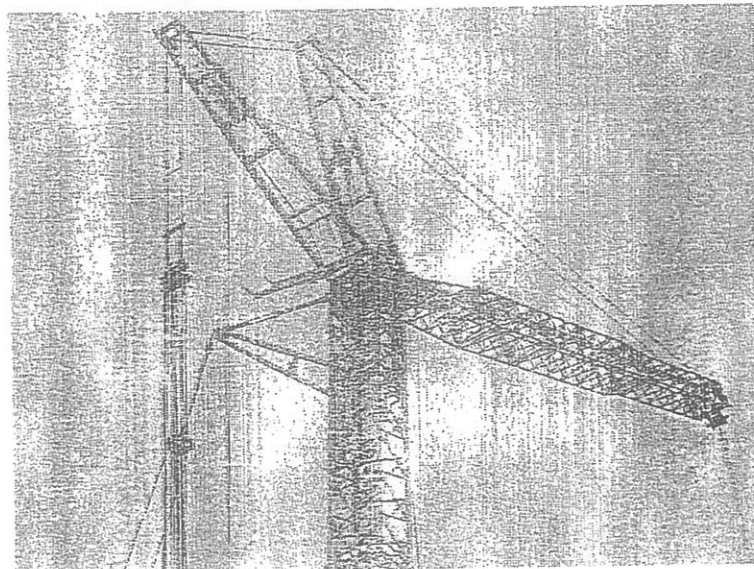


FIGURE 4.1 – Gruc de chantier en système réticulé

4.1 Définitions

On appelle treillis (système réticulé), un assemblage de barres articulées entre elles de manière à ce que chacune des barres ne soit sollicitée qu'en traction et compression. La figure (4.2) présentent des exemples de réalisation de treillis spatiaux.

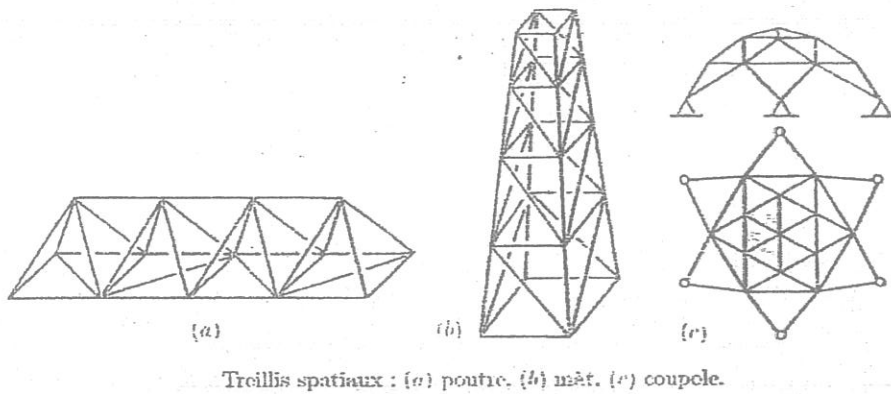


FIGURE 4.2 – Quelques treillis spatiaux

Dans les figures (4.3) et (4.4), on présente des schématisations mécaniques d'un treillis spatial et de deux treillis plans.

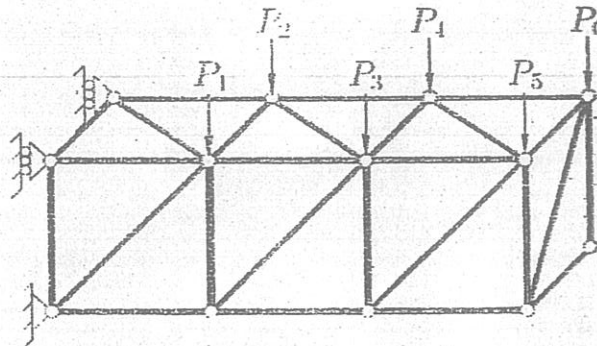


FIGURE 4.3 – Schématisation d'un treillis spatial

On appelle nœud, une articulation entre plusieurs barres. La figure (4.5) présente le détail de la réalisation pratique d'un nœud de treillis.

Dans la pratique, ce ne sont pas des articulations, on rencontre des barres assemblées rigidement (soudures ou rivets). Mais l'expérience montre que l'erreur commise en supposant que se sont des articulations parfaites reste généralement acceptable (erreur < 10% si les lignes des centres de gravité des barres sont concourantes).

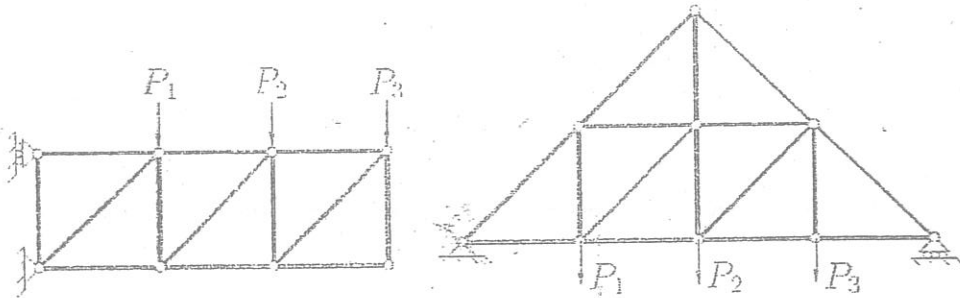


FIGURE 4.4 – Schématisation de treillis plans

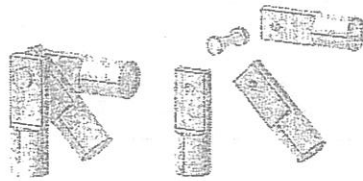


FIGURE 4.5 – Détail d'un nœud d'un système réticulé

Pour assurer que chacune des barres ne soit sollicitée qu'en traction ou en compression, il faut que :

- le poids des barres soit négligeable devant les autres sollicitations,
- les sollicitations extérieures ne soient que des efforts appliqués sur les nœuds (on dit que le système est chargé indirectement),
- les liaisons avec l'extérieur soit des appuis fixes ou des appuis mobiles.

Lorsque toute la géométrie est dans un même plan (au décalage près entre les barres due à la réalisation pratique des nœuds) et que les efforts appliqués sont dans ce plan, le treillis est dit plan.

L'élément de base d'un treillis est le triangle, car il forme une structure stable en elle-même et ce contrairement à un élément en rectangle (voir figure 4.6).

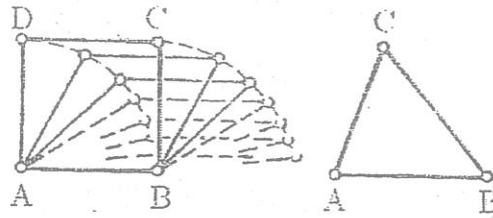


FIGURE 4.6 – Instabilité et stabilité des formes rectangulaire et triangulaire d'un treillis

4.2 Calcul des efforts dans les treillis plans

Les efforts développés dans un treillis chargé se calculent à partir des deux méthodes suivantes :

- Méthode des nœuds : utilisée le plus souvent pour déterminer les efforts dans toutes les barres,
- Méthode des sections ou méthode de RITTER : utilisée pour déterminer les efforts dans certaines barres seulement.

4.2.1 Méthode des nœuds

Pour étudier l'équilibre d'un treillis, on réalise l'équilibre de chacun de ses nœuds. Cet équilibre fait intervenir les efforts normaux de chacune des barres connectée au nœud isolé et les efforts extérieurs directement appliqués à ce nœud.

Puisque les nœuds sont considérés comme des rotules parfaites, les équations d'équilibre d'un nœud sont donc :

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \end{cases} \quad (4.1)$$

La procédure de calcul à suivre est la suivante :

- Calculer les réactions d'appuis,
- Isoler un nœud où il y'a seulement deux inconnues,
- Calculer les efforts à ce nœud (équations du système 4.1)
- Isoler un autre nœud où il n'y a que deux inconnues supplémentaires (on utilise la règle Action = Réaction),
- Vérifier au dernier nœud l'équilibre des forces.

Les forces inconnues sont choisies arbitrairement dans un sens positif. Le sens exact étant déterminé ultérieurement lors des calculs.

Définition de l'hyperstaticité intérieure du système :

soit :

- n : nombre de nœuds du système étudié ;
- b : nombre de barres ;
- r : nombre de réactions.

si $b + r = 2n$, le treillis est isostatique intérieurement, c'est à dire que les efforts intérieurs peuvent être calculés et ne dépendent pas du comportement des barres ;

si $b + r < 2n$, le treillis est instable, il possède des mobilités internes (on dit que le système est hypostatique) ;

si $b + r > 2n$, le treillis est hyperstatique, c'est à dire que les efforts intérieurs ne peuvent être calculés qu'après prise en compte de la déformation des barres.

Pour pouvoir déterminer toutes les forces du treillis avec les équations d'équilibre, ce treillis doit être isostatique.

⇔ Exercice 1 :

Calculer les forces dans toutes les barres du système réticulé présenté dans la figure (4.7).

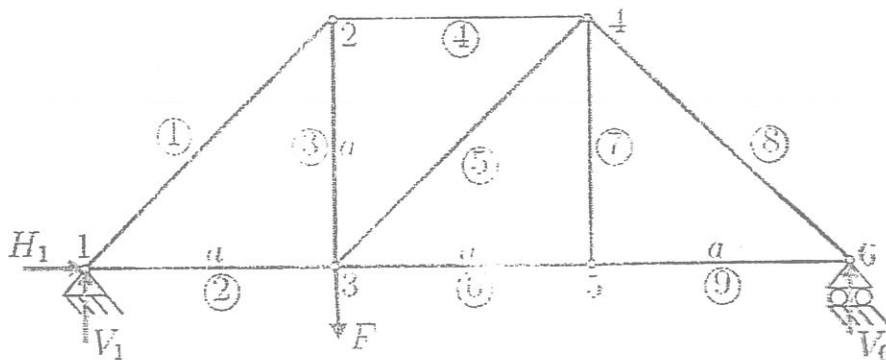


FIGURE 4.7 - Schéma de l'exercice 1

☞ Solution 1 :

nombre de barres : $b = 9$

nombre de nœuds : $n = 6$

nombre de réactions : $r = 3$

On a donc :

$$b + r = 9 + 3 = 12 = 2n \quad (4.2)$$

donc le système est isostatique intérieurement.

Calcul des réactions d'appuis :

$$\sum M_{/j} = -aF + 3aV_6 = 0 \quad (4.3)$$

$$\rightarrow V_6 = \frac{1}{3}F \quad (4.4)$$

$$\sum F_{/y} = V_1 - F + \frac{1}{3}F = 0 \quad (4.5)$$

$$\rightarrow V_1 = \frac{2}{3}F \quad (4.6)$$

$$\sum F_{/x} = H_1 = 0 \quad (4.7)$$

$$\rightarrow H_1 = 0 \quad (4.8)$$

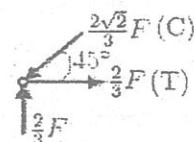
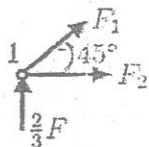
Nœud 1 :

$$\sum F_{/y} = \frac{2}{3}F + \frac{\sqrt{2}}{2}F_1 = 0 \quad (4.9)$$

$$\rightarrow F_1 = -\frac{2\sqrt{2}}{3}F \quad (4.10)$$

$$\sum F_{/x} = F_2 + \frac{\sqrt{2}}{2}F_1 = 0 \quad (4.11)$$

$$\rightarrow F_2 = \frac{2}{3}F \quad (4.12)$$



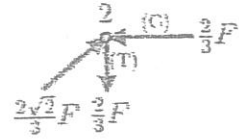
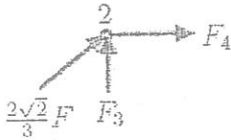
Noeud 2 :

$$\sum F_{/y} = \frac{2\sqrt{2}}{3} F \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + F_3 = 0 \quad (4.13)$$

$$\Rightarrow F_3 = -\frac{2}{3} F \quad (4.14)$$

$$\sum F_{/x} = \frac{2\sqrt{2}}{3} F \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + F_4 = 0 \quad (4.15)$$

$$\Rightarrow F_4 = -\frac{2}{3} F \quad (4.16)$$

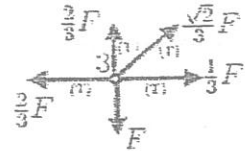
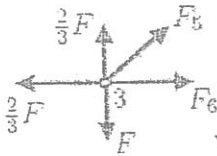
Noeud 3 :

$$\sum F_{/y} = \frac{2}{3} F - F + F_5 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \quad (4.17)$$

$$\Rightarrow F_5 = \frac{\sqrt{2}}{3} F \quad (4.18)$$

$$\sum F_{/x} = -\frac{2}{3} F + F_5 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + F_6 = 0 \quad (4.19)$$

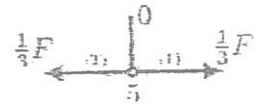
$$\Rightarrow F_6 = \frac{1}{3} F \quad (4.20)$$

Noeud 5 :

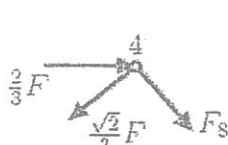
$$\sum F_{/y} = F_7 = 0 \quad (4.21)$$

$$\sum F_{/x} = -\frac{1}{3} F + F_9 = 0 \quad (4.22)$$

$$\Rightarrow F_9 = \frac{1}{3} F \quad (4.23)$$

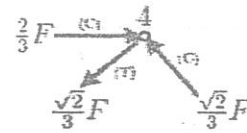


Nœud 4 :

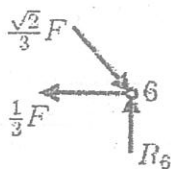


$$\begin{aligned} \sum F/x &= \frac{2}{3}F - \frac{\sqrt{2}}{3}F \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + F_8 \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (4.24)$$

$$\Rightarrow F_8 = -\frac{\sqrt{2}}{3}F \quad (4.25)$$



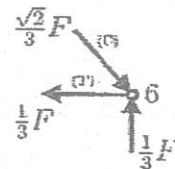
Nœud 6 (vérification) :



$$\sum F/x = -\frac{1}{3}F + \frac{\sqrt{2}}{3}F \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \quad (4.26)$$

$$\sum F/y = -\frac{\sqrt{2}}{3}F \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + R_6 = 0 \quad (4.27)$$

$$\Rightarrow R_6 = \frac{1}{3}F \quad (4.28)$$



l'équilibre du nœud 6 est donc vérifié.

Exercice 2 :

Calculer les forces dans toutes les barres du système réticulé présenté dans la figure (4.8).

Solution 2 :

Calcul des réactions d'appuis :

$$\sum M/E = 30 \cdot (10) + 20 \cdot (5) - 5T = 0 \quad (4.29)$$

$$\Rightarrow T = 80 \text{ kN} \quad (4.30)$$

$$\sum F/x = -E_x + 80 \cos 30 = 0 \quad (4.31)$$

$$\Rightarrow E_x = 69.3 \text{ kN} \quad (4.32)$$

$$\sum F/y = -30 - 20 - E_y + 80 \sin 30 = 0 \quad (4.33)$$

$$\Rightarrow E_y = 10 \text{ kN} \quad (4.34)$$

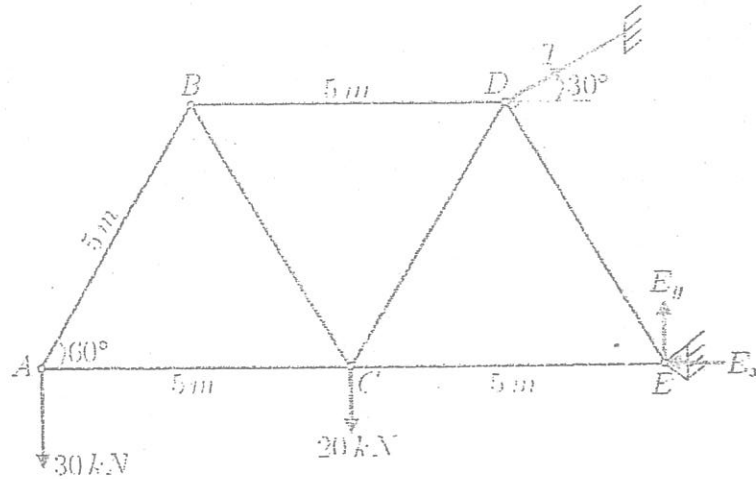


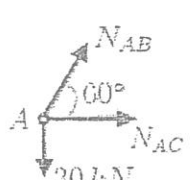
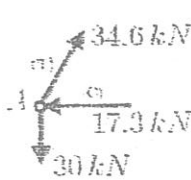
FIGURE 4.8 - Schéma de l'exercice 2

Nœud A :

$$\sum F_{/y} = N_{AB} \sin 60 - 30 = 0 \quad (4.35)$$

$$\Rightarrow N_{AB} = 34.6 \text{ kN} \quad (4.36)$$

$$\sum F_{/x} = 34.6 \cos 60 + N_{AC} = 0 \quad (4.37)$$


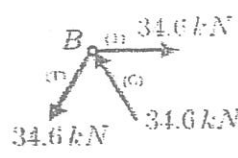
$$\Rightarrow N_{AC} = -17.3 \text{ kN} \quad (4.38)$$



Nœud B :

$$\sum F_{/y} = -34.6 \cos 30 - N_{BC} \cos 30 = 0 \quad (4.39)$$

$$\Rightarrow N_{BC} = -34.6 \text{ kN} \quad (4.40)$$

$$\sum F_{/x} = -34.6 \sin 30 - 34.6 \sin 30 + N_{BD} = 0 \quad (4.41)$$

$$\Rightarrow N_{BD} = 34.6 \text{ kN} \quad (4.42)$$



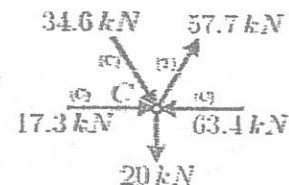
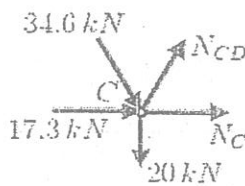
Nœud C :

$$\begin{aligned}\sum F_y &= -20 - 34.6 \cos 30 + N_{CD} \cos 30 \\ &= 0\end{aligned}\quad (4.43)$$

$$\rightarrow N_{CD} = 57.7 \text{ kN} \quad (4.44)$$

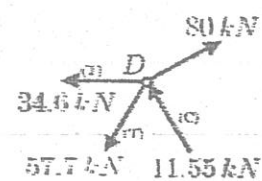
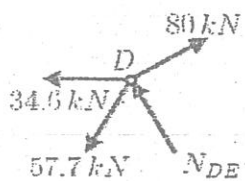
$$\begin{aligned}\sum F_x &= 17.3 + 34.6 \sin 30 \\ &\quad + 57.7 \sin 30 + N_{CE} \\ &= 0\end{aligned}\quad (4.45)$$

$$\rightarrow N_{CE} = -63.4 \text{ kN} \quad (4.46)$$

Nœud D :

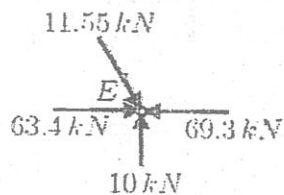
$$\begin{aligned}\sum F_x &= -34.6 + 80 \cos 30 \\ &\quad - 57.7 \sin 30 + N_{DE} \sin 30 \\ &= 0\end{aligned}\quad (4.47)$$

$$\rightarrow N_{DE} = 11.55 \text{ kN} \quad (4.48)$$

Nœud E (vérification) :

$$\sum F_x = 63.4 - 69.3 + 11.55 \sin 30 = 0 \quad (4.49)$$

$$\sum F_y = 10 - 11.55 \cos 30 = 0 \quad (4.50)$$



4.2.2 Nœuds particuliers

Deux barres alignées :

$$\begin{array}{c} N_1 \quad \leftarrow \quad \rightarrow \quad N_2 \\ N_1 = N_2 \end{array} \quad (4.51)$$

(de sens opposé)

Effort extérieur aligné avec une barre :

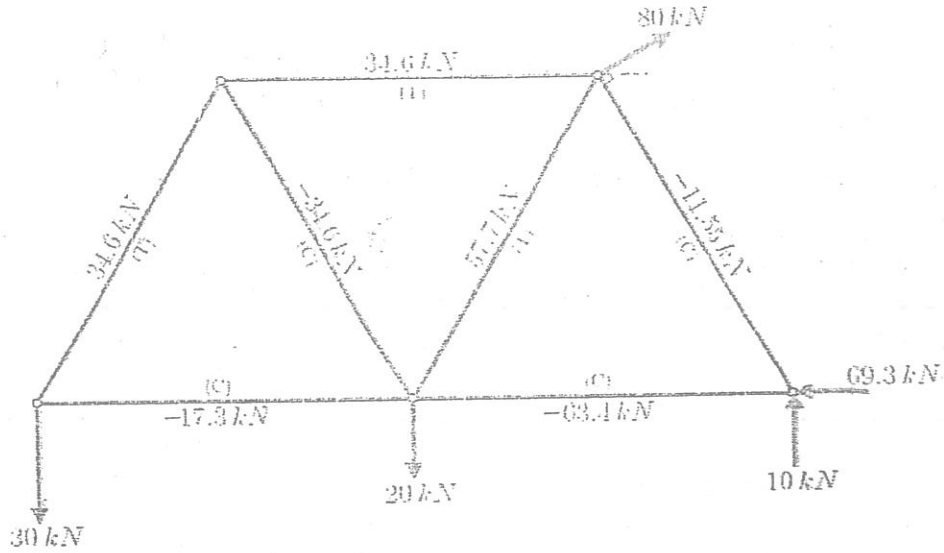
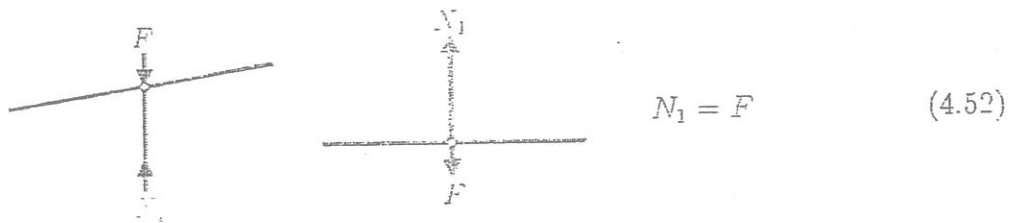
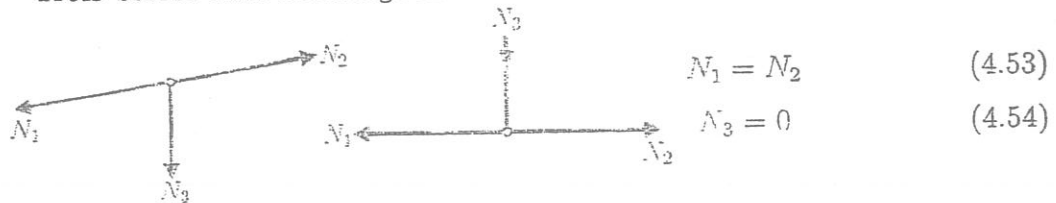


FIGURE 4.9 - Présentation des résultats sur le schéma de la structure



Trois barres dont deux alignées :

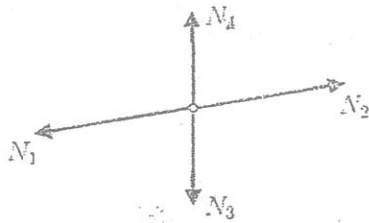


$$N_3 = 0 \quad (4.54)$$

Deux barres non alignées :



Barres alignées deux à deux :



$$N_1 = N_2 \quad (4.56)$$

$$N_3 = N_4 \quad (4.57)$$

4.2.3 Méthode des sections (Méthode de RITTER)

L'avantage de cette méthode réside dans le fait de pouvoir obtenir la valeur de l'effort dans une barre sans pour autant résoudre tout le système.

La procédure de calcul par la méthode des sections est la suivante :

- Calculer les réactions d'appuis ;
- Couper le treillis en 2 parties distinctes par une coupe à travers les barres dans lesquelles on souhaite calculer les efforts ;
- Appliquer les équations d'équilibre de l'une ou de l'autre des parties du treillis en introduisant des efforts inconnus dans les barres coupées ;
- Calculer les efforts dans ces barres.

⇒ Exercice 3 :

Calculer les forces dans les barres ④, ⑤ et ⑥ du système réticulé présenté dans la figure (4.10).

⇒ Solution 3 :

Coupe du treillis à travers les barres ④, ⑤ et ⑥ (voir figure 4.11).

En appliquant les équations d'équilibre à la partie de droite, il vient :

$$\sum M_{/4} = \frac{1}{3}Fa - aN_6 = 0 \quad (4.58)$$

$$\rightarrow N_6 = \frac{1}{3}F \quad (T) \quad (4.59)$$

$$\sum F_{/y} = -\frac{\sqrt{2}}{2}N_5 + \frac{1}{3}F = 0 \quad (4.60)$$

$$\rightarrow N_5 = \frac{\sqrt{2}}{3}F \quad (T) \quad (4.61)$$

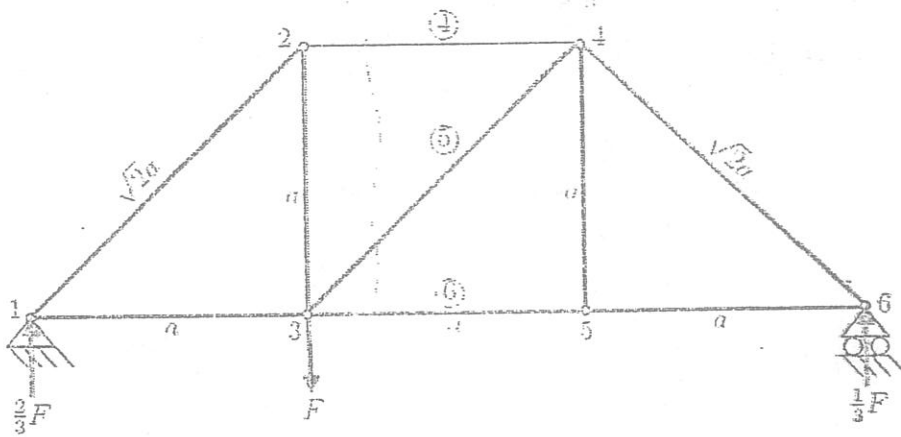


FIGURE 4.10 - Schéma de l'exercice 3

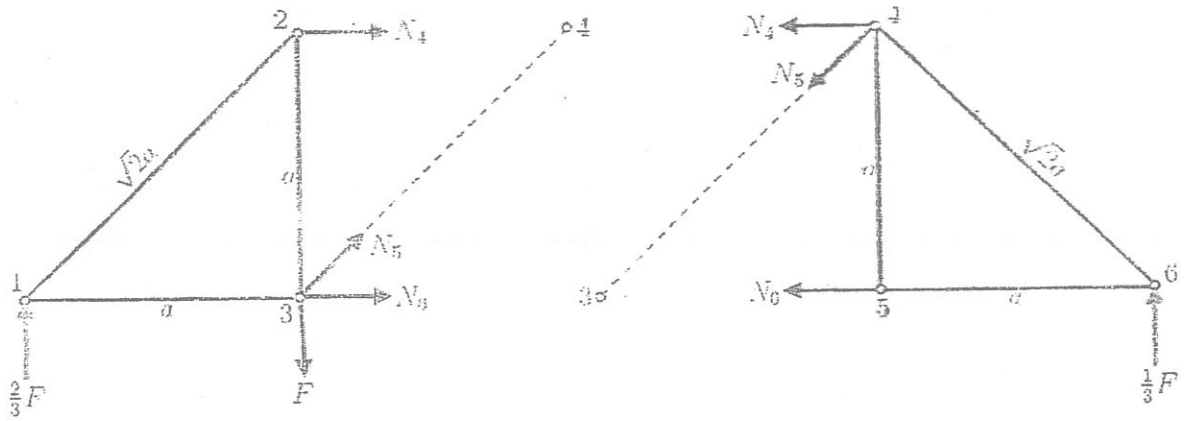


FIGURE 4.11 - Décomposition des deux parties - exercice 3

$$\sum M_{/3} = 2a \frac{1}{3} F + a N_4 = 0 \quad (4.62)$$

$$\rightarrow N_4 = -\frac{2}{3} F \quad (C) \quad (4.63)$$

❖ Exercice 4 :

Calculer la force dans la barre DJ du treillis présenté dans la figure (4.12).

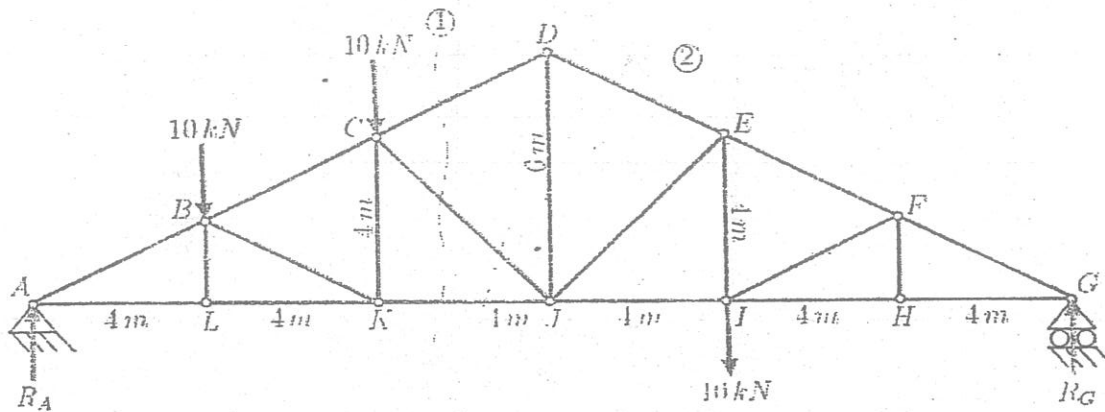


FIGURE 4.12 – Schéma de l'exercice 4

⇒ Solution 4 :

Calcul des réactions d'appuis :

$$\sum M_{/G} = 10 \cdot (20) + 10 \cdot (16) + 10 \cdot (8) - R_A \cdot 24 = 0 \quad (4.64)$$

$$\rightarrow R_A = 18.3 \text{ kN} \quad (4.65)$$

$$\sum F_{/y} = 18.3 - 10 - 10 - 10 + R_G = 0 \quad (4.66)$$

$$\rightarrow R_G = 11.7 \text{ kN} \quad (4.67)$$

Nous allons réaliser les 2 coupes ① et ② pour pouvoir calculer l'effort de la barre DJ (voir figure 4.12).

Les 2 parties de la structure obtenues par les coupes ① et ② sont présentées dans la figure (4.13).

Coupe ① :

$$\sum M_{/C} = 4N_{KJ} + 4 \cdot (10) - 18.3 \cdot 8 = 0 \quad (4.68)$$

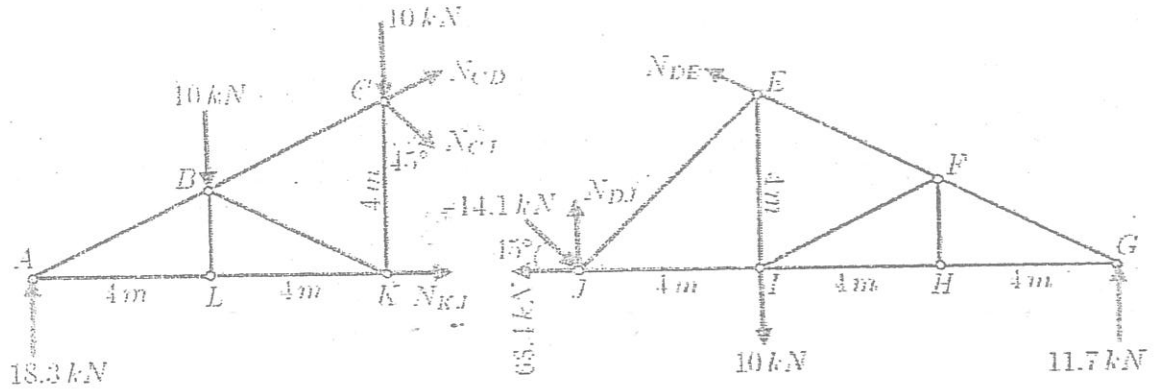


FIGURE 4.13 – Décomposition du système - exercice 4

$$\rightarrow N_{KJ} = 63.4 \text{ kN (T)} \quad (4.69)$$

$$\sum M_{/A} = -10 \cdot (4) - 10 \cdot (8) - N_{CJ} \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 4 - N_{CJ} \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 8 = 0 \quad (4.70)$$

$$\rightarrow N_{CJ} = -14.1 \text{ kN (C)} \quad (4.71)$$

Coupe ② :

$$\sum M_{/G} = 10 \cdot (8) - N_{DJ} \cdot 12 + 14.1 \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 12 = 0 \quad (4.72)$$

$$\rightarrow N_{DJ} = 16.63 \text{ kN (T)} \quad (4.73)$$

On remarque que si la force en I est nulle, on a :

$$N_{FH} = N_{FI} = N_{IE} = N_{JE} = 0 \quad (4.74)$$

on pourrait alors faire directement une seule coupe à travers les barres CD, DJ, JE ($N_{JE} = 0$) et JI.

4.2.4 Critère de résistance d'un treillis

La connaissance des efforts intérieurs dans un treillis permet de déterminer la barre la plus sollicitée au sens de la contrainte :

$$\sigma_i = \frac{N_i}{A_i} \quad (4.75)$$

Si on appelle σ_{\max} la contrainte maximale dans le treillis, le critère de résistance du treillis vis-à-vis de la plasticité sera :

$$\sigma_{\max} < \sigma_e \quad (4.76)$$

où σ_e est la limite d'élasticité du matériau composant les barres du treillis ; la contrainte maximale est : $\sigma_{\max} = \max(\sigma_i)$.

Remarque : Dans les règlements de construction, des coefficients de sécurité sont introduits pour assurer une marge de sécurité. Cela permet par exemple d'assurer la sécurité des usagers en présence de défauts de fabrication et/ou de construction d'un certain degré.

4.3 Énergie potentielle de déformation

Cas simple d'un ressort :

Supposons un ressort de longueur L qu'on charge lentement et progressivement (pour éviter les effets dynamiques) jusqu'à atteinte d'un effort P . Le ressort accuse un raccourcissement ΔL . Le travail de P est alors emmagasiné dans le ressort sous forme d'énergie potentielle de déformation.

Cas général :

Ce qui est valable pour un ressort simple est aussi valable pour tout système élastique.

En dehors de toute sollicitation extérieure, l'énergie potentielle de déformation U est nulle (corps non déformé).

Sous l'effet de sollicitations extérieures, un corps se déforme et ses différents points subissent des déplacements quelconques (voir figure 4.14).

Il est à noter que seuls les points d'application des efforts extérieurs peuvent donner une information sur la déformation du système.

Tant que le système n'est pas sollicité au delà de sa limite élastique, l'énergie potentielle de déformation peut être récupérée totalement. Dans le cas

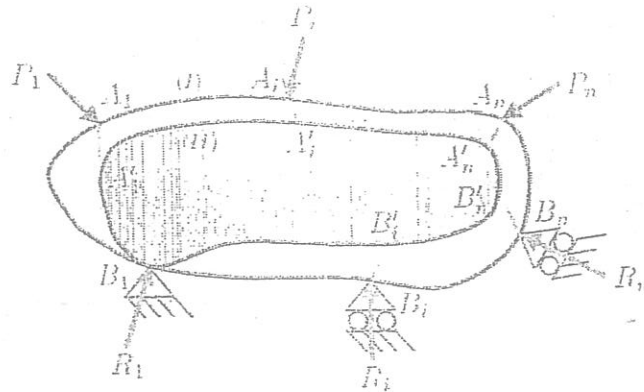


FIGURE 4.14 – Déformation d'un corps sollicité

contraire, seule une fraction de l'énergie peut être récupérée, l'autre fraction provoque la déformation résiduelle du système.

Pour les réactions d'appuis, il est facile de voir que :

$$W(R_1, \dots, R_i, \dots, R_n) = 0 \quad (4.77)$$

car on ne peut avoir que :

- un appui glissant : $R_i \perp \delta$
- un appui fixe : $\delta = 0$
- un encastrement : $\delta = 0, \theta = 0$

Ceci est général pour tout type de sollicitation.

Dans les paragraphes suivants, nous allons évaluer l'énergie potentielle de déformation U dans les cas d'un effort normal constant et d'un effort normal variable.

4.3.1 Cas d'un effort normal N constant

Considérons une poutre encastree (console) soumise à une charge P lente et progressive (voir 1^{er} schéma de la figure 4.15).

Considérons un état intermédiaire caractérisé par un effort αP et un allongement $\alpha \Delta L$ (avec $\alpha < 1$) et un état intermédiaire infiniment voisin en donnant un accroissement $d(\alpha P)$ à la charge αP (voir 2^{ème} schéma de la figure 4.15). Il va en résulter un allongement supplémentaire $d(\alpha \Delta L) = \Delta L d\alpha$

qui est le déplacement du point d'application de la force αP .

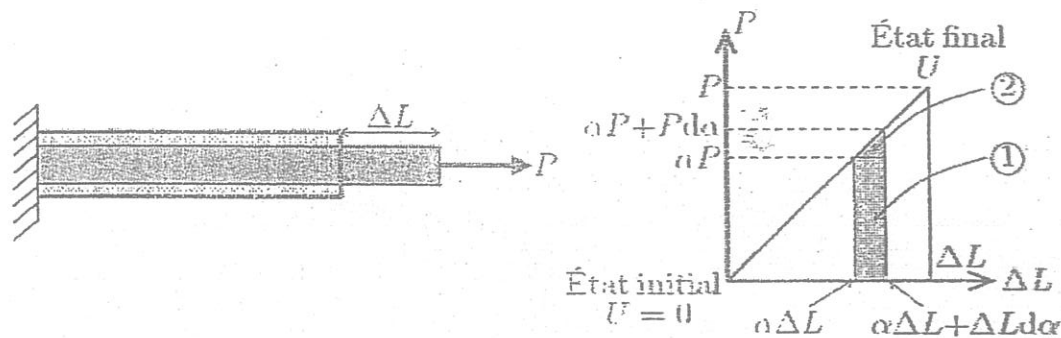


FIGURE 4.15 – Diagramme de l'énergie potentielle de déformation d'une barre sollicitée en traction ($P = cte$)

La variation de l'énergie potentielle de déformation entre les deux états intermédiaires est la somme des aires ① et ② et est exprimée par :

$$\begin{aligned} \Delta U &= \underbrace{\alpha P \Delta L d\alpha}_{\text{①}} + \underbrace{0.5 d\alpha P \cdot d\alpha \Delta L}_{\text{② (2}^{\text{ème}} \text{ ordre)}} \\ &= P \Delta L d\alpha \end{aligned} \quad (4.78)$$

pour toute la longueur de la poutre on a donc :

$$U = \int_0^1 P \Delta L d\alpha \quad (4.79)$$

$$= \frac{1}{2} P \Delta L \quad (4.80)$$

or on a :

$$\Delta L = \frac{PL}{EA} \quad (4.81)$$

$$\Rightarrow \boxed{U = \frac{P^2 L}{2EA}} \quad (4.82)$$

4.3.2 Cas d'un effort normal N variable

Par analogie à l'expression (4.82) concernant un effort normal N constant, on peut généraliser cette expression pour le cas général d'un effort normal N

variable par :

$$U = \int_0^L \frac{N^2(x)}{2E(x)A(x)} dx \quad (4.83)$$

avec x est dirigé suivant l'axe longitudinal de la poutre.

⇨ Exercice 5 :

Démontrer l'expression de l'énergie potentielle de déformation de la poutre suspendue de la figure (4.16) soumise à son propre poids.

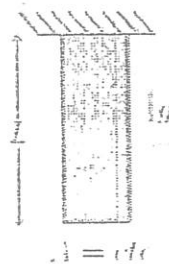


FIGURE 4.16 – Poutre suspendue soumise à son propre poids

⇨ Solution 5 :

L'énergie potentielle de déformation est donnée par :

$$U = \int_0^L \frac{N^2(x)}{2E(x)A(x)} dx \quad (4.84)$$

$$= \frac{1}{2EA} \int_0^L N^2(x) dx \quad (4.85)$$

$$= \frac{1}{2EA} \int_0^L (\gamma Ax)^2 dx \quad (4.86)$$

$$\rightarrow U = \frac{\gamma^2 AL^3}{6E} \quad (4.87)$$

4.3.3 Application pour un système réticulé

Considérons le système réticulé simplifié de la figure (4.17). On cherche à calculer son énergie de déformation U .

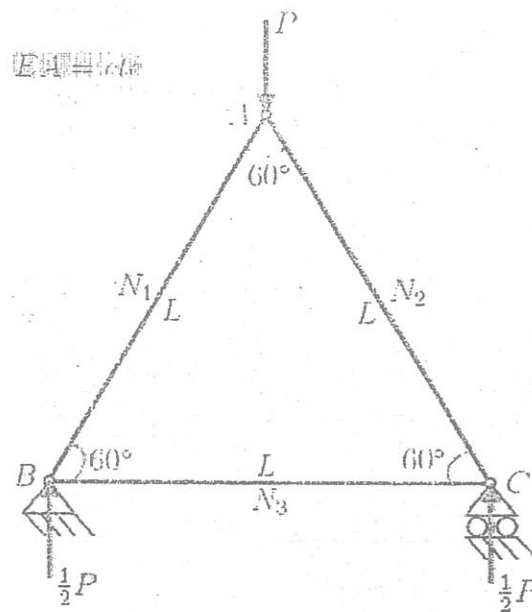


FIGURE 4.17 – Système réticulé triangulaire

Calcul des efforts des barres :

Nœud A : ($N_1 = N_2$)

$$2N_1 \cos 30 = -P \quad (4.88)$$

$$\rightarrow N_1 = N_2 = \frac{-P}{\sqrt{3}} \quad (4.89)$$

Nœud B :

$$N_3 = -N_1 \cos 60 = \frac{P}{2\sqrt{3}} \quad (4.90)$$

donc :

$$U = 2U_1 + U_3 = 2 \left(\frac{N_1^2 L}{2EA} \right) + \frac{N_3^2 L}{2EA} = \frac{3 P^2 L}{8 EA} \quad (4.91)$$

4.4 Théorème de CASTIGLIANO

C'est l'un des théorèmes énergétiques les plus importants admettant divers types d'applications :

- Détermination des déplacements des différents points d'un système (flèches) ;

- Résolution des systèmes hyperstatiques (intérieurement et extérieurement).

Énoncé : La dérivée partielle de l'énergie potentielle de déformation par rapport à une force (généralisée) est égale au déplacement du point d'application de la force dans la direction de celle-ci (c-à-d la projection du déplacement total sur le support de la force considérée) (voir figure 4.18).

$$\frac{\partial U}{\partial P} = \delta \quad (4.92)$$

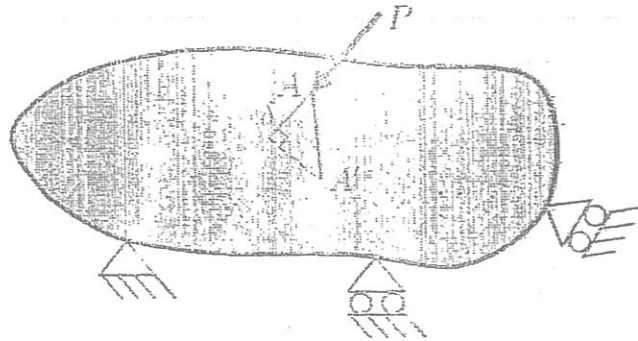


FIGURE 4.18 – Déplacement du point d'application d'une force généralisée

On appelle force généralisée :

- soit une force ponctuelle (déplacement linéique δ);
- soit un moment ponctuel (rotation θ).

\pencil dem.

Soit un corps élastique sollicité par un système de forces extérieures $(P_1, \dots, P_i, \dots, P_n)$ travaillant dans le domaine élastique (figure 4.19).

Les déplacements des points d'application des efforts sont :

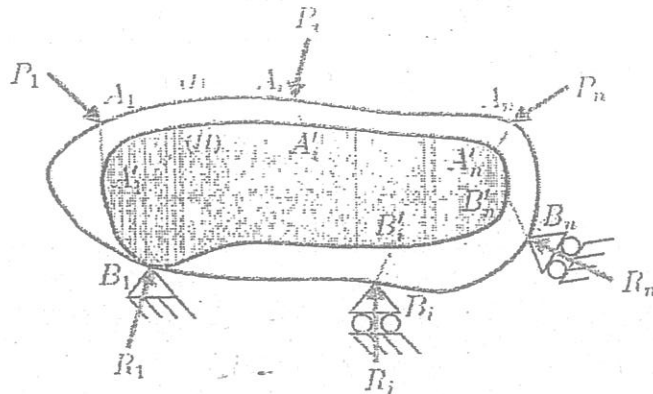


FIGURE 4.19 – Déformation d'un corps sollicité

$$\begin{aligned}
 A_1 &\rightarrow A'_1 & (\delta_1 \text{ dans le sens de } P_1) \\
 A_2 &\rightarrow A'_2 & (\delta_2 \text{ dans le sens de } P_2) \\
 A_i &\rightarrow A'_i & (\delta_i \text{ dans le sens de } P_i) \\
 A_n &\rightarrow A'_n & (\delta_n \text{ dans le sens de } P_n)
 \end{aligned}$$

Les travaux des efforts et les énergies potentielles de déformation correspondantes sont :

$$\begin{aligned}
 P_1 &\rightarrow W_1 \rightarrow U_1 \\
 P_2 &\rightarrow W_2 \rightarrow U_2 \\
 P_i &\rightarrow W_i \rightarrow U_i \\
 P_n &\rightarrow W_n \rightarrow U_n
 \end{aligned}$$

L'énergie potentielle de déformation totale est donc :

$$U = \sum_{i=1}^n U_i = U(P_1, \dots, P_i, \dots, P_n) \quad (4.93)$$

Dans un accroissement infinitésimal dP_i à P_i , il en résulte que :

$$U \rightarrow U + dU = U + \frac{\partial U}{\partial P_i} dP_i \quad (4.94)$$

l'effort supplémentaire dP_i provoque un déplacement supplémentaire $d\delta_i$. supposant que dP_i est appliqué en premier lieu d'une façon lente et progressive. son travail dans le déplacement provoqué $d\delta_i$ est :

$$W_{dP_i} = \frac{1}{2} dP_i d\delta_i \quad (4.95)$$

ensuite on applique le système initial $(P_1, \dots, P_i, \dots, P_n)$. Le travail de dP_i dans le nouveau déplacement provoqué par P_i du système est :

$$W'_{dP_i} = dP_i \delta_i \quad (4.96)$$

le travail total nous donne :

$$U + dU \equiv \frac{1}{2} dP_i d\delta_i + U + dP_i \delta_i \quad (4.97)$$

$$\simeq U + dP_i \delta_i \quad (4.98)$$

en prenant en compte l'équation (4.94) :

$$U + \frac{\partial U}{\partial P_i} dP_i = U + \delta_i dP_i \quad (4.99)$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial U}{\partial P_i} = \delta_i} \quad (4.100)$$

↔ Exercice 6 :

Soit le système réticulé de la figure (4.20).

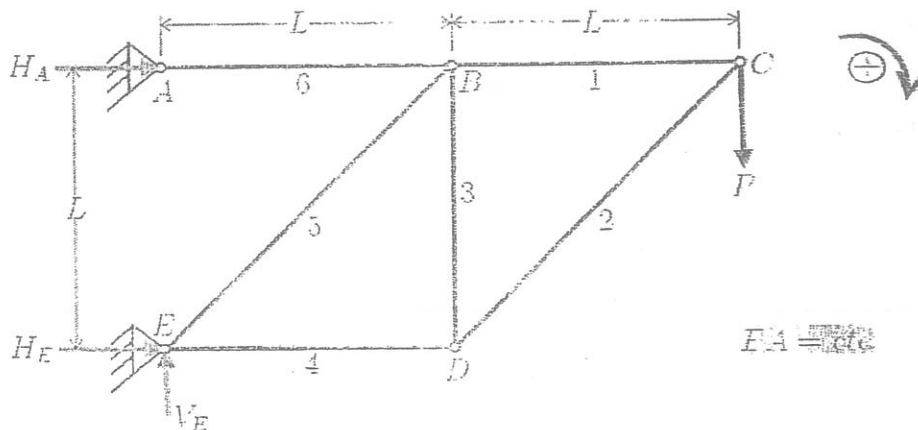


FIGURE 4.20 - Schéma de l'exercice 6

1. Calculer l'énergie potentielle de déformation du système ?
2. Calculer le déplacement vertical du point C ?

⇒ Solution 6 :

1. Réactions d'appuis :

$$\sum M_{/E} = 0 \quad \Rightarrow \quad P \cdot 2L = H_A L \quad (4.101)$$

$$\Rightarrow \quad H_A = 2P \quad (4.102)$$

$$\sum \vec{F} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} H_E = 2P \\ V_E = P \end{cases} \quad (4.103)$$

Après calcul des efforts dans les barres, on obtient :

Barre	1	2	3	4	5	6
N	P	$-P\sqrt{2}$	P	$-P$	$-P\sqrt{2}$	2P
E	L	$L\sqrt{2}$	L	L	$L\sqrt{2}$	L
U_i	$\frac{P^2 L}{2EA}$	$\frac{2P^2 L\sqrt{2}}{2EA}$	$\frac{P^2 L}{2EA}$	$\frac{P^2 L}{2EA}$	$\frac{2P^2 L\sqrt{2}}{2EA}$	$\frac{4P^2 L}{2EA}$

L'énergie potentielle de déformation du système est donc :

$$U = \sum_{i=1}^6 U_i = \frac{P^2 L}{2EA} (7 + 4\sqrt{2}) \quad (4.104)$$

2. Le déplacement vertical du point C peut être calculé simplement comme suit :

$$v_C = \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{PL}{EA} (7 + 4\sqrt{2}) \quad (4.105)$$

⇒ Exercice 7 :

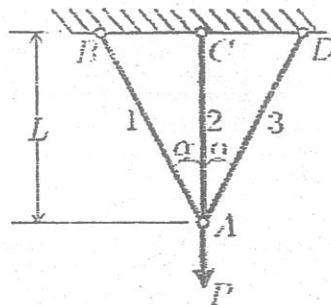


FIGURE 4.21 – Schéma de l'exercice 7

Déterminer le déplacement vertical du point A de la figure (4.21) ?

⇒ Solution 7 :

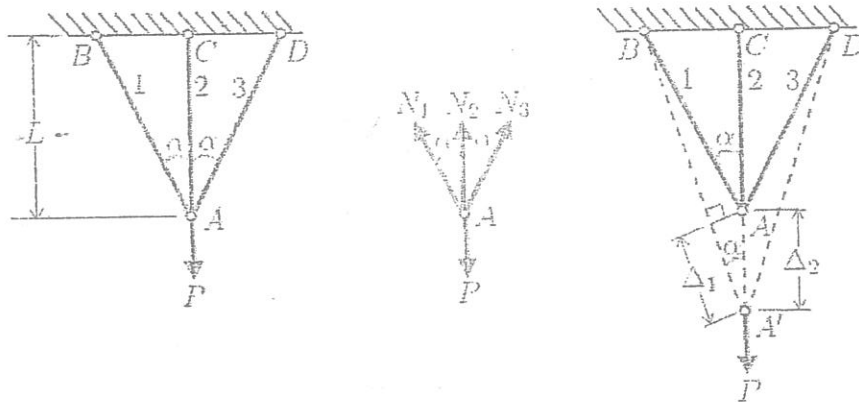


FIGURE 4.22 – Solution de l'exercice 7

On a par symétrie :

$$N_1 = N_3 \quad (4.106)$$

équilibre du nœud A :

$$2N_1 \cos \alpha + N_2 - P = 0 \quad (4.107)$$

on a donc une seule équation avec 2 inconnues N_1 et N_2 (2^{ème} équation déjà utilisée par raison de symétrie).

On peut recourir aux déformations du système pour obtenir une 2^{ème} équation.

Hypothèse : L'angle α change peu après déformation.

→ on suppose qu'il reste inchangé.

On a : (petit triangle)

$$\Delta_1 = \Delta_2 \cos \alpha \quad (4.108)$$

nous savons que :

$$\Delta = \frac{NL}{AE} \quad (4.109)$$

$$\rightarrow \begin{cases} \Delta_1 = \frac{N_1 \cdot \frac{L}{\cos \alpha}}{AE} \\ \Delta_2 = \frac{N_2 \cdot L}{AE} \end{cases} \quad (4.110)$$

$$\rightarrow \frac{N_1 L}{AE \cos \alpha} = \frac{N_2 L}{AE} \cos \alpha \quad (4.111)$$

$$\rightarrow N_1 = N_2 \cos^2 \alpha \quad (4.112)$$

$$(4.107) \rightarrow 2N_2 \cos^2 \alpha \cos \alpha + N_2 - P = 0 \quad (4.113)$$

$$\rightarrow N_2 = \frac{P}{1 + 2 \cos^3 \alpha} \quad (4.114)$$

$$\rightarrow N_1 = N_3 = \frac{P \cos^2 \alpha}{1 + 2 \cos^3 \alpha} \quad (4.115)$$

Sachant que :

$$U = \frac{N^2 L}{2EA} \quad (4.116)$$

on a donc :

$$U = U_1 + U_2 + U_3 \quad (4.117)$$

$$= 2U_1 + U_2 \quad (4.118)$$

$$= 2 \cdot \frac{P^2 \cos^4 \alpha}{(1 + 2 \cos^3 \alpha)^2} \frac{L}{\cos \alpha \cdot 2EA} + \frac{P^2}{(1 + 2 \cos^3 \alpha)^2} \frac{L}{2EA} \quad (4.119)$$

$$= \frac{P^2 L}{2EA} \left(\frac{2 \cos^3 \alpha}{(1 + 2 \cos^3 \alpha)^2} + \frac{1}{(1 + 2 \cos^3 \alpha)^2} \right) \quad (4.120)$$

$$\rightarrow U = \frac{P^2 L}{2EA(1 + 2 \cos^3 \alpha)} \quad (4.121)$$

Le déplacement du point A est :

$$v_A = \Delta_2 = \frac{N_2 L}{AE} = \frac{PL}{(1 + 2 \cos^3 \alpha)AE} \quad (4.122)$$

On retrouve le déplacement du point A en appliquant le théorème de CASTIGLIANO :

$$v_A = \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{PL}{EA(1 + 2 \cos^3 \alpha)} \quad (4.123)$$

↔ Exercice 8 :

1. Calculer l'expression du déplacement du point A ?

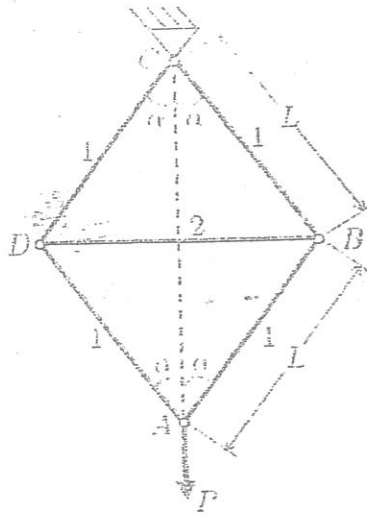


FIGURE 4.23 - Schéma de l'exercice 8

2. A.N. : $E = 2 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$, $\alpha = 45^\circ$
 $L = 1 \text{ m}$, $A = 2 \text{ cm}^2$, $P = 5 \text{ t}$.

Chercher la valeur numérique du déplacement du point A ?

⇒ Solution 8 :

1. Équilibre du nœud C :

$$P - 2N_1 \cos \alpha = 0 \quad (4.124)$$

$$\Rightarrow N_1 = \frac{P}{2 \cos \alpha} \quad (4.125)$$

Équilibre du nœud B :

$$N_2 - 2N_1 \sin \alpha = 0 \quad (4.126)$$

$$\Rightarrow N_2 = P \tan \alpha \quad (4.127)$$

L'énergie potentielle du système est :

$$U = 4U_1 + U_2 \quad (4.128)$$

$$= 4 \cdot \frac{P^2}{4 \cos^2 \alpha} \cdot \frac{L}{2EA} + P^2 \tan^2 \alpha \cdot \frac{2L \sin \alpha}{2EA} \quad (4.129)$$

$$= \frac{P^2 L}{2EA} \left(\frac{1}{\cos^2 \alpha} + 2 \sin \alpha \cdot \tan^2 \alpha \right) \quad (4.130)$$

sachant que :

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \tan^2 \alpha \quad (4.131)$$

on a donc :

$$U = \frac{P^2 L}{2EA} (1 + \tan^2 \alpha (1 + 2 \sin \alpha)) \quad (4.132)$$

Le déplacement du point A est donc :

$$v_A = \frac{PL}{EA} (1 + \tan^2 \alpha (1 + 2 \sin \alpha)) \quad (4.133)$$

2. A.N. : $E = 2.10^6 \text{ kg/cm}^2$, $\alpha = 45^\circ$, $L = 1 \text{ m}$, $A = 2 \text{ cm}^2$, $P = 5 \text{ t}$.

En remplaçant dans (4.133), on obtient :

$$v_A = 0,426 \text{ cm} \quad (4.134)$$

4.5 Théorème de CASTIGLIANO 'numérique'

Pour un problème donné, supposons que les forces extérieures, les réactions d'appuis, les efforts intérieurs et par conséquent l'énergie potentielle de déformation U ne sont connus que numériquement.

Comment appliquer donc le théorème de CASTIGLIANO ?

Par rapport à quoi doit-on dériver pour avoir les déplacements ?

Reprenons l'exercice précédent :

N°	L_i (m)	S_i (kg)	S'_i
1	1	3536	0,707
2	$\sqrt{2}$	-5000	-1

avec S_i est l'effort dans la barre i connu numériquement et S'_i est donné par :

$$S'_i = \frac{\partial S_i}{\partial P} \quad (4.135)$$

pour cet exemple :

$$\begin{cases} S'_1 = \frac{3536}{5000} = 0,707 \\ S'_2 = \frac{-5000}{5000} = -1 \end{cases} \quad (4.136)$$

L'énergie potentielle de déformation est exprimée par :

$$U = \sum_{i=1}^n \frac{S_i^2 L_i}{2E_i A_i} \quad (4.137)$$

le déplacement vertical du point A est :

$$v_A = \frac{\partial U}{\partial P} \quad (4.138)$$

$$= \sum_{i=1}^n \frac{2S_i L_i}{2E_i A_i} \frac{\partial S_i}{\partial P} \quad (4.139)$$

$$\rightarrow \boxed{v_A = \sum_{i=1}^n \frac{S_i L_i}{E_i A_i} S_i'} \quad (4.140)$$

en appliquant cette formule, on obtient le déplacement :

$$v_A = \frac{1}{2.10^6 \cdot 2} (4.100.3536.0,707 + \sqrt{2}.100.(-5000).(-1)) \quad (4.141)$$

$$= 0,427 \text{ cm} \quad (4.142)$$

on retrouve donc le résultat de l'exercice précédent.

⇨ Exercice 9 :

Calculer le déplacement horizontal u_C du point C de la figure (4.24) ?

On donne : $\alpha = 60^\circ$, $EA = \text{cte}$

⇨ Solution 9 :

Le problème peut être résolu par les deux méthodes directe et numérique du théorème de CASTIGLIANO :

Méthode directe :

Dans le cas général et selon que nous recherchons le déplacement horizontal u_C ou le déplacement vertical u_C , les réactions d'appuis H_A , V_A et V_D sont fonction de de la charge appliquée P_H ou la charge P_V .

Les efforts des barres N_i sont donc, dans le cas général, fonctions de ces charges appliquées P_H et P_V :

$$N_i = N_i(P_H, P_V) \quad (4.143)$$

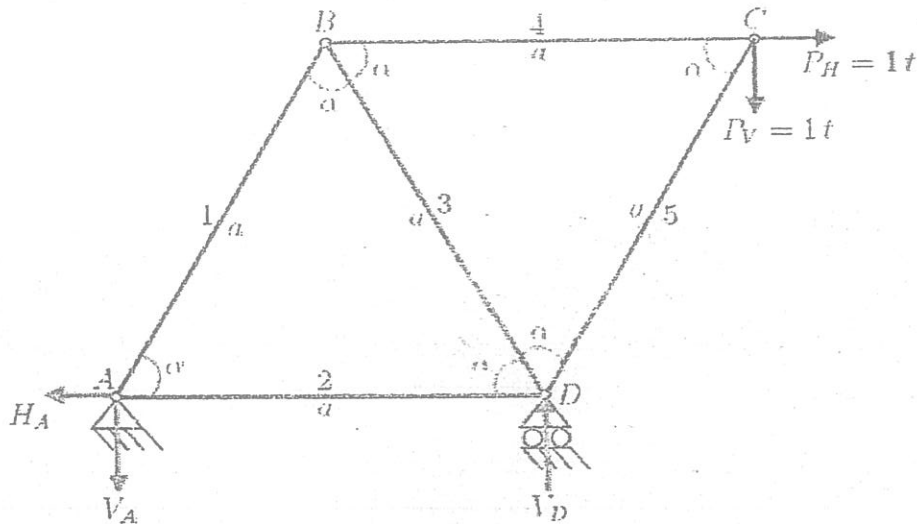


FIGURE 4.24 - Schéma de l'exercice 9

Les déplacements du nœud C sont obtenus par la formule (4.92) :

$$u_C = \frac{\partial U}{\partial P_H} \quad (4.144)$$

$$v_C = \frac{\partial U}{\partial P_V} \quad (4.145)$$

L'objectif ici est de résoudre l'exercice par la méthode numérique présentée ci-bas.

Méthode numérique :

En utilisant la méthode des nœuds, on retrouve les efforts S_i^0 dus au chargement réel P_H .

Les S_i' sont obtenus par la même méthode en appliquant un effort virtuel horizontal au point C (même point sur lequel on cherche le déplacement et même sens).

Les résultats des calculs sont présentés dans le tableau (4.1).

Le déplacement u_C est calculé par l'équation (4.140) :

$$u_C = \sum_{i=1}^5 \frac{S_i L_i}{E_i A_i} S_i' \quad (4.146)$$

N°	$S_i (m)$	$L_i (kg)$	S_i'
1	1,57	a	1
2	0,23	a	$\frac{1}{2}$
3	-1,57	a	-1
4	1,57	a	1
5	-1,15	a	0

TABLE 4.1 - Résultats des calculs

en appliquant cette formule on obtient :

$$u_C = \frac{a}{EA} \left(1,57 + \frac{0,23}{2} + 1,57 + 1,57 \right) \quad (4.147)$$

$$= 4,825 \frac{a}{EA} \quad (4.148)$$

⇒ Exercice 10 :

Déterminer le déplacement vertical du nœud C du système réticulé de la figure (4.25) ?

Pour toutes les membrures, on a : $A = 400 \text{ mm}^2$ et $E = 200 \text{ GPa}$.

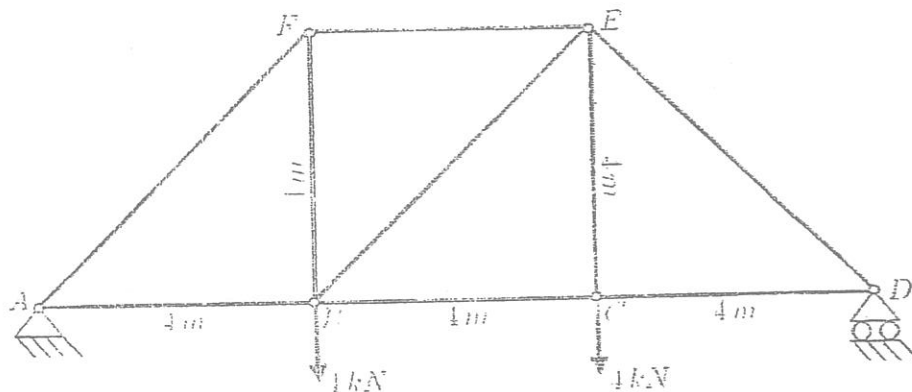


FIGURE 4.25 - Schéma de l'exercice 10

⇒ Solution 10 :

Les réactions d'appuis ainsi que les efforts développés dans les barres correspondant à l'application du chargement réel extérieur sont présentés sur

la figure (4.26).

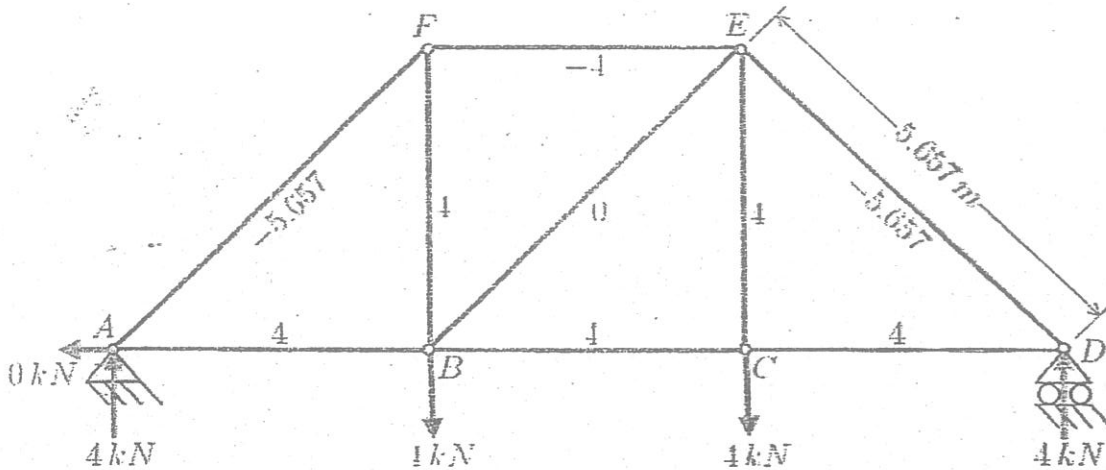


FIGURE 4.26 – Chargement réel (S_i) - Exercice 10

Pour calculer les S'_i , on applique un effort virtuel P verticalement au point C . Les résultats des calculs pour cette charge sont présentés dans la figure (4.27).

Les valeurs du facteur $S_i L_i S'_i$ sont présentées sur le schéma de la figure (4.28).

Le déplacement vertical du nœud C est calculé donc par :

$$v_C = \sum_{i=1}^9 \frac{S_i L_i}{E_i A_i} S'_i \quad (4.149)$$

$$= \frac{1}{EA} (15,07 + 35,33 + 210,67 + 16 + 30,18) \quad (4.150)$$

$$= \frac{72,4 \text{ kN.m}}{400 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot 200 \cdot 10^6 \text{ kN/m}^2} \quad (4.151)$$

d'où :

$$v_C = 1,23 \text{ mm} \quad (4.152)$$

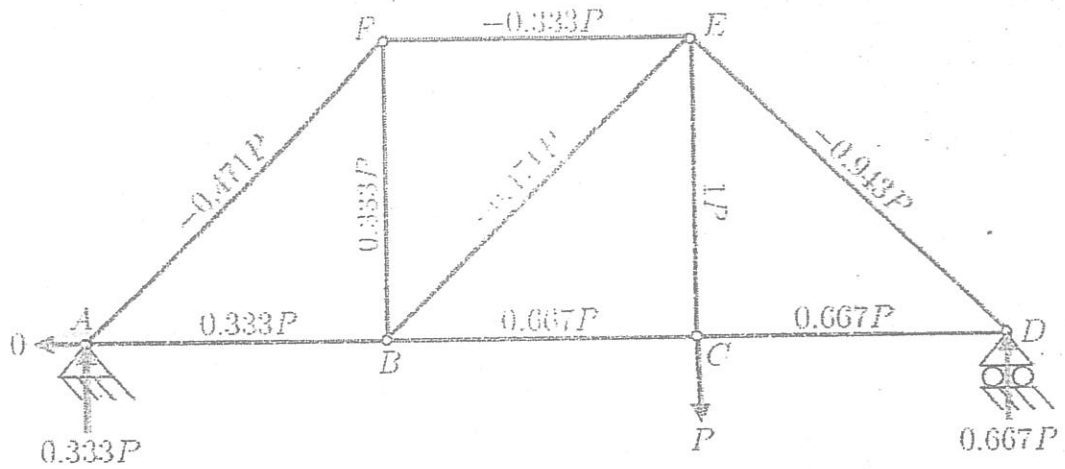


FIGURE 4.27 - Chargement virtuel $P (S'_i)$ - Exercice 10

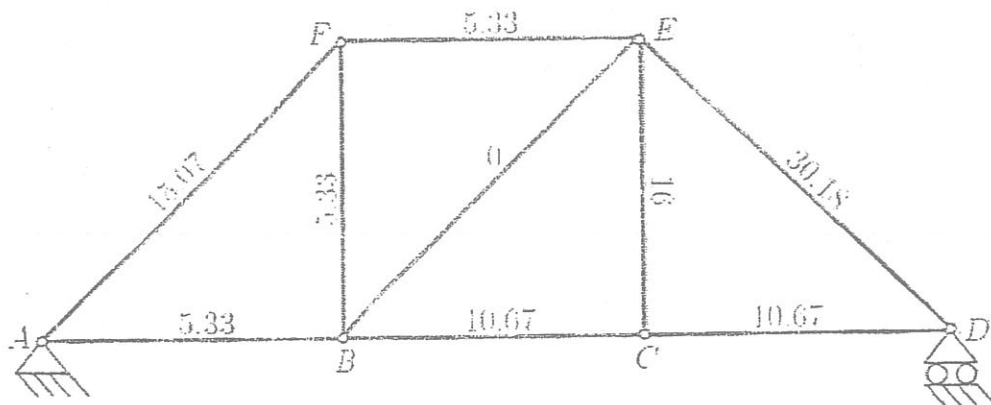


FIGURE 4.28 - Valeurs de $S_i L_i^0$ - Exercice 10

4.5.1. Cas général

On cherche à déterminer le déplacement d'un point où ne s'exerce **aucune** force et dans une direction différente de celles des forces appliquées **au** système étudié. Voir l'exemple de la figure (4.29) où on cherche le déplacement vertical v_M au point M .

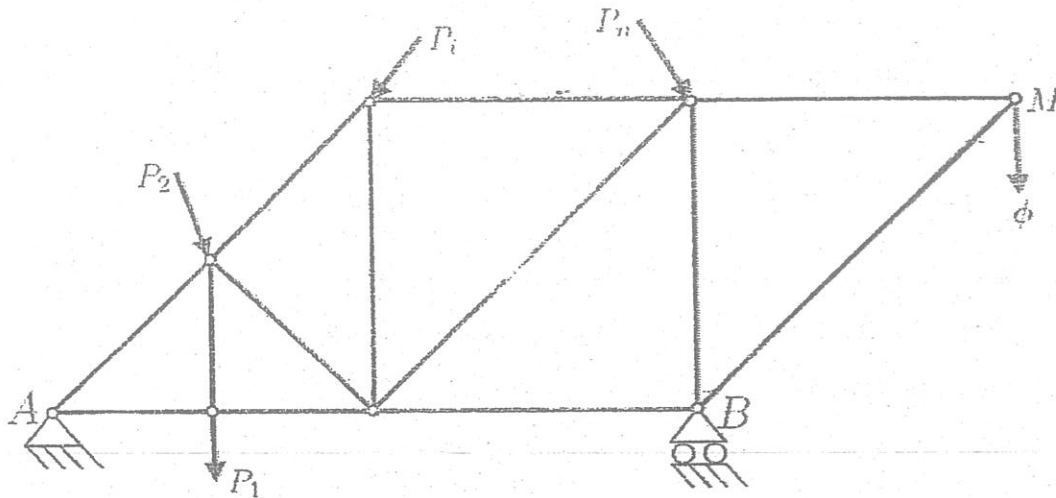


FIGURE 4.29 - Déplacement d'un nœud non chargé

La méthode générale consiste à introduire une force ϕ dans la **direction** du déplacement recherché. On conduit les calculs comme dans le **cas normal** et on annule l'effort virtuel ϕ dans le résultat final.

On a pour les réactions d'appuis :

$$V_A, H_A, V_B = f_{1,2,3}(P_1, \dots, P_i, \dots, P_n, \phi) \quad (4.153)$$

pour les efforts dans les barres et l'énergie potentielle de déformation, on a :

$$S_i = S_i(P_1, \dots, P_i, \dots, P_n, \phi) \quad (4.154)$$

$$U_i = U_i(P_1, \dots, P_i, \dots, P_n, \phi) \quad (4.155)$$

En appliquant le théorème de CASTIGLIANO, on a le déplacement vertical du point M :

$$v_M = \left(\frac{\partial U}{\partial \phi} \right)_{\phi=0} \quad (4.156)$$

Dans le domaine d'élasticité du matériau, les efforts dans les barres sont fonctions linéaires des sollicitations extérieures et on peut écrire :

$$S_i = S_i(P_1, \dots, P_i, \dots, P_n, \phi) = S_i(P_1, \dots, P_i, \dots, P_n) + S_i(\phi) \quad (4.157)$$

L'énergie potentielle de déformation de toutes les barres s'écrit :

$$U = \sum_i \frac{[S_i(P_1, \dots, P_i, \dots, P_n, \phi)]^2}{2E_i A_i} L_i \quad (4.158)$$

$$\Rightarrow v_M = \left[\sum_i L_i \frac{2S_i(P_1, \dots, P_n, \phi) \partial S_i(P_1, \dots, P_n, \phi)}{2E_i A_i \partial \phi} \right]_{\phi=0} \quad (4.159)$$

$$= \left[\sum_i L_i \frac{2[S_i(P_1, \dots, P_n) + S_i(\phi)] \partial S_i(\phi)}{2E_i A_i \partial \phi} \right]_{\phi=0} \quad (4.160)$$

$$= \sum_i \frac{S_i L_i \partial S_i(\phi)}{E_i A_i \partial \phi} \quad (4.161)$$

$$\Rightarrow \boxed{v_M = \sum_i \frac{S_i L_i}{E_i A_i} S'_i} \quad (4.162)$$

S'_i étant l'effort dans la barre i si l'on donne à ϕ une valeur unité.

⇒ Exercice 11 :

Reprenons le schéma de l'exercice 6 précédent.

On cherche le déplacement horizontal u_C par la méthode numérique.

⇒ Solution 11 :

Après simplification, on trouve facilement que :

$$S'_1 = S'_6 = 1 \quad (4.163)$$

$$S'_2 = S'_3 = S'_4 = S'_5 = 0 \quad (4.164)$$

d'où :

$$u_C = \frac{L}{E A} (P + 2P') \quad (4.165)$$

$$= \frac{3PL}{E A} \quad (4.166)$$

4.6 Théorème de MENABREA (2^{ème} application du théorème de CASTIGLIANO)

On considère un système quelconque qui est :

- hyperstatique extérieurement de degré m ($\exists m$ liaisons surabondantes)
- hyperstatique intérieurement de degré n ($\exists n$ barres surabondantes)

La méthode de résolution consiste à décomposer le système hyperstatique initial en $(m + n + 1)$ systèmes isostatiques 'associés'. On applique dans la suite le théorème de CASTIGLIANO comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial U}{\partial X_i} = 0 \\ \frac{\partial U}{\partial R_j} = 0 \end{array} \right. \quad (4.167)$$

X_i étant l'effort hyperstatique inconnu dans une barre surabondante, R_j est la réaction hyperstatique inconnue au niveau d'une liaison surabondante.

X_i et R_j sont les grandeurs hyperstatiques inconnues du problème.

Le terme $\frac{\partial U}{\partial X_i} = 0$ traduit la continuité dans la barre surabondante ;
Le terme $\frac{\partial U}{\partial R_j} = 0$ traduit que le déplacement du point d'application de la liaison de réaction est nul.

Les deux termes de l'équation (4.167) traduisent le fait que les grandeurs hyperstatiques sont des grandeurs qui minimisent l'énergie de déformation du système.

4.6.1 Détermination d'un effort hyperstatique

Soit le système réticulé de la figure (4.30).

Le système est extérieurement isostatique.

Intérieurement :

$$b = 2n - 3 = 2 \times 4 - 3 = 5 \neq 6 \quad (4.168)$$

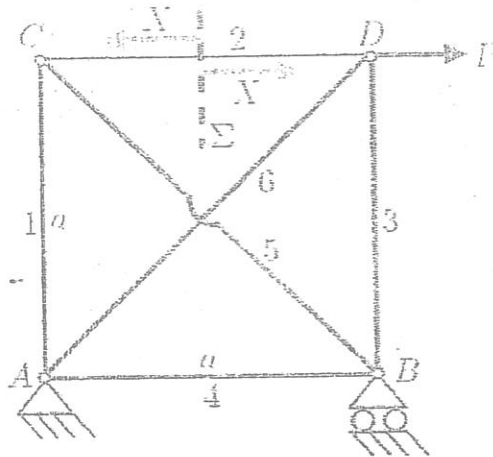


FIGURE 4.30 – Système réticulé hyperstatique

Le système est donc hyperstatique intérieurement de degré 1. Il existe une barre surabondante.

Considérons l'effort X dans la barre 2 comme inconnue hyperstatique du système.

On remplace la barre 2 par son effort interne X en coupant cette barre par une section Σ .

L'effort X étant inconnu, on prend un sens arbitraire (une traction). Le système devient équivalent au schéma de la figure (4.31).

On a donc :

$$S_i = S_i^0 + X.S_i' \quad (4.169)$$

où S_i est l'effort dans la barre i pour le système hyperstatique initial.

S_i^0 est l'effort dans la barre i si l'on supprime toutes les barres et les liaisons surabondantes et on garde les sollicitations extérieures P_i .

S_i' est l'effort dans la barre i si l'on supprime les charges extérieures P_i et on donne à X_i ou R_j une valeur unité.

L'énergie potentielle de déformation s'écrit :

$$U = \sum_{i=1}^6 \frac{S_i^2 L_i}{2E_i A_i} = \sum_{i=1}^6 \frac{(S_i^0 + X.S_i')^2 L_i}{2E_i A_i} \quad (4.170)$$

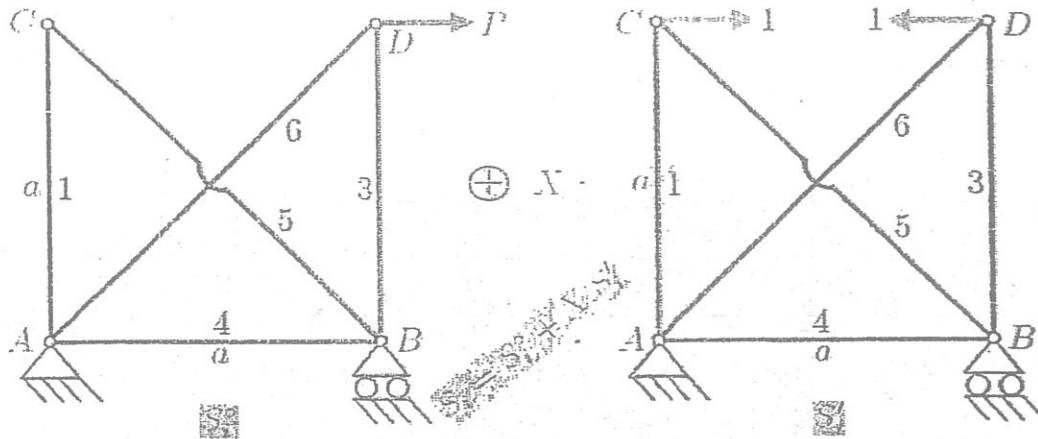


FIGURE 4.31 – Décomposition du système - Exercice 12

en applique le théorème de MENABREA :

$$\frac{\partial U}{\partial X} = 0 \quad \rightarrow \quad \sum_{i=1}^6 \frac{2(S_i^0 + X S_i^1)}{2E_i A_i} S_i^1 L_i = 0 \quad (4.171)$$

$$\rightarrow \quad \sum_{i=1}^6 \frac{S_i^0 S_i^1 L_i}{E_i A_i} + X \sum_{i=1}^6 \frac{S_i^1 S_i^1 L_i}{E_i A_i} = 0 \quad (4.172)$$

$$\rightarrow \quad X = - \frac{\sum_{i=1}^6 \frac{S_i^0 S_i^1 L_i}{E_i A_i}}{\sum_{i=1}^6 \frac{S_i^1 S_i^1 L_i}{E_i A_i}} \quad (4.173)$$

↔ Exercice 12 :

Déterminer les efforts dans les barres du système réticulé de la figure (4.32).

⊕ Solution 12 :

On a :

$$2n - r = 2 \times 10 - 3 = 17 \neq b = 18 \quad (4.174)$$

le système est hyperstatique de degré 1.

Prenons l'effort X dans la barre 18 comme grandeur hyperstatique inconnue du problème. Le système est donc équivalent au schéma de la fi-

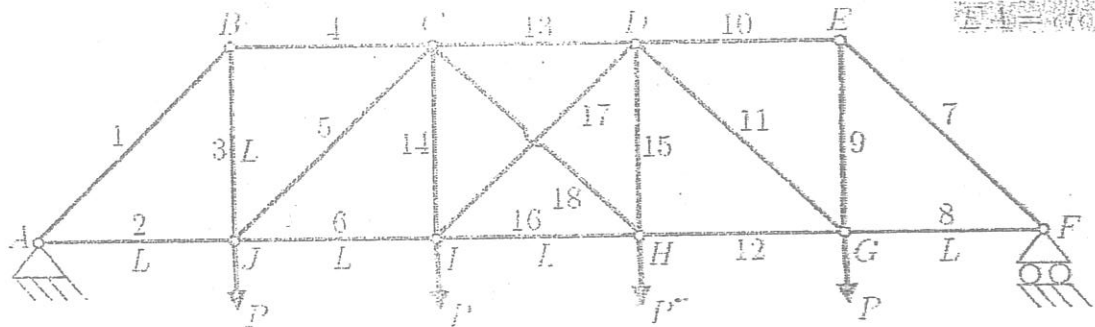


FIGURE 4.32 - Schéma de l'exemple 7

gure (4.33).

Le récapitulatif des efforts calculés est présenté dans le tableau (4.2). L'effort X est calculé par le biais de la formule (4.173).

N°	L_i	S_i^0/P	S_i'	S_i/P	N°	L_i	S_i^0/P	S_i'	S_i/P
1	$L\sqrt{2}$	$-2\sqrt{2}$	0	$-2\sqrt{2}$	10	L	-2	0	-2
2	L	2	0	2	11	$L\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	0	$-\sqrt{2}$
3	L	2	0	2	12	L	3	0	3
4	L	-2	0	-2	13	L	-3	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	$\frac{-5+\sqrt{2}}{2}$
5	$L\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	0	$-\sqrt{2}$	14	L	1	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	$\frac{3-\sqrt{2}}{2}$
6	L	3	0	3	15	L	1	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	$\frac{3-\sqrt{2}}{2}$
7	$L\sqrt{2}$	$-2\sqrt{2}$	0	$-2\sqrt{2}$	16	L	3	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	$\frac{7-\sqrt{2}}{2}$
8	L	2	0	2	17	$L\sqrt{2}$	0	1	$\frac{2-\sqrt{2}}{2}$
9	L	2	0	2	18	$L\sqrt{2}$	0	1	$\frac{2-\sqrt{2}}{2}$

TABLE 4.2 - Résultats des calculs

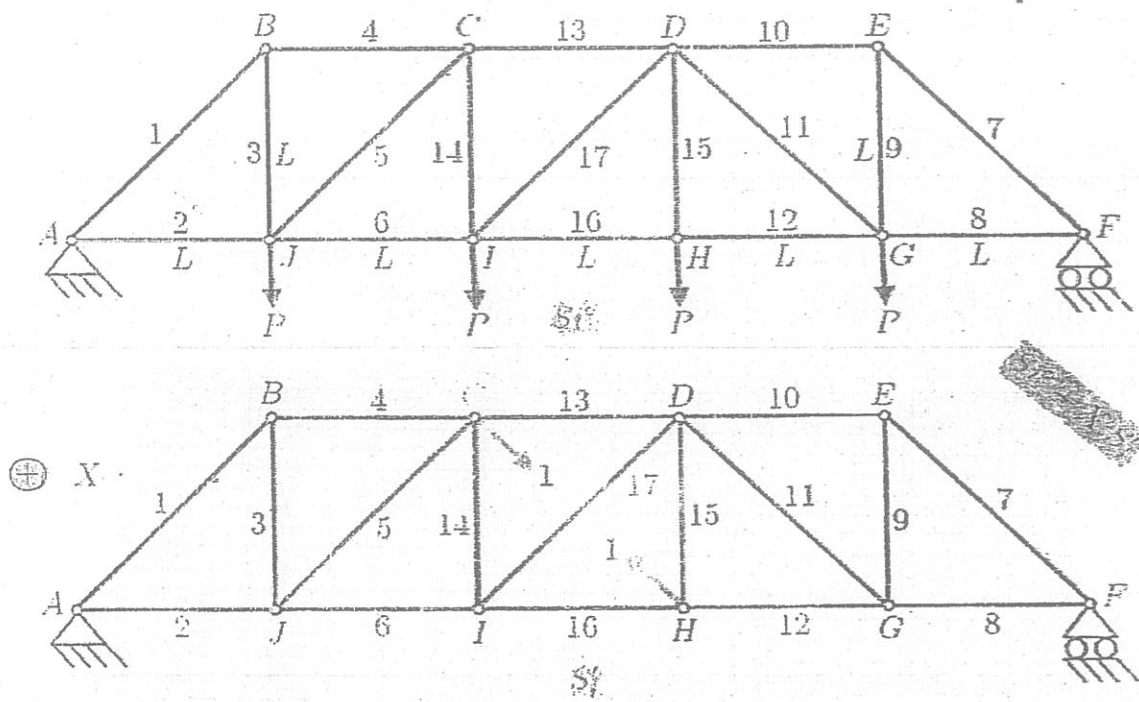


FIGURE 4.33 - Décomposition du système - Exemple 7