



Ecole Hassania des Travaux Publics

Cours :

Résistance Des Matériaux  
(RDM)

Première Année Génie Civil

A.U. : 2011/12

Pr. Mustapha RGUIG



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Généralités et rappels</b>	<b>7</b>
1.1	Introduction . . . . .	7
1.2	Objectifs de la RDM . . . . .	8
1.3	Rappels de la MMC . . . . .	10
1.3.1	Définition des contraintes . . . . .	10
1.3.2	État des contraintes en un point . . . . .	11
1.3.3	Contraintes principales . . . . .	12
1.3.4	Définition des déformations . . . . .	13
1.3.5	Principe d'équivalence . . . . .	14
1.4	Théorie des poutres . . . . .	15
1.4.1	Définitions . . . . .	15
1.4.2	Forces extérieures appliquées aux poutres . . . . .	16
1.4.3	Réactions des appuis des poutres . . . . .	21
1.5	Hypothèses de la théorie des poutres . . . . .	22
1.5.1	Principe de Saint-Venant . . . . .	22
1.5.2	Principe des dimensions initiales . . . . .	22
1.5.3	Principe de Navier-Bernoulli . . . . .	23
1.5.4	Principe de superposition . . . . .	24
1.5.5	Autres conditions pour la validité des hypothèses de la théorie des poutres . . . . .	25
1.5.6	Notion de sécurité des structures . . . . .	25
1.5.7	exercices . . . . .	28
<b>2</b>	<b>Calcul géométrique des sections</b>	<b>30</b>
2.1	Moments statiques . . . . .	30
2.1.1	Coordonnées du centre de gravité . . . . .	31
2.1.2	Effet d'une translation d'axes . . . . .	33
2.2	Moments d'inertie quadratiques . . . . .	34
2.2.1	Effet d'une translation d'axes . . . . .	37
2.2.2	Théorème d'HUYGENS (STEINER) : . . . . .	38
2.2.3	Rotations d'axes . . . . .	38

2.2.4	Axes principaux d'inertie . . . . .	40
2.2.5	Rayon de giration . . . . .	42
2.3	exercices . . . . .	43
2.4	Propriétés de quelques sections simples . . . . .	45
<b>3</b>	<b>Calcul de l'effort normal</b> . . . . .	<b>48</b>
3.1	Courbe contrainte-déformation . . . . .	49
3.2	Loi de Hooke . . . . .	54
3.3	Contraintes et déformations dues aux efforts normaux . . . . .	54
3.3.1	Contraintes normales . . . . .	54
3.3.2	Allongement axial . . . . .	55
3.3.3	Contraction latérale (Coefficient de poisson) . . . . .	57
3.3.4	Contraintes dans une section inclinée . . . . .	58
3.4	Variation uniforme de température . . . . .	60
3.4.1	Déformation libre . . . . .	60
3.4.2	Déformation empêchée . . . . .	61
3.5	Diagrammes des efforts normaux $N$ (DEN) . . . . .	63
3.6	Cas des cylindres ouverts à parois minces . . . . .	66
3.6.1	Etude des contraintes . . . . .	66
3.6.2	Etude des allongements . . . . .	67
3.7	Exercices . . . . .	68
<b>4</b>	<b>Calcul des systèmes réticulés</b> . . . . .	<b>71</b>
4.1	Définitions . . . . .	71
4.2	Calcul des efforts dans les treillis plans . . . . .	74
4.2.1	Méthode des nœuds . . . . .	74
4.2.2	Nœuds particuliers . . . . .	80
4.2.3	Méthode des sections (Méthode de RITTER) . . . . .	82
4.2.4	Critère de résistance d'un treillis . . . . .	85
4.3	Énergie potentielle de déformation . . . . .	86
4.3.1	Cas d'un effort normal $N$ constant . . . . .	87
4.3.2	Cas d'un effort normal $N$ variable . . . . .	88
4.3.3	Application pour un système réticulé . . . . .	89
4.4	Théorème de CASTIGLIANO . . . . .	90
4.5	Théorème de CASTIGLIANO 'numérique' . . . . .	98
4.6	Théorème de MENABREA (2 <sup>ème</sup> application du théorème de CASTIGLIANO) . . . . .	104
<b>5</b>	<b>Calcul de la flexion des poutres</b> . . . . .	<b>108</b>
<b>6</b>	<b>Calcul des déplacements des poutres (flèches)</b> . . . . .	<b>109</b>

## TABLE DES MATIÈRES

---

3

7	Calcul du cisaillement et effort tranchant	110
8	Calcul de la torsion	111
9	Calcul du flambement des poutres (stabilité de forme)	113
A	Compléments du cours	114
A.1	Formulaire trigonométrique . . . . .	114
A.2	Intégrales de MOHR . . . . .	116

## Notations principales

$N$	Effort normal
$M, M_y, M_z$	Moments de flexion
$M_x$ ou $T$	Moment de torsion
$V, V_y, V_z$	Effort tranchant
$S$ ou $A$	Aire d'une section
$G(X_G, Y_G)$	Centre de gravité d'une section donnée
$F$ ou $P$	Effort appliqué à une section
$\tau, \tau_{ij}$	contraintes appliquées à un point matériel
$\tau_{xx}$ ou $\sigma_x$ ou $\sigma$	Contrainte normale à une section
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	Contraintes normales suivant les trois axes du repère d'étude
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	Contraintes principales en un point donné (volume élémentaire)
$(X_1, X_2, X_3)$	Repère principal des contraintes
$(x, y, z)$	Repère local lié à une poutre, $x$ est dirigé suivant l'axe de la poutre
$[\tau]$	Tenseur des contraintes
$[\epsilon]$	Tenseur des déformations
$\epsilon, \epsilon_{ij}$	Déformations appliquées à un point matériel
$\gamma, \gamma_{ij}$	Déformation transversale (ou angulaire)
$s$	Abscisse curviligne
$\vec{F}_R, \vec{M}_R$	Résultantes des efforts et des moments sur une section donnée
$u, v, \theta$	Déplacements et rotation d'un point d'une poutre sollicitée
$R_x, R_y, R_z$	Réactions d'appuis suivant les trois directions du repère d'étude
$\gamma_s$	Coefficient de sécurité pour le dimensionnement des structures
$S_y, S_z$	Moments statiques d'une section donnée par rapport aux axes $y$ et $z$

$S_{\Delta}$	Moment statique par rapport à une droite $\Delta$
$(r, \theta)$	Système de coordonnées polaires
$I_y, I_z$	Moments d'inertie quadratiques d'une section par rapport aux axes $y$ et $z$
$I_{yz}$	Produit d'inertie d'une section par rapport au système d'axes $(y, z)$
$I_{\Delta}$	Moment d'inertie quadratique d'une section par rapport à la droite $\Delta$
$I_p$	Moment d'inertie polaire d'une section
$I_{\max}, I_{\min}$	Moments d'inertie quadratiques principaux
$r_y, r_z$	Rayons de giration par rapport aux axes $y$ et $z$
$r_0$	Rayon de giration polaire
$\sigma_0$	Limite élastique d'un matériau
$\sigma_u$	Contrainte ultime d'un matériau
$\sigma_r$	Contrainte de rupture d'un matériau
$\epsilon_0$	Déformation à la limite élastique $\sigma_0$ d'un matériau
$\epsilon_r$	Déformation de rupture d'un matériau
$E$	Module de YOUNG ou module d'élasticité d'un matériau
$A_0, A_f$	ou Sections initiale et finale d'une poutre lors d'une déformation
$S_0, S_f$	
$L_0, L_f$	Longueurs initiale et finale d'une poutre lors d'une déformation
$RA$	Réduction d'une section $A$
$\Delta L, ALL$	Allongement total d'une poutre ou éprouvette
$\epsilon_e$	Déformation élastique d'un matériau
$\epsilon_p$	Déformation plastique d'un matériau
$\delta$	Déplacement axial d'une section ou un point. Longueur élémentaire d'un élément de structure
$\nu$	Coefficient de POISSON d'un matériau
$\vec{n}, \vec{t}$	Normale et tangente d'une section ou droite
$N_{\alpha}, V_{\alpha}$	Effort normal et effort tranchant dans une section inclinée d'un angle $\alpha$ par rapport à la fibre moyenne d'une poutre
$\Delta T$	Variation de température
$\alpha_L$	Coefficient de dilatation thermique
DEN	Diagramme des efforts normaux
DCL	Diagramme du corps libre
$t$	Épaisseur d'un élément de structure
$F_r, F_{\theta}$	Efforts développés dans un cylindre sous pression interne
$\sigma_{\theta}$	Contrainte normale circonférentielle dans un cylindre

---

$\delta_\theta$	Allongement circonférentiel dans un cylindre
$p$	Pression d'un liquide sur une surface de structure
$\delta_p$	Variation de rayon d'un cylindre sous pression

# Chapitre 1

## Généralités et rappels

### 1.1 Introduction

La résistance des matériaux n'étudie que des solides de formes simples tels que les « poutres ». Souvent, il est possible de modéliser des solides par des poutres, à la condition que ceux-ci respectent certaines hypothèses. L'objet de ce cours est de présenter les hypothèses de la RDM qui doivent indispensablement être vérifiées pour démarrer toute étude d'une structure. La résistance des matériaux est l'étude de la résistance et de la déformation des solides (bâtiments, ponts, barrages, diverses pièces mécaniques ...) dans le but de déterminer ou vérifier leurs dimensions afin qu'ils supportent les charges qu'ils subissent, dans des conditions de sécurité satisfaisantes et au meilleur coût (optimisation des formes, des dimensions, des matériaux ...). Son domaine d'application étant très large et les situations rencontrées nombreuses et variées, il est nécessaire de mettre en place des hypothèses simplificatrices dans le but de standardiser les cas d'étude.

Pour effectuer un calcul RDM, il est nécessaire de connaître les actions mécaniques exercées sur le mécanisme et les matériaux utilisés. L'étude RDM va permettre de définir les sollicitations et les contraintes qui en résultent. A l'aide des caractéristiques des matériaux (propriétés mécaniques), nous allons pouvoir en déduire les déformations du matériau, et dans les cas extrêmes, sa rupture.

Pour l'élève-ingénieur (ou l'ingénieur), la RDM présente une base de calcul des structures relativement simple. Il est donc nécessaire et loisible de développer l'attitude de faire appel à cette théorie pour dimensionner certaines structures (ou parties de structures) autant que possible au lieu de

faire appel à des techniques plus avancées et plus complexes telle que la méthode des éléments fini (MEF). Les moyens de programmation informatique largement disponibles actuellement nous permettent de programmer assez facilement ces techniques pour être plus compétitifs et plus productifs!!!

## 1.2 Objectifs de la RDM

Une étude RDM d'une structure donnée consiste en l'étude du comportement des éléments composant la structure sollicitée par des efforts extérieurs. Autrement, ça consiste à déterminer les contraintes, les efforts internes et les déformations générés par les sollicitations tout en prenant en compte les propriétés mécaniques et géométriques des éléments structuraux.

Dans la pratique, deux sortes d'analyses peuvent être menées en RDM :

- **VERIFICATION** et **ANALYSE** : Détermination de la charge admissible d'une structure, permet de reconnaître si la structure étudiée est capable de résister aux efforts extérieurs.
- **CONCEPTION** et **DIMENSIONNEMENT** : Dimensionner la structure (en projet) pour lui permettre de résister avec sécurité (avec des marges réglementaires) aux sollicitations prévues (charges de projet).

En général : la vérification concerne les structures existantes comme par exemple les programmes de requalification de certaines grandes structures telles que : Ponts, Barrages, Grands bâtiments, ...

La conception et le dimensionnement concerne quand à lui les structures en projet (pas encore construites) telles que la construction de nouveaux bâtiments, nouveaux barrages, nouvelles autoroutes, nouvelles centrales nucléaires, ...

Lors du calcul RDM d'une structure quelconque, les questions qu'on doit se poser et auxquelles on doit trouver des réponses sont comme suit :

- Comment peut-on représenter schématiquement la structure étudiée ?
- Quelles sont les charges qui agissent sur la structure ? comment les représente-t-on ? et comment se transmettent-elles à travers la structure ?
- Comment la structure résiste-t-elle et pourquoi ?
- Comment la structure se déforme-t-elle sous le chargement ?
- Comment et pourquoi peut-elle se rompre ? quels sont les éléments les

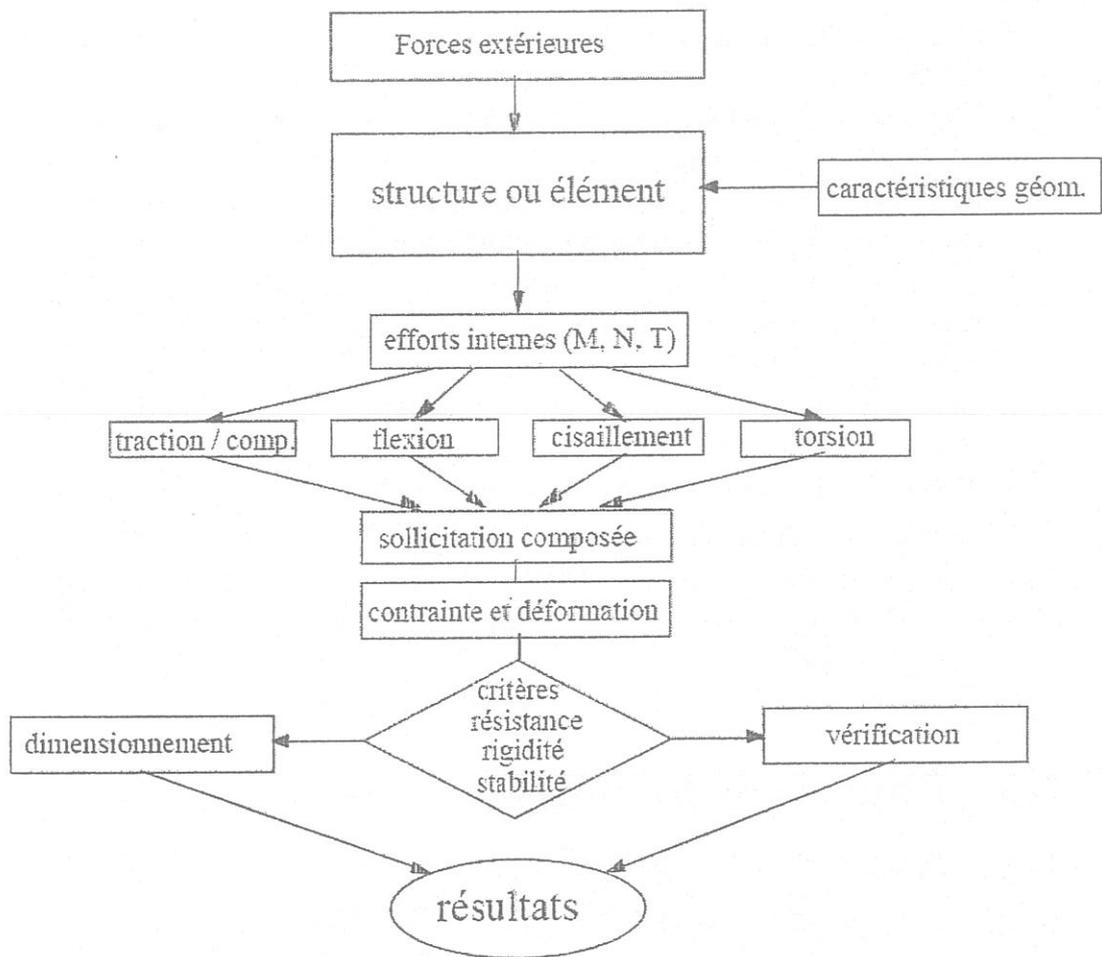


FIGURE 1.1 – Organigramme du procédé de résolution d'un problème RDM

- plus sollicités de la structure?
- Est-elle sécuritaire?
- ...

A la fin de ce cours, l'étudiant devra être capable de comprendre et de réaliser les notions et les tâches suivantes :

1. Connaître les concepts de charge, force, moment, inertie, corps déformable
2. Calculer les centroïdes et les moments d'inertie de surfaces quelconques
3. Appliquer les principes fondamentaux de l'équilibre des corps solides pour déterminer les efforts inconnus dans les systèmes isostatiques simples : réactions aux appuis et efforts internes ( $N, V, M, T$ )
4. Déterminer les contraintes et les déformations en des zones caractéristiques d'une structure sollicitée en : traction et/ou compression et/ou flexion et/ou torsion
5. Connaître les relations entre les charges appliquées, les efforts tranchants et les moments fléchissants
6. Tracer les diagrammes de  $N, V, M$  et  $T$  et interpréter ces diagrammes
7. Calculer les déformées des poutres simples
8. Comprendre le concept de stabilité de forme (flambement ou flambage) des éléments sollicités en compression et calculer les charges critiques de flambement.

## 1.3 Rappels de la MMC

### 1.3.1 Définition des contraintes

Les contraintes engendrées par les forces  $P$  sur une coupe perpendiculaire à l'axe du repère d'étude sont définies par les formules suivantes :

$$\sigma_x = \sigma_{xx} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta P_x}{\Delta A} \quad (1.1)$$

$$\tau_{xy} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta P_y}{\Delta A} \quad (1.2)$$

$$\tau_{xz} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta P_z}{\Delta A} \quad (1.3)$$

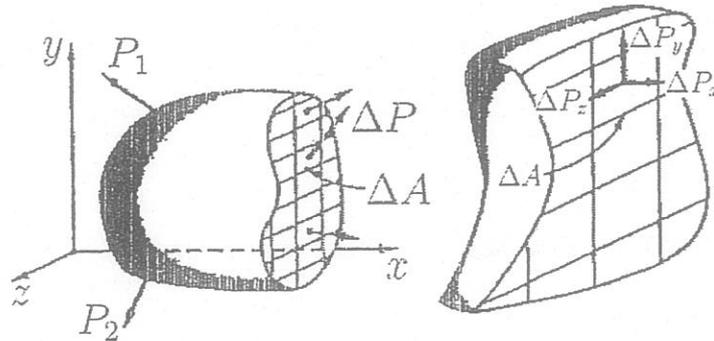


FIGURE 1.2 – Définition des contraintes sur une coupe d'un solide sollicité

### 1.3.2 État des contraintes en un point

Les 18 composantes des contraintes développées sur les 6 facettes d'un volume élémentaire sont représentées matriciellement comme dans l'équation (1.4), 9 composantes sont représentées sur la matrice parce que les contraintes sur deux facettes opposées sont égales (cours MMC). Avec pour une composante  $\tau_{ij}$  donnée, l'indice  $i$  représente l'axe normal à la facette et  $j$  représente l'axe dirigeant (parallèle) à la contrainte.

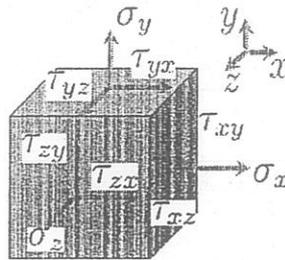


FIGURE 1.3 – État général des contraintes sur un volume élémentaire

$$[\tau] = \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

Sur un plan, les contraintes sont présentées comme dans la figure (1.4). la représentation matricielle devient dans ce cas (1.5) :

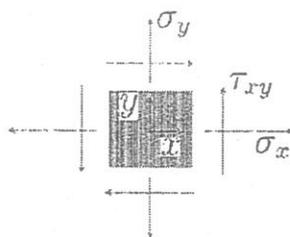


FIGURE 1.4 – État des contraintes sur un élément plan

$$[\tau] = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.5)$$

### 1.3.3 Contraintes principales

En prenant en compte le tenseur des contraintes en un point donné, on constate qu'il est symétrique, donc mathématiquement diagonalisable. Les trois valeurs propres représentent les **contraintes principales**  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  et  $\sigma_3$  (voir figure 1.5) lesquelles peuvent être liées à trois **directions principales** orthogonales  $X_1$ ,  $X_2$  et  $X_3$ .

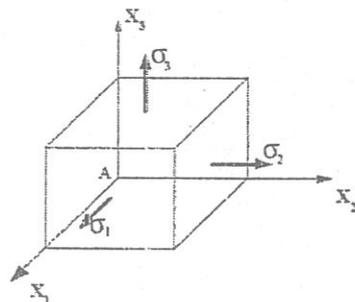


FIGURE 1.5 – Représentation des contraintes principales autour d'un point

Sur une direction principale, les contraintes tangentielles sont nulles et seule une contrainte normale existe. Cette contrainte correspond à un effort de traction ou de compression.

On peut donc écrire la matrice des contraintes dans le repère principal comme suit (1.6) :

$$[\tau] = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}_{(X_1, X_2, X_3)} \quad (1.6)$$

### 1.3.4 Définition des déformations

- Une déformation longitudinale (ou linéaire)  $\epsilon$  est l'allongement ou le rétrécissement d'une pièce par unité de longueur :

$$\epsilon = \frac{L - L_0}{L_0} = \frac{\Delta L}{L_0} \quad (1.7)$$

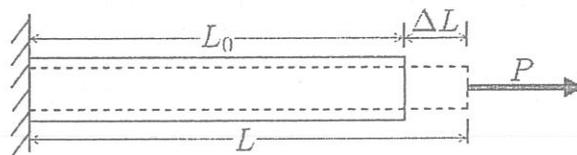


FIGURE 1.6 – Déformation linéaire d'une poutre

- Une déformation transversale (angulaire)  $\gamma$  est le changement d'angle (en rad) d'un angle initialement droit.

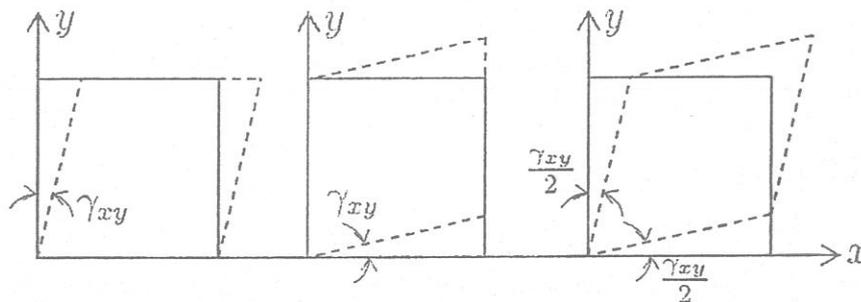


FIGURE 1.7 – Définition d'une déformation angulaire

Sur un volume élémentaire (représentant un point matériel) et comme pour l'état des contraintes, les déformations sont représentées matriciellement par 9 composantes dont 6 sont différentes. Le tenseur des déformations est représenté par l'équation (1.8).

$$[\epsilon] = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon_x & \frac{\gamma_{xy}}{2} & \frac{\gamma_{xz}}{2} \\ \frac{\gamma_{yx}}{2} & \epsilon_y & \frac{\gamma_{yz}}{2} \\ \frac{\gamma_{zx}}{2} & \frac{\gamma_{zy}}{2} & \epsilon_z \end{pmatrix} \quad (1.8)$$

### 1.3.5 Principe d'équivalence

Sur toute facette  $dA$  (élément de surface) d'une coupe d'un solide sollicité se développe une force de surface  $\vec{f}$  appelée vecteur contrainte qui a une composante normale à la surface  $\sigma$  appelée contrainte normale et une composante tangentielle  $\tau$  appelée contrainte tangentielle. Il est préférable de remplacer ces contraintes par des forces en les multipliant par la surface de la coupe :

- Force normale :  $N = \int \sigma dA$
- Force tangente :  $V = \int \tau dA$

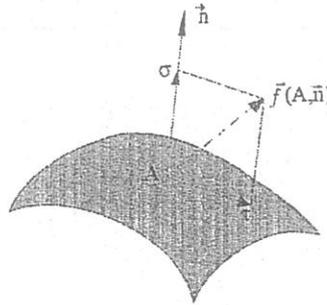


FIGURE 1.8 – Contraintes normale et tangentielle

#### Application aux poutres :

Dans le cas particulier d'une section droite d'une poutre dont la normale est  $x$ , la projection de la contrainte tangentielle  $\tau$  sur les axes  $y$  et  $z$  donne les composantes  $\tau_{xy}$  et  $\tau_{xz}$ . On a donc dans le repère  $(x, y, z)$  les trois composantes  $(\sigma_x, \tau_{xy}, \tau_{xz})$ .

Par le principe d'équivalence, on peut réduire ces contraintes en des efforts intérieurs concentrés au point  $G$  qui sont  $N$ ,  $V_y$ ,  $V_z$ ,  $T$  ( $= M_x$ ),  $M_y$  et  $M_z$ . Les efforts sont reliés aux contraintes par les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
 N &= \int_A \sigma_x dA && \text{effort normal} \\
 V_y &= \int_A \tau_{xy} dA && \text{effort tranchant suivant } y \\
 V_z &= \int_A \tau_{xz} dA && \text{effort tranchant suivant } z \\
 T &= -\int_A \tau_{xy} z dA + \int_A \tau_{xz} y dA && \text{moment de torsion} \\
 M_y &= \int_A \sigma_x z dA && \text{moment de flexion suivant } y \\
 M_z &= \int_A \sigma_x y dA && \text{moment de flexion suivant } z
 \end{aligned}
 \tag{1.9}$$

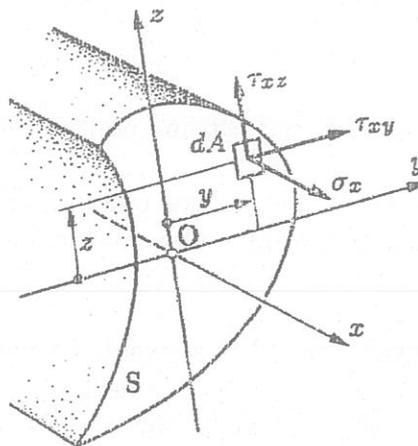


FIGURE 1.9 – Contraintes sur un élément de surface d'une section droite d'une poutre

## 1.4 Théorie des poutres

### 1.4.1 Définitions

Une poutre est un solide engendré par une aire plane  $S$  dont le centre de gravité  $G$  décrit une courbe  $G_0G_1$ , le plan de  $S$  restant normal à la courbe  $G_0G_1$  (voir figure 1.10).

- ☞ L'aire  $S$  est appelée section droite, ou simplement section, de la poutre.
- ☞ La courbe  $G_0G_1$  est appelée fibre moyenne de la poutre.
- ☞ Le volume engendré par un élément  $dS$  de l'aire  $S$  porte le nom de fibre. Cette définition n'a aucun rapport avec la structure de la matière.
- ☞ Une poutre gauche est une poutre dont la fibre moyenne est une courbe gauche.
- ☞ Une poutre plane est une poutre dont la fibre moyenne est une courbe

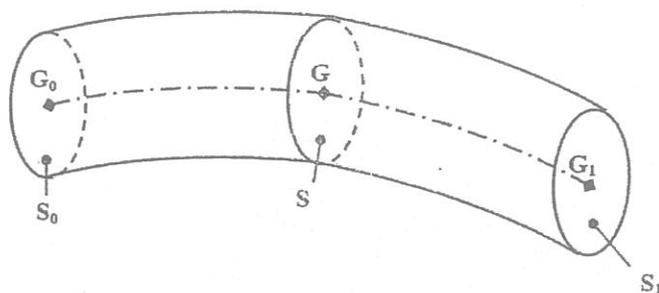


FIGURE 1.10 – Schéma général d'une poutre

plane.

☞ Une poutre droite (ou prismatique) est une poutre dont la fibre moyenne est un segment de droite.

☞ Une poutre à plan moyen est une poutre plane dont le plan de la fibre moyenne est un plan de symétrie, appelé plan moyen, de la poutre; en particulier, une poutre droite peut être à plan moyen.

☞ Dans ce qui précède, nous avons supposé l'aire  $S$  constante; la poutre est alors dite de section constante. Mais souvent, en vue de proportionner les dimensions de la poutre aux efforts qu'elle doit supporter, l'aire  $S$  varie lorsque son centre de gravité décrit la fibre moyenne; la poutre est alors dite de section variable.

☞ On appelle prisme élémentaire ou élément de poutre le volume de la poutre compris entre deux sections droites voisines.

### 1.4.2 Forces extérieures appliquées aux poutres

♣ Un exemple pratique de charges extérieures appliquées à une 'poutre' est présenté sur la figure (1.11). Sur la même figure et sur la figure suivante (1.12) sont présentées des coupes usuelles des poutres, il s'agit de (pour 1.11) :

- Coupe rectangulaire d'une poutre en bois
- Coupe en I d'une poutre en acier
- Coupe en T d'une poutre en béton armé ou en béton précontraint
- coupe en caisson d'une poutre (béton armé, béton précontraint, acier ou mixte).

Pour les systèmes isostatiques, les équations d'équilibre permettent de déterminer, d'une façon entière, les efforts internes développés dans les dits sys-

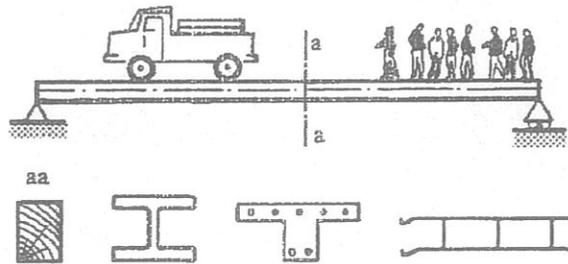


FIGURE 1.11 – Cas usuels de chargement et sections des poutres

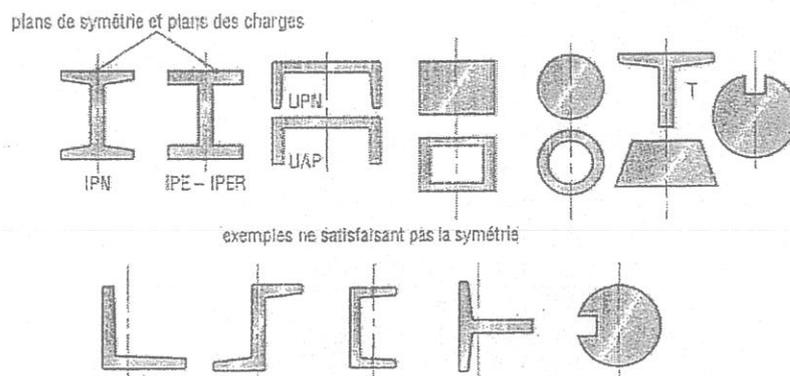


FIGURE 1.12 – Autres types de sections des poutres

tèmes.

♣ Les forces extérieures de liaison correspondantes au cas de charges de la figure (1.11) peut être schématisé comme présenté sur la figure (1.13).

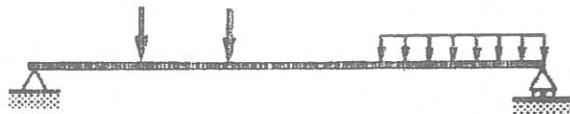


FIGURE 1.13 – Forces extérieures de liaison

♣ Sur une coupe donnée, les contraintes peuvent être remplacées par des efforts  $\vec{F}_R$  et  $\vec{M}_R$  comme schématisé sur la figure (1.14).

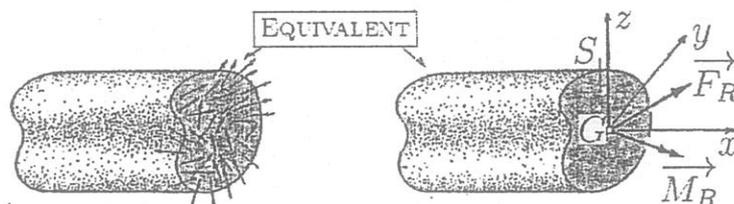


FIGURE 1.14 – Equivalence sur une coupe

Les efforts  $\vec{F}_R$  et  $\vec{M}_R$  ont les composantes suivantes :  $\vec{F}_R(N, V_y, V_z)$  et  $\vec{M}_R(T = M_x, M_y, M_z)$ .

♣ Les différents types de sollicitations d'une poutre sont :

※ Effort normal (traction ou compression) :

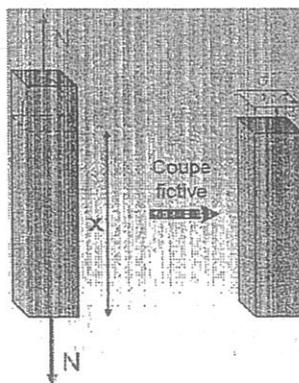


FIGURE 1.15 – Effort normal

※ Cisaillement (effort tranchant) :

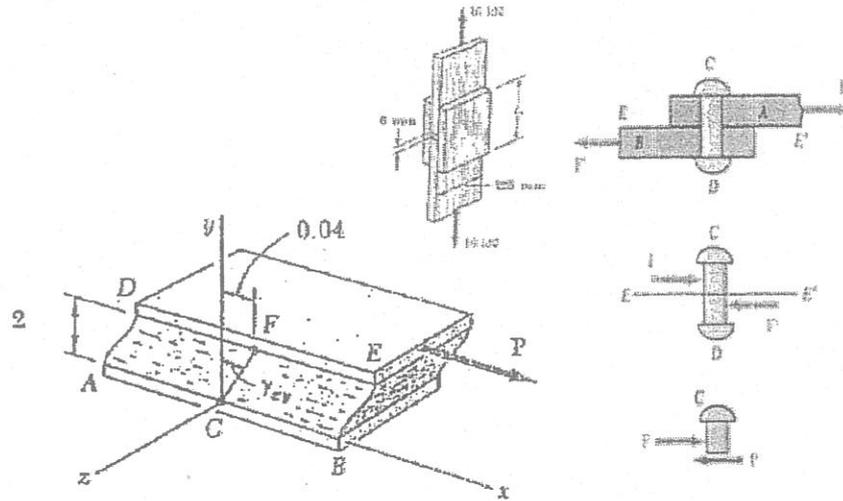


FIGURE 1.16 – Cisaillement

※ Torsion :

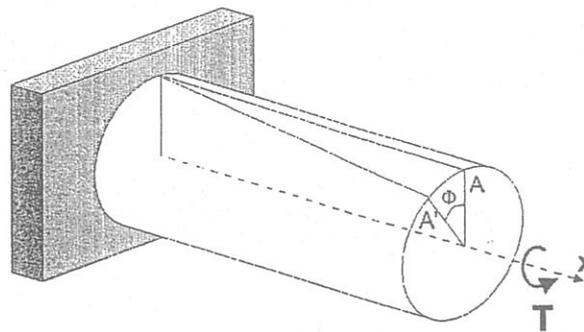


FIGURE 1.17 – Torsion

- ※ Flexion pure (moment de flexion pure) :

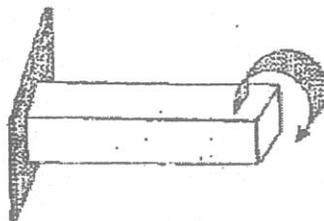


FIGURE 1.18 – Flexion pure

- ※ Flexion simple :

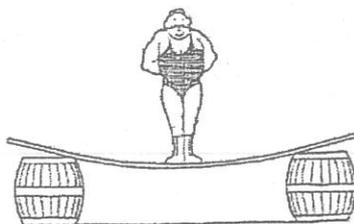


FIGURE 1.19 – Flexion simple

- ※ Flexion composée (effort normal et moment de flexion) :

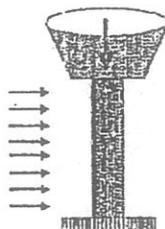


FIGURE 1.20 – Flexion composée

※ Flexion déviée (deux moments de flexion) :

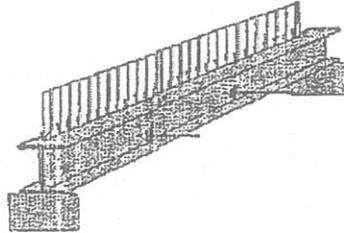


FIGURE 1.21 – Flexion déviée

### 1.4.3 Réactions des appuis des poutres

Une structure quelconque est reliée à son environnement par des liaisons qui imposent des conditions cinématiques en un point. Pour maintenir ces liaisons, il faut exercer des efforts de liaison qui sont en général des inconnus du problème. Ces liaisons sont en général de trois sortes dans un plan (voir figure 1.22) :

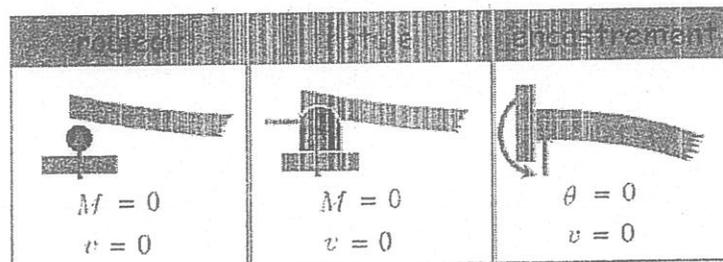


FIGURE 1.22 – Principaux types des conditions aux limites

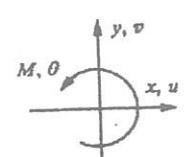
☞ **Appui simple** : (tel qu'un rouleau sans frottement) qui n'empêche que le déplacement  $v$  dans le sens perpendiculaire à la poutre, et qui exerce une réaction  $R_y$  dirigée dans cette direction.

※ **Rotule (articulation)** : qui empêche toute translation ( $u = v = 0$ ) et qui exerce une réaction  $\vec{R}(R_x, R_y)$  d'inclinaison quelconque, mais passant par un point fixe (l'axe de l'articulation).





\* **Encastrement** : qui interdit tout déplacement et toute rotation ( $u = v = \theta = 0$ ) et qui exerce une réaction quelconque de composantes ( $R_x, R_y$ ). La résultante de la réaction passe par le point d'encastrement (centre de gravité  $G$  pour une section encastree). Un moment  $M = M_z$  est également développé dans l'encastrement.



	Rouleau			Articulation			Encastrement		
Grandeur cinématique	$u \neq 0$	$v = 0$	$\theta \neq 0$	$u = 0$	$v = 0$	$\theta \neq 0$	$u = 0$	$v = 0$	$\theta = 0$
Grandeur statique	$R_x = 0$	$R_y \neq 0$	$M = 0$	$R_x \neq 0$	$R_y \neq 0$	$M = 0$	$R_x \neq 0$	$R_y \neq 0$	$M \neq 0$

FIGURE 1.23 – Réactions des liaisons 2D

Dans la figure (1.23), les principales propriétés cinématique et statique sont présentées pour les trois types de liaisons.

## 1.5 Hypothèses de la théorie des poutres

### 1.5.1 Principe de Saint-Venant

Les résultats de la RDM ne s'applique valablement qu'à une distance suffisamment éloignée de la région d'application des forces concentrées. En effet, nous ne pouvons pas, avec les équations de la RDM, calculer les déformations locales autour d'un point d'application d'une force.

On peut aussi dire qu'à condition de se placer loin de la zone d'application des efforts extérieurs, les déformations et les contraintes internes ne sont pas modifiées lorsque le système est remplacé par un autre qui lui est équivalent.

Dans la pratique, on considère que le principe de Saint-Venant est vérifié si la section  $S$  est au moins éloignée d'une distance égale à la plus grande des dimensions transversales de la section  $S$ .

### 1.5.2 Principe des dimensions initiales

Les déplacements des poutres sont supposés très petits par rapport aux dimensions transversales de la section  $S$  de la poutre. On peut donc les négliger en écrivant les équations d'équilibre, puisque les lignes d'action des forces

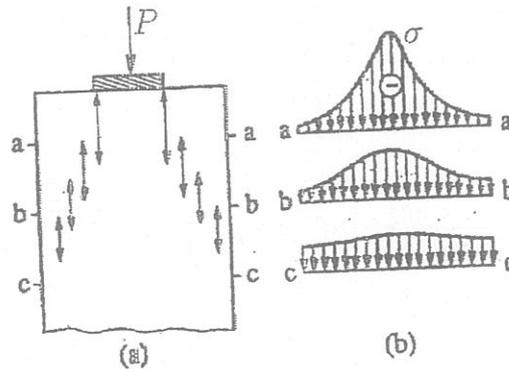


FIGURE 1.24 – Distribution des contraintes au voisinage d'application d'un effort concentré

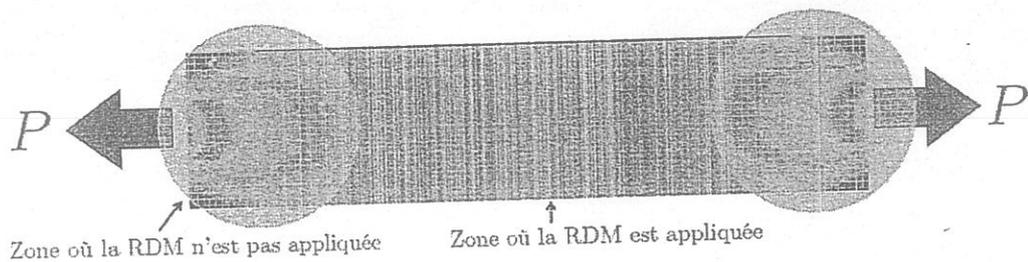


FIGURE 1.25 – Définition de la zone d'application des résultats de la RDM

peuvent être supposées invariables.

☛ On admet la conservation des dimensions initiales.

### 1.5.3 Principe de Navier-Bernoulli

Hypothèse de Navier Bernoulli : les sections droites, planes et perpendiculaires à la ligne moyenne, restent planes et perpendiculaires à la ligne moyenne après déformations. Il n'y a pas de gauchissement des sections droites.

Dans les cas où un effort tranchant ou un moment de torsion est appliqué, cette hypothèse n'est pas vérifiée parce qu'il y a un gauchissement des sections au cours de la déformation de la poutre. Dans ce cas, cette hypothèse est remplacée par l'hypothèse de Navier-Bernoulli généralisée qui suppose en plus que les déformations dues au gauchissement sont petites en

les comparant aux dimensions de la section.

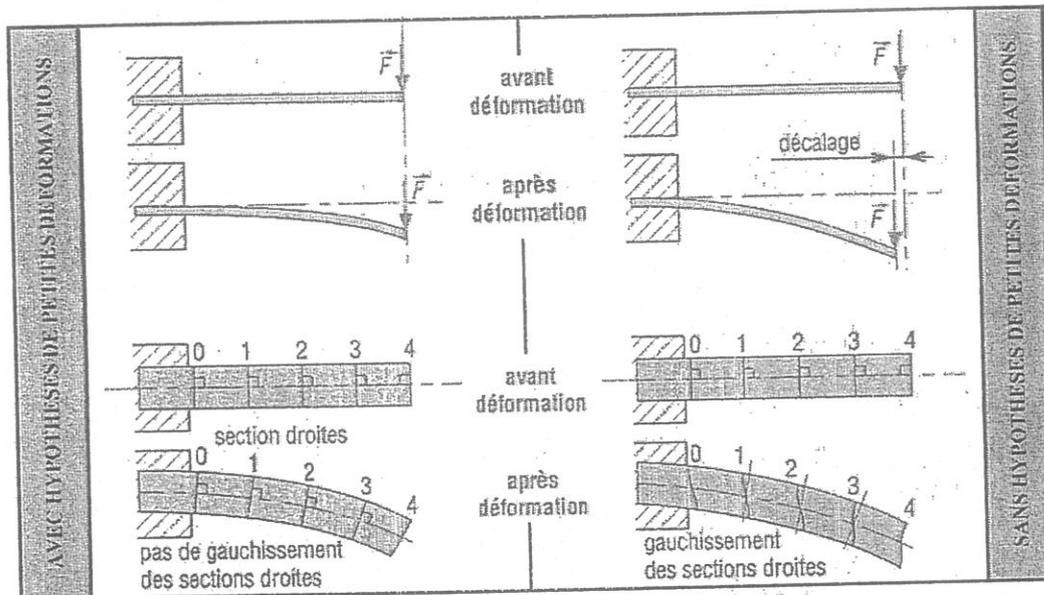


FIGURE 1.26 – Déformée d'une poutre - Hypothèse de Navier-Bernoulli

### 1.5.4 Principe de superposition

L'effet produit par plusieurs forces agissant simultanément est égal à la somme des effets produits par chacune des forces supposée agir seule (voir figure 1.27).

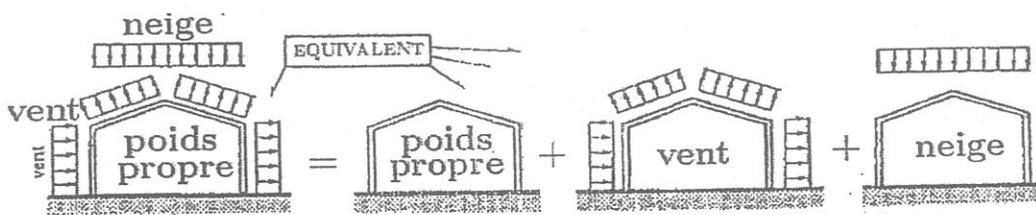


FIGURE 1.27 – Principe de superposition des efforts

### 1.5.5 Autres conditions pour la validité des hypothèses de la théorie des poutres

D'autres conditions doivent être satisfaites pour que la théorie de la RDM soit appliquée. Ces conditions sont nécessaires également pour que les principes de Saint-Venant et Navier-Bernoulli soient vérifiés.

On cite les conditions suivantes :

1. Matériaux homogènes et isotropes.

✓ *Un corps est homogène lorsque tous les grains de matières ou tous les cristaux sont identiques : même constitution, même structure*

✓ *Un solide est isotrope lorsque tous les points de sa structure ont les mêmes caractéristiques mécaniques dans toutes les directions. Par exemple, le bois n'est pas un matériau isotrope. En effet, il est plus résistant dans le sens des fibres que dans le sens perpendiculaire aux fibres.*

- 2. Toutes les forces extérieures sont contenues dans le plan de symétrie de la poutre,
3. Le rayon de courbure de la fibre moyenne est grand par rapport aux dimensions des sections droites.
4. La longueur de la fibre moyenne est grande devant les dimensions des sections droites (longueur supérieure à 10 fois la plus grande dimension transversale), on parle de solide élancé.
5. Les éventuelles variations de l'aire de la section droite sont faibles et progressives.
6. Continuité de la matière.  
⇨ *Lorsqu'on regarde au microscope la coupe d'une pièce en métal, on voit généralement une structure granulaire ou fibreuse. Toutefois, les distances entre ces grains ou ces fibres sont très petites par rapport aux dimensions des plus petites pièces mécaniques qui sont étudiées. On peut alors raisonnablement considérer le matériau comme continu.*
7. Les matériaux sont utilisés dans leurs domaines élastiques. Dans ce cas, les déformations et les contraintes sont proportionnelles (loi de HOOKE).

### 1.5.6 Notion de sécurité des structures

#### Définition

Toute structure doit être conçue de manière à résister, avec une marge sécuritaire, à l'ensemble des sollicitations prévues durant les périodes d'exé-

cution et d'exploitation

↳ " durée de vie "

### Sécurité lors de la conception

Le projet de réalisation d'une structure doit passer par les étapes suivantes :

1. Projet de conception de la structure
2. Projet de calcul ou calcul du projet d'exécution (en respectant les règlements en vigueur)
3. Projet d'exécution (réalisation en grandeur réelle de la structure)
4. Projets d'entretien en cours d'exploitation (pour la réparation des défaillances locales et changer les éléments vieillissants)

Les quatre phases doivent garantir une marge de sécurité convenable sinon la structure en question encours le risque d'être mise hors service et dans le cas le plus grave, elle peut causer des accidents qui peuvent être graves (surtout pour les grandes structures à risques comme les centrales nucléaires, les barrages, les ponts ...).

### Incertitudes

Le principe d'exploitation d'une structure est basé sur la règle suivante :

**Sollicitations en service  $\ll$  Sollicitations de ruine**

Cela passe par la prise en compte de coefficients de sécurité. Ces coefficients tiennent compte à leur tour d'une *réserve de sécurité* et des *incertitudes*.

Les incertitudes qui peuvent être considérées sont les suivantes :

- Actions : intensité, durée, statique-dynamique, points d'application, ...
- Dispersion des propriétés mécaniques : défauts de fabrication ou d'exécution, contraintes internes, ...
- Modification des propriétés mécaniques avec le temps : vieillissement, corrosion, mauvaises exploitations, ...
- Imprécisions sur les dimensions : tolérances de mise en œuvre, ...
- Incertitudes sur la modélisation : hypothèses simplificatrices, calculs approchés, ...
- Malfaçons diverses.

### Conception déterministe

La conception déterministe est basée sur la prise en compte d'un coefficient de sécurité global. Le plus connu était la méthode des contraintes admissibles qui consistait à comparer les contraintes maximales développées aux contraintes de ruine.

Cette méthode présente le grand défaut de la linéarisation :

$$\gamma_s \cdot \sigma_{max} \text{ en service} = \sigma_{ruine}$$

Le critère de dimensionnement devient :

$$\sigma_{max} \text{ en service} \leq \sigma_{ruine} / \gamma_s$$

### Conception probabiliste

Une notion probabiliste de la sécurité a été introduite pour le calcul des structures. Par exemple pour le béton armé, cela été pris en compte avec l'apparition des règlements BAEL (Béton Armé aux États Limites).

Cette méthode vise à mieux définir la sécurité en prenant en compte les incertitudes d'une manière probabiliste (ou semi-probabiliste). En fait, la seule vérification des contraintes admissibles n'est pas suffisante.

### États limites

Un état limite est un état dans lequel une structure n'est plus apte à remplir le rôle pour lequel elle est destinée. On peut distinguer deux grandes familles d'états limites :

- ELU (État Limite Ultime) : ruine, effondrement, structure hors d'usage.
- ELS (État Limite de Service) : structure inutilisable, dangereuse mais récupérable.

Le but d'un calcul aux états limites est de maintenir la probabilité d'atteindre un état limite inférieure à une certaine valeur.

Les états limites ultimes (ELU) peuvent correspondre aux situations suivantes :

- Rupture : contrainte excessive, matériau déficient ;
- Perte d'équilibre global ;
- Instabilités ;
- Rupture par fatigue ;

- Rupture fragile;
- Déplacements excessifs.

Quand aux états limites de service, il peuvent correspondre aux situations :

- Structure trop déformable;
- Déplacement locaux excessifs;
- Vibrations exagérées;
- Fissuration excessive;
- Dégradations.

### 1.5.7 exercices

#### ❖ Exercice 1 :

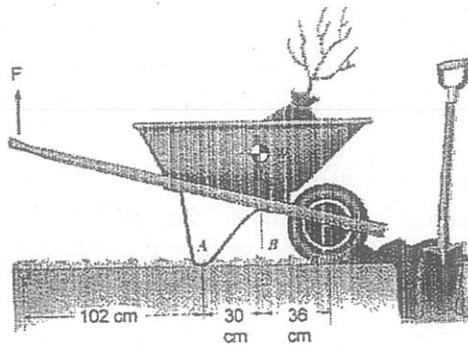


FIGURE 1.28 – Exercice 1 - Manipulation d'une brouette

1. Pour  $F = 0 \text{ kg}$ , quelles sont les réactions en  $A$  et  $B$  ?
2. Quelle force est nécessaire pour soulever la brouette ?

#### ⇒ Solution 1 :

1. aaa
2. aaa

#### ❖ Exercice 2 :

#### ⇒ Solution 2 :

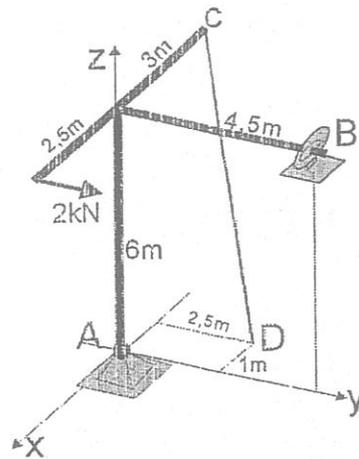


FIGURE 1.29 – Exercice 2

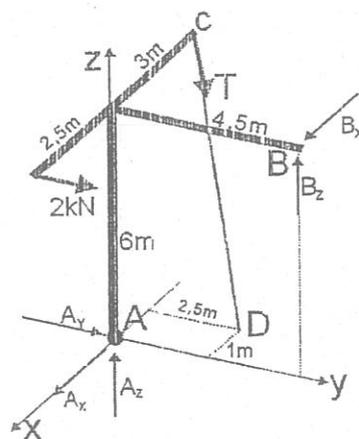


FIGURE 1.30 – Exercice 2

# Chapitre 2

## Calcul géométrique des sections

La variété des formes des sections transversales des éléments utilisés dans les constructions n'est pas un fait du hasard. Dans la plupart des cas, ces formes ont été développées pour répondre à des critères de résistance, de rigidité ou de stabilité.

⇨ Les propriétés géométriques permettent d'identifier la distribution des efforts internes des sections.

### 2.1 Moments statiques

On considère l'aire d'une section  $A$  dans le plan défini par le système d'axes  $(y, z)$  (voir figure 2.1). On appelle les moments statiques de l'aire  $A$  par rapport aux axes  $y$  et  $z$  les quantités définies par les formules suivantes :

$$S_y = \iint_A z \, dA \quad (2.1)$$

$$S_z = \iint_A y \, dA \quad (2.2)$$

*Remarque : Pour une droite  $\Delta$  quelconque, le moment statique par rapport à cette droite est formulé par :*

$$S_\Delta = \iint_A \delta \, dA \quad (2.3)$$

*où  $\delta$  est la distance entre l'élément de surface  $dA$  et la droite  $\Delta$ .*

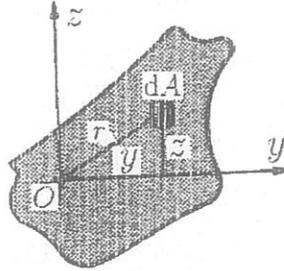


FIGURE 2.1 – Schéma d'une section liée à un repère

En coordonnées polaires, les moments statiques par rapport aux axes  $y$  et  $z$  sont exprimés par :

$$S_y = \iint_A r^2 \sin \theta \, dr d\theta \quad (2.4)$$

$$S_z = \iint_A r^2 \cos \theta \, dr d\theta \quad (2.5)$$

\* Pour les surfaces composées de  $n$  surfaces simples (voir exemple dans la figure 2.2), les moments statiques par rapport aux axes  $y$  et  $z$  sont formulés par :

$$S_y = \sum_{i=1}^n A_i z_i \quad (2.6)$$

$$S_z = \sum_{i=1}^n A_i y_i \quad (2.7)$$

### 2.1.1 Coordonnées du centre de gravité

Le centre de gravité d'une section est le point à travers lequel, si on applique une force à la section  $A$ , elle résulte en une pression uniforme sur toute la section. Les coordonnées du centre de gravité  $G(Y_G, Z_G)$  d'une section homogène  $A$  (voir figure 2.3) sont données par :

$$Y_G = \frac{\iint_A y \, dA}{\iint_A dA} = \frac{1}{A} \iint_A y \, dA \quad (2.8)$$

$$Z_G = \frac{\iint_A z \, dA}{\iint_A dA} = \frac{1}{A} \iint_A z \, dA \quad (2.9)$$

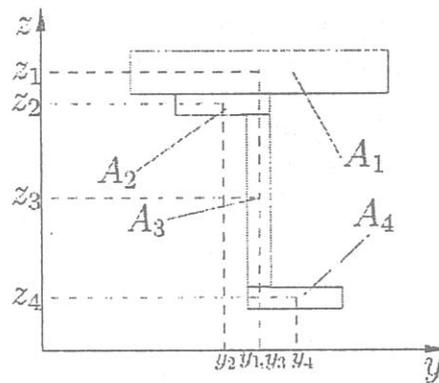


FIGURE 2.2 – Section composée de plusieurs sections simples

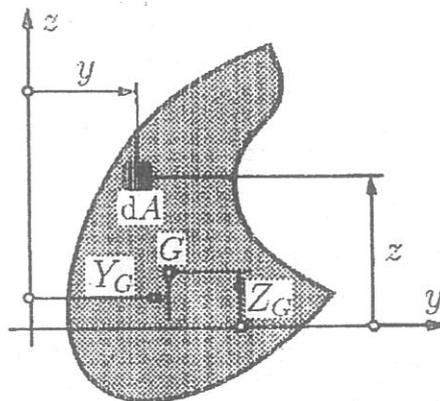


FIGURE 2.3 – Centre de gravité d'une section plane

$y$  et  $z$  étant les coordonnées de l'aire élémentaire  $dA$ .

Les moments statiques peuvent être reliés aux coordonnées du centre de gravité d'une aire  $A$  par les relations suivantes :

$$S_y = AZ_G \quad (2.10)$$

$$S_z = AY_G \quad (2.11)$$

*Remarque : Les moments statiques d'une section par rapport à un axe passant par son centre de gravité sont nuls.*

Pour une section composée de plusieurs sections de formes simples ( $A = A_1 + A_2 + \dots + A_n$ ), les coordonnées du centre de gravité sont définies par :

$$Y_G = \frac{\sum_{i=1}^n A_i y_i}{\sum_{i=1}^n A_i} \quad (2.12)$$

$$Z_G = \frac{\sum_{i=1}^n A_i z_i}{\sum_{i=1}^n A_i} \quad (2.13)$$

### 2.1.2 Effet d'une translation d'axes

On suppose que  $S_{y_1}$  et  $S_{z_1}$  sont connus et que  $O_2(a, b)_{(O_1, y_1, z_1)}$  (voir figure 2.4). On peut déduire les relations suivantes :

$$z_2 = z_1 - b \quad (2.14)$$

$$y_2 = y_1 - a \quad (2.15)$$

On peut donc en déduire :

$$S_{y_2} = \iint_A (z_1 - b) dA = S_{y_1} - bA \quad (2.16)$$

$$S_{z_2} = \iint_A (y_1 - a) dA = S_{z_1} - aA \quad (2.17)$$

Donc :

$$\boxed{\begin{aligned} S_{y_2} &= S_{y_1} - bA \\ S_{z_2} &= S_{z_1} - aA \end{aligned}} \quad (2.18)$$

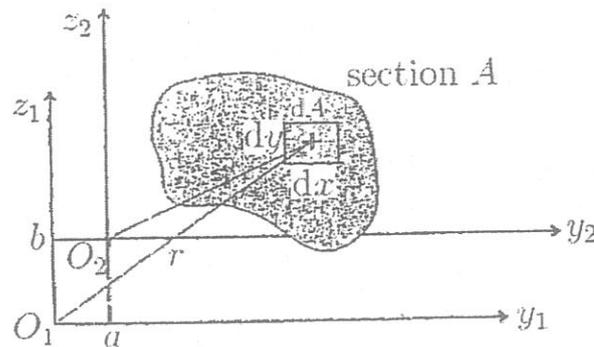


FIGURE 2.4 – Translation d'axes pour une section A

## 2.2 Moments d'inertie quadratiques

Par définition, les moments d'inertie quadratiques par rapport aux axes  $y$  et  $z$  sont définis par les formules suivantes (figure 2.1) :

$$I_y = \iint_A z^2 dA \quad (2.19)$$

$$I_z = \iint_A y^2 dA \quad (2.20)$$

Les moments d'inertie quadratiques par rapport aux axes passant par le centre de gravité de la section sont des moments centraux.

↳ Le moment d'inertie quadratique d'une section traduit la capacité de cette section à résister à une déformation latérale.

On définit également le produit d'inertie  $I_{yz}$  (ou moment d'inertie centrifuge) par rapport au système d'axes  $(O, y, z)$  par :

$$I_{yz} = \iint_A yz dA \quad (2.21)$$

*Remarque : Pour une droite  $\Delta$  quelconque, le moment d'inertie quadratique par rapport à cette droite est formulé par :*

$$I_{\Delta} = \iint_A \delta^2 dA \quad (2.22)$$

*où  $\delta$  est la distance entre l'élément de surface  $dA$  et la droite  $\Delta$ .*

**Exemple :** Déterminons le moment d'inertie quadratique d'un triangle par rapport à l'axe  $y$  (voire figure 2.5)

On a :  $b(z) = \frac{B}{H}(H - z)$  et  $dA = b(z)dz$ .  
donc :

$$I_y = \iint_A z^2 dA \quad (2.23)$$

$$= \frac{B}{H} \int_0^H z^2 (H - z) dz \quad (2.24)$$

$$\rightarrow I_y = \frac{BH^3}{12} \quad (2.25)$$

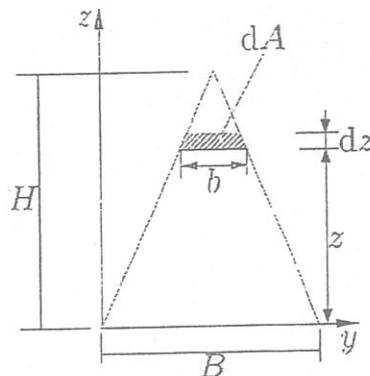


FIGURE 2.5 – Exemple d'un triangle de dimensions  $B$  et  $H$

En coordonnées polaires, les moments d'inertie quadratiques sont formulés par :

$$I_y = \iint_A (r \sin \theta)^2 r \, dr d\theta = \iint_A r^3 \sin^2 \theta \, dr d\theta \quad (2.26)$$

$$I_z = \iint_A (r \cos \theta)^2 r \, dr d\theta = \iint_A r^3 \cos^2 \theta \, dr d\theta \quad (2.27)$$

$$I_{yz} = \iint_A (r \cos \theta)(r \sin \theta) r \, dr d\theta = \iint_A r^3 \cos \theta \sin \theta \, dr d\theta \quad (2.28)$$

\* Pour les surfaces composées de  $n$  surfaces, les moments d'inertie quadratiques par rapport aux axes  $y$  et  $z$  sont :

$$I_y = \sum_{i=1}^n I_{y_i} \quad (2.29)$$

$$I_z = \sum_{i=1}^n I_{z_i} \quad (2.30)$$

Le moment d'inertie polaire est défini par :

$$I_p = \iint_A r^2 \, dA \quad (2.31)$$

Il représente la capacité de la section  $A$  à s'opposer aux déformations angulaires sous l'effet de la torsion.

*Remarque 1 : Les moments d'inertie quadratiques  $I_y$  et  $I_z$  et le moment d'inertie polaire  $I_p$  sont toujours positifs. Par contre, le produit d'inertie  $I_{yz}$  peut être négatif selon la position de la section  $A$  dans le repère d'étude.*

Remarque 2 : On peut facilement constater que :

$$I_p = I_y + I_z \quad (2.32)$$

dem.

$$I_p = \iint_A r^2 dA \quad (2.33)$$

$$= \iint_A (y^2 + z^2) dA \quad (2.34)$$

$$= I_y + I_z \quad (2.35)$$

### 2.2.1 Effet d'une translation d'axes

Les translations d'axes sont formulées par (figure 2.4) :

$$I_{y_2} = I_{y_1} - 2bS_{y_1} + b^2A \quad (2.36)$$

$$I_{z_2} = I_{z_1} - 2aS_{z_1} + a^2A \quad (2.37)$$

dem.

$$I_{y_2} = \iint_A z_2^2 dA \quad (2.38)$$

$$= \iint_A (z_1 - b)^2 dA \quad (2.39)$$

$$= \iint_A z_1^2 dA - \iint_A 2bz_1 dA + \iint_A b^2 dA \quad (2.40)$$

$$= I_{y_1} - 2bS_{y_1} + b^2A \quad (2.41)$$

Pour le produit d'inertie, on peut démontrer de la même façon que :

$$I_{y_2z_2} = \iint_A y_2z_2 dA \quad (2.42)$$

$$= \iint_A (y_1 - a)(z_1 - b) dA \quad (2.43)$$

$$\rightarrow I_{y_2z_2} = I_{y_1z_1} - aS_{y_1} - bS_{z_1} + abA \quad (2.44)$$

Dans le cas particulier où  $y_G$  et  $z_G$  passent par le centre de gravité de la section, ces formules de translation d'axes deviennent sous la forme des formules d'HUYGENS citées dans la section suivante.

### 2.2.2 Théorème d'HUYGENS (STEINER) :

Ce théorème a plusieurs appellations : Théorème d'HUYGENS, Théorème de STEINER, Théorème de transport ou encore théorème des axes parallèles.

Les moments d'inertie quadratiques  $I_y$  et  $I_z$  et le produit d'inertie  $I_{yz}$  dans un repère  $(O, y, z)$  sont reliés aux moments d'inertie quadratiques  $I_{G_y}$  et  $I_{G_z}$  et le produit d'inertie  $I_{G_{yz}}$  par les formules :

$$I_y = I_{G_y} + z_G^2 A \quad (2.45)$$

$$I_z = I_{G_z} + y_G^2 A \quad (2.46)$$

$$I_{yz} = I_{G_{yz}} + y_G z_G A \quad (2.47)$$

*Remarque : On remarque d'après ces formules que :*

$$I_y \geq I_{G_y} \quad (2.48)$$

$$I_z \geq I_{G_z} \quad (2.49)$$

### 2.2.3 Rotations d'axes

Les moments d'inertie quadratiques et le produit d'inertie sont supposés connus dans le repère  $(O, y, z)$ . Les moments d'inertie quadratiques et le produit d'inertie dans le repère  $(O, y_1, z_1)$ , obtenu par une rotation d'un angle  $\alpha$  du repère initial (voir figure 2.6), sont donnés par :

$$I_{y_1} = \frac{I_y + I_z}{2} + \frac{I_y - I_z}{2} \cos 2\alpha - I_{yz} \sin 2\alpha \quad (2.50)$$

$$I_{z_1} = \frac{I_y + I_z}{2} - \frac{I_y - I_z}{2} \cos 2\alpha + I_{yz} \sin 2\alpha \quad (2.51)$$

$$I_{y_1 z_1} = \frac{I_y - I_z}{2} \sin 2\alpha + I_{yz} \cos 2\alpha \quad (2.52)$$

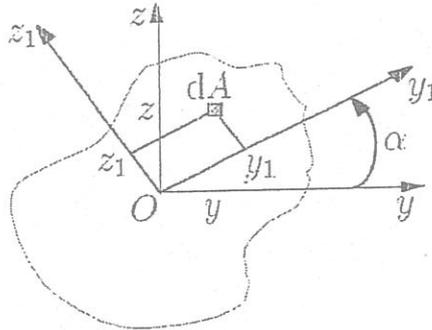


FIGURE 2.6 - Rotation d'axes

dem.

Les axes des deux repères sont reliés par :

$$\begin{cases} y_1 = y \cos \alpha + z \sin \alpha \\ z_1 = -y \sin \alpha + z \cos \alpha \end{cases} \quad (2.53)$$

On a donc :

$$I_{y_1} = \iint_A z_1^2 dA \quad (2.54)$$

$$= \iint_A (z \cos \alpha - y \sin \alpha)^2 dA \quad (2.55)$$

$$= \iint_A (z^2 \cos^2 \alpha - 2yz \cos \alpha \sin \alpha + y^2 \sin^2 \alpha) dA \quad (2.56)$$

$$= I_y \cos^2 \alpha - 2I_{yz} \cos \alpha \sin \alpha + I_z \sin^2 \alpha \quad (2.57)$$

$$= I_y (1 - \sin^2 \alpha) - I_{yz} \sin 2\alpha + I_z \sin^2 \alpha \quad (2.58)$$

$$= I_y + (I_z - I_y) \sin^2 \alpha - I_{yz} \sin 2\alpha \quad (2.59)$$

Sachant que :

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} \quad (2.60)$$

$$\rightarrow I_{y_1} = I_y + \frac{I_z - I_y}{2} - \frac{I_z - I_y}{2} \cos 2\alpha - I_{yz} \sin 2\alpha \quad (2.61)$$

$$\rightarrow I_{y_1} = \frac{I_y + I_z}{2} + \frac{I_y - I_z}{2} \cos 2\alpha - I_{yz} \sin 2\alpha \quad (2.62)$$

On peut démontrer les deux autres formules de la même façon.

Remarque : On peut constater que :

$$I_p = I_y + I_z = I_{y_1} + I_{z_1} \quad (2.63)$$

dem.

$$I_p = \iint_A r^2 dA \quad (2.64)$$

$$= \iint_A (y^2 + z^2) dA \quad (2.65)$$

$$= I_y + I_z \quad (2.66)$$

$$= \iint_A (y_1^2 + z_1^2) dA \quad (2.67)$$

$$= I_{y_1} + I_{z_1} \quad (2.68)$$

### 2.2.4 Axes principaux d'inertie

En chaque point d'une section  $A$ , il existe deux axes orthogonaux par rapport auxquels le produit d'inertie est nul ( $I_{y_1 z_1} = 0$ ) et les moments d'inertie quadratiques sont optimales. Les deux axes ainsi définis sont appelés **Axes principaux d'inertie**.

On considérant  $I_{y_1 z_1} = 0$ , on obtient :

$$\tan 2\alpha = \frac{2I_{yz}}{I_z - I_y} \quad (2.69)$$

Les valeurs maximale et minimale des moments d'inertie quadratiques correspondent à un angle  $\alpha_0$  qui définit la rotation du repère principal par rapport au repère  $(O, y, z)$ . Ces valeurs correspondent aux moments d'inertie principaux qui sont exprimées par :

$$I_{\max} = \frac{I_y + I_z}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(I_z - I_y)^2 + 4I_{yz}^2} \quad (2.70)$$

$$I_{\min} = \frac{I_y + I_z}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(I_z - I_y)^2 + 4I_{yz}^2} \quad (2.71)$$

dem.

$$\text{On a : } \tan 2\alpha = \frac{2I_{yz}}{I_z - I_y} \quad (2.72)$$

$$\Leftrightarrow I_{yz} = \frac{I_z - I_y}{2} \tan 2\alpha \quad (2.73)$$

En reprenant l'expression de  $I_{y_1}$  (équation 2.50), on obtient :

$$I_{y_1} = \frac{I_y + I_z}{2} + \frac{I_y - I_z}{2} \cos 2\alpha - \frac{I_z - I_y}{2} \frac{\sin^2 2\alpha}{\cos 2\alpha} \quad (2.74)$$

$$= \frac{I_y + I_z}{2} + \frac{I_y - I_z}{2} \left( \cos 2\alpha + \frac{\sin^2 2\alpha}{\cos 2\alpha} \right) \quad (2.75)$$

$$\text{On a : } \cos 2\alpha + \frac{\sin^2 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{\cos^2 2\alpha + \sin^2 2\alpha}{\cos 2\alpha} \quad (2.76)$$

$$= \frac{1}{\cos 2\alpha} \quad (2.77)$$

$$\Rightarrow I_{y_1} = \frac{I_y + I_z}{2} + \frac{I_y - I_z}{2 \cos 2\alpha} \quad (2.78)$$

$$(2.72) \Rightarrow \tan^2 2\alpha = \frac{4I_{yz}^2}{(I_z - I_y)^2} \quad (2.79)$$

$$\text{On a aussi : } \cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2} \quad \text{et} \quad \cos 2a = \frac{1 - \tan^2 a}{1 + \tan^2 a} \quad (2.80)$$

$$\rightarrow \cos^2 a = \frac{1 + \frac{1 - \tan^2 a}{1 + \tan^2 a}}{2} \quad (2.81)$$

$$= \frac{1}{2} \left( \frac{1 + \tan^2 a + 1 - \tan^2 a}{1 + \tan^2 a} \right) \quad (2.82)$$

$$= \frac{1}{1 + \tan^2 a} \quad (2.83)$$

$$\text{donc : } \cos^2 2\alpha = \frac{1}{1 + \tan^2 2\alpha} \quad (2.84)$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{4I_{yz}^2}{(I_z - I_y)^2}} \quad (2.85)$$

$$= \frac{(I_z - I_y)^2}{(I_z - I_y)^2 + 4I_{yz}^2} \quad (2.86)$$

$$\rightarrow \cos 2\alpha = \frac{\pm(I_z - I_y)}{\sqrt{(I_z - I_y)^2 + 4I_{yz}^2}} \quad (2.87)$$

$$\rightarrow I_{y_1} = \frac{I_y + I_z}{2} + \frac{I_y - I_z}{2} \left( \pm \frac{\sqrt{(I_z - I_y)^2 + 4I_{yz}^2}}{I_z - I_y} \right) \quad (2.88)$$

$$\rightarrow I_{\max, \min} = \frac{I_y + I_z}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(I_z - I_y)^2 + 4I_{yz}^2} \quad (2.89)$$

→ ★ Les axes sont principaux quand l'un des axes au moins constitue un axe de symétrie de la section. En effet, en raison de symétrie, le produit d'inertie est nul par rapport à cet axe qui est donc une direction principale. La seconde étant nécessairement orthogonale.

### 2.2.5 Rayon de giration

Par définition, le rayon de giration d'un solide est la distance par rapport à un axe d'un point ayant la masse et l'inertie du solide.

On a, les rayons de giration par rapport aux axes  $y$  et  $z$  :

$$r_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} \quad (2.90)$$

$$r_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}} \quad (2.91)$$

et le rayon de giration polaire :

$$r_0 = \sqrt{\frac{I_0}{A}} \quad (2.92)$$

et on peut démontrer facilement que :

$$r_0^2 = r_y^2 + r_z^2 \quad (2.93)$$

## 2.3 exercices

## ❖ Exercice 1 :

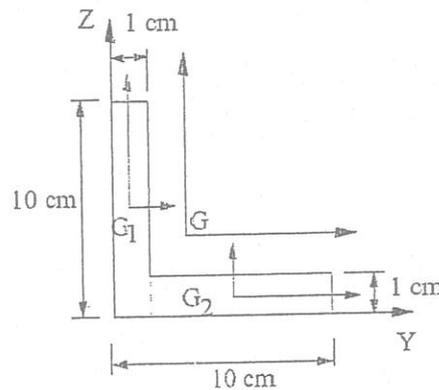


FIGURE 2.7 – Section en forme de L

Déterminer les moments d'inertie principaux de la section en forme de L de la figure (2.7).

## ⇒ Solution 1 :

Les aires et les coordonnées des centres de gravité des deux surfaces  $A_1$  et  $A_2$  sont données par :

$$A_1 = 10 \text{ cm}^2 \quad y_{G_1} = 0.5 \text{ cm} \quad z_{G_1} = 5 \text{ cm} \quad (2.94)$$

$$A_2 = 9 \text{ cm}^2 \quad y_{G_2} = 5.5 \text{ cm} \quad z_{G_2} = 0.5 \text{ cm} \quad (2.95)$$

Les moments d'inertie des deux sections sont :

$$I_{y_1} = 0.83 \text{ cm}^4 \quad I_{z_1} = 83.33 \text{ cm}^4 \quad (2.96)$$

$$I_{y_2} = 60.75 \text{ cm}^4 \quad I_{z_2} = 0.75 \text{ cm}^4 \quad (2.97)$$

Les coordonnées du centre de gravité de la section entière sont :

$$y_G = \frac{\sum_{i=1}^2 A_i y_{G_i}}{\sum_{i=1}^2 A_i} = \frac{10 \times 0.5 + 9 \times 5.5}{19} = 2.87 \text{ cm} \quad (2.98)$$

$$z_G = \frac{\sum_{i=1}^2 A_i z_{G_i}}{\sum_{i=1}^2 A_i} = \frac{10 \times 5 + 9 \times 0.5}{19} = 2.87 \text{ cm} \quad (2.99)$$

Les distances entre les centres de gravité locaux et le centre de gravité de la section entière sont :

$$a_1 = z_{G_1} - z_G = 2.13 \text{ cm} \quad b_1 = y_{G_1} - y_G = -2.37 \text{ cm} \quad (2.100)$$

$$a_2 = z_{G_2} - z_G = -2.37 \text{ cm} \quad b_2 = y_{G_2} - y_G = 2.63 \text{ cm} \quad (2.101)$$

En faisant la sommation des moments d'inertie et en appliquant le théorème d'HUYGENS, les moments d'inertie de la section entière sont donnés par :

$$I_y = \sum_{i=1}^2 (I_{y_i} + b_i^2 A_i) \quad (2.102)$$

$$= 0.83 + 60.75 + 10 \times (-2.37)^2 + 9 \times 2.63^2 \quad (2.103)$$

$$\rightarrow I_y = 180 \text{ cm}^4 \quad (2.104)$$

$$I_z = \sum_{i=1}^2 (I_{z_i} + a_i^2 A_i) \quad (2.105)$$

$$= 83.33 + 0.75 + 10 \times 2.13^2 + 9 \times (-2.37)^2 \quad (2.106)$$

$$\rightarrow I_z = 180 \text{ cm}^4 \quad (2.107)$$

$$I_{yz} = \sum_{i=1}^2 (I_{yz_i} + a_i b_i A_i) \quad (2.108)$$

$$= 0 + 0 + 10 \times 2.13 \times (-2.37) + 9 \times (-2.37) \times 2.63 \quad (2.109)$$

$$\rightarrow I_{yz} = -106.6 \text{ cm}^4 \quad (2.110)$$

$$\rightarrow I_{\max} = 286.6 \text{ cm}^4 \quad \text{et} \quad I_{\min} = 73.4 \text{ cm}^4 \quad (2.111)$$

Les moments d'inertie principaux sont donc :

$$I_{1,2} = I_{\max/\min} = \frac{I_y + I_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_y - I_z}{2}\right)^2 + I_{yz}^2} = 180 \pm 106.6 \text{ cm}^4 \quad (2.112)$$

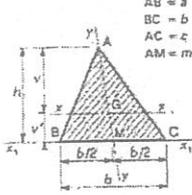
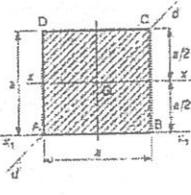
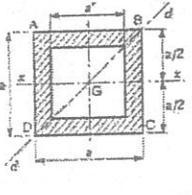
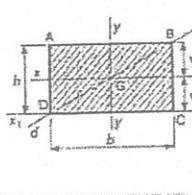
L'orientation des axes principaux est définie par :

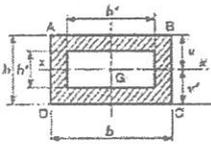
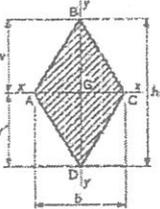
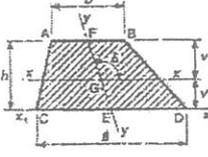
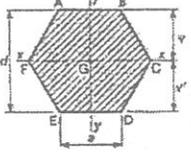
$$\tan 2\alpha_0 = -\frac{2I_{yz}}{I_y - I_z} = \infty \quad (2.113)$$

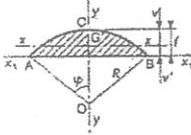
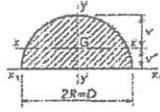
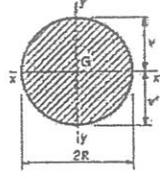
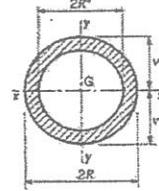
$$\rightarrow 2\alpha_0 = \frac{\pi}{2} \quad (2.114)$$

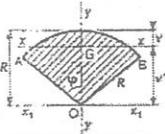
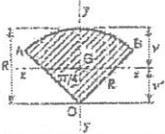
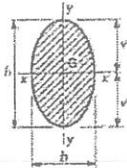
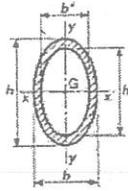
$$\rightarrow \alpha_0 = \frac{\pi}{4} \quad (2.115)$$

## 2.4 Propriétés de quelques sections simples

Section				
Centre de gravité	$v = \frac{2h}{3}$ $v' = \frac{h}{3}$	$v = \frac{a}{2}$ $v' = \frac{a}{2}$	$v = \frac{a}{2}$ $v' = \frac{a}{2}$	$v = \frac{h}{2}$ $v' = \frac{h}{2}$
Surface	$S = \frac{bh}{2}$	$S = a^2$	$S = a^2 - a'^2$	$S = bh$
Inertie polaire	$I_G = \frac{S(a^2 + b^2 + c^2)}{36}$	$I_G = \frac{a^4}{6}$	$I_G = \frac{a^4 - a'^4}{6}$	$I_G = \frac{bh(b^2 + h^2)}{12}$
Inertie par rapport à un axe	$I_{x_1} = \frac{bh^3}{12}$ $I_x = \frac{bh^3}{36}$ $I_y = \frac{b^3h^3}{48m^2}$	$I_{x_1} = \frac{a^4}{3}$ $I_x = \frac{a^4}{12}$ $I_d = \frac{a^4}{12}$	$I_x = \frac{a^4 - a'^4}{12}$ $I_d = \frac{a^4 - a'^4}{12}$	$I_{x_1} = \frac{bh^3}{3}$ $I_x = \frac{bh^3}{12}$ $I_d = \frac{b^2h^3}{6(b^2 + h^2)}$

Section				
Centre de gravité	$v = \frac{h}{2}$ $v' = \frac{h}{2}$	$v = \frac{h}{2}$ $v' = \frac{h}{2}$	$v = \frac{h}{3} \left( \frac{2B+b}{B+b} \right)$ $v' = \frac{h}{3} \left( \frac{B+2b}{B+b} \right)$	$v = v' = \frac{1}{2} d$ ou: $v = v' = \frac{a\sqrt{3}}{2}$
Surface	$S = bh - b'h'$	$S = \frac{bh}{2}$	$S = \frac{h}{2} (B+b)$	$S = \frac{d^2\sqrt{3}}{2} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$
Inertie polaire	$I_G = \frac{bh(b^2+h^2) - b'h'(b'^2+h'^2)}{12}$	$I_G = \frac{bh(b^2+h^2)}{48}$		$I_G = \frac{5d^4}{24\sqrt{3}} = \frac{15a^4}{8\sqrt{3}}$
Inertie par rapport à un axe	$I_x = \frac{bh^3 - b'h'^3}{12}$	$I_x = \frac{bh^3}{48}$ $I_y = \frac{hb^3}{48}$	$I_{x_1} = \frac{h^3}{12} (B+3b)$ $I_x = \frac{h^3 (B^2 + 4Bb + b^2)}{36(B+b)}$ $I_y = \frac{h^3 (B^4 - b^4)}{48m^2(B-b)}$	$I_x = \frac{5d^4}{48\sqrt{3}} = \frac{5a^4\sqrt{3}}{16}$ $I_y = \frac{5d^4}{48\sqrt{3}} = \frac{5a^4\sqrt{3}}{16}$

Section				
	$f = R(1 - \cos \varphi)$			
Centre de gravité	$v = R \left( 1 - \frac{4 \sin^3 \varphi}{3(2\varphi - \sin 2\varphi)} \right)$ $v' = R(1 - \cos \varphi) - v$	$v = R \left( 1 - \frac{4}{3\pi} \right)$ $v' = \frac{4R}{3\pi}$	$v = R$ $v' = R$	$v = R$ $v' = R$
Surface	$S = \frac{R^2}{2} (2\varphi - \sin 2\varphi)$	$S = \frac{1}{2} \pi R^2$	$S = \pi R^2$	$S = \pi (R^2 - R'^2)$
Inertie polaire	$I_G = I_x + I_y$	$I_G = \left( \frac{\pi}{4} - \frac{8}{9\pi} \right) R^4$	$I_G = \frac{1}{2} \pi R^4$	$I_G = \frac{1}{2} \pi (R^4 - R'^4)$
Inertie par rapport à un axe	$I_x = \frac{R^4}{16} (4\varphi - \sin 4\varphi - \frac{R^4(1 - \cos 2\varphi)^3}{9(2\varphi - \sin 2\varphi)})$ $I_y = \frac{R^4}{8} (2\varphi - \frac{4}{3} \sin 2\varphi + \frac{1}{8} \sin 4\varphi)$	$I_{x_1} = \frac{1}{8} \pi R^4$ $I_x = \left( \frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi} \right) R^4$ $I_y = \frac{1}{8} \pi R^4$	$I_x = \frac{1}{4} \pi R^4$ $I_y = \frac{1}{4} \pi R^4$	$I_x = \frac{\pi}{4} (R^4 - R'^4)$ $I_y = \frac{\pi}{4} (R^4 - R'^4)$

Section				
Centre de gravité	$v = R \left( 1 - \frac{2 \sin \varphi}{3 \varphi} \right)$ $v' = \frac{2 R \sin \varphi}{3 \varphi}$	$v = R \left( 1 - \frac{4 \sqrt{2}}{3 \pi} \right)$ $v' = \frac{4 R \sqrt{2}}{3 \pi}$	$v = \frac{1}{2} h$ $v' = \frac{1}{2} h$	$v = \frac{1}{2} h$ $v' = \frac{1}{2} h$
Surface	$S = \varphi R^2$	$S = \frac{1}{4} \pi R^2$	$S = \frac{\pi}{4} bh$	$S = \frac{\pi}{4} (bh - b'h')$
Inertie polaire	$I_G = I_x - I_y$	$I_G = \left( \frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi} \right) R^4$	$I_G = \frac{\pi}{64} bh(b^2 + h^2)$	$I_G = \frac{\pi}{64} [bh(b^2 + h^2) - b'h'(b'^2 + h'^2)]$
Inertie par rapport à un axe	$I_{x_1} = \frac{R^4}{8} (2\varphi + \sin 2\varphi)$ $I_x = I_{x_1} - S v'^2$ $I_y = \frac{R^4}{8} (2\varphi - \sin 2\varphi)$	$I_x = \left( \frac{\pi}{16} + \frac{1}{8} - \frac{8}{9\pi} \right) R^4$ $I_y = \frac{\pi - 2}{16} R^4$	$I_x = \frac{\pi}{64} bh^3$ $I_y = \frac{\pi}{64} hb^3$	$I_x = \frac{\pi}{64} (bh^3 - b'h'^3)$ $I_y = \frac{\pi}{64} (hb^3 - h'b'^3)$



## Chapitre 3

### Calcul de l'effort normal

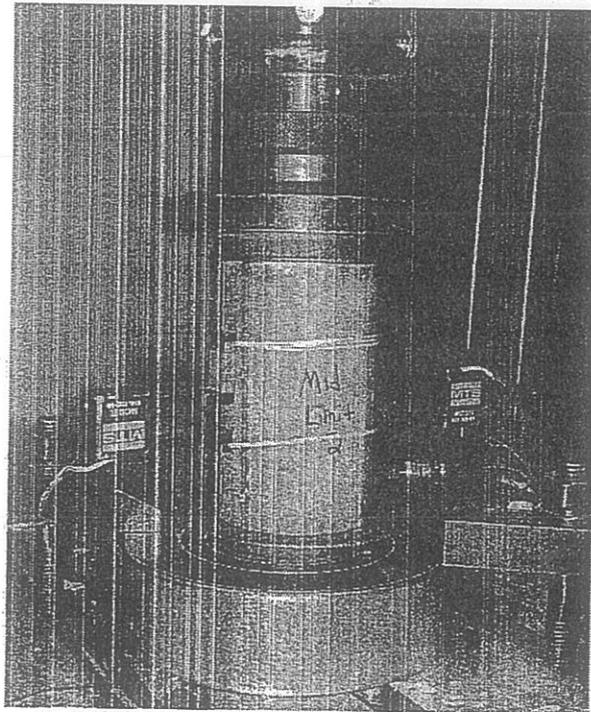


FIGURE 3.1 – Essai d'écrasement d'un béton (compression)

Une poutre droite est sollicitée en traction ou compression si les efforts exercés à ses extrémités se réduisent à deux forces égales et opposées ( $F$  et  $-F$ ) qui ont comme direction la ligne moyenne de la poutre. Un exemple d'une éprouvette en béton sous compression est présenté dans la figure (3.1).

## Chapitre 3

### Calcul de l'effort normal

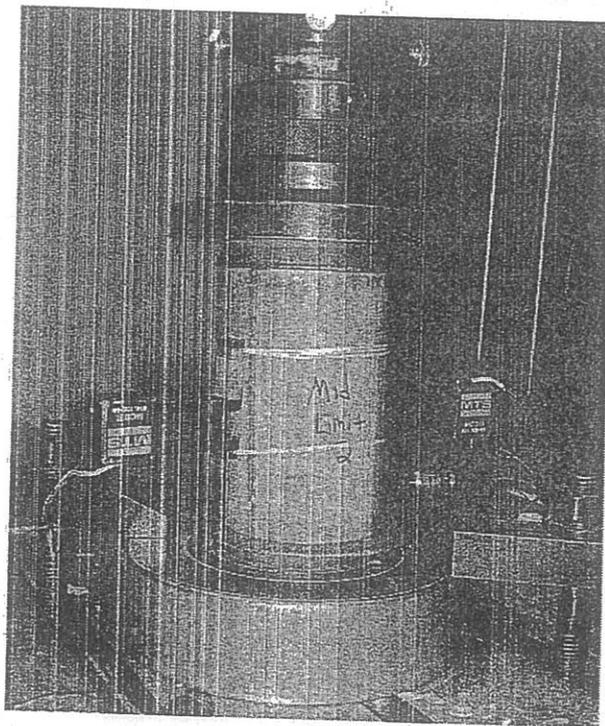


FIGURE 3.1 – Essai d'écrasement d'un béton (compression)

Une poutre droite est sollicitée en traction ou compression si les efforts exercés à ses extrémités se réduisent à deux forces égales et opposées ( $F$  et  $-F$ ) qui ont comme direction la ligne moyenne de la poutre.

Un exemple d'une éprouvette en béton sous compression est présenté dans la figure (3.1).

### 3.1 Courbe contrainte-déformation

Une courbe contrainte-déformation d'un matériau représente l'évolution de la contrainte  $\sigma$  développée dans une section donnée de l'éprouvette en fonction de la déformation  $\epsilon$  (voir figure 3.2).

Pour une éprouvette sollicitée en traction ou compression, la contrainte est définie par :

$$\sigma = \frac{N}{A} \quad (3.1)$$

où  $N$  est l'effort normal appliqué à une section d'aire  $A$ .

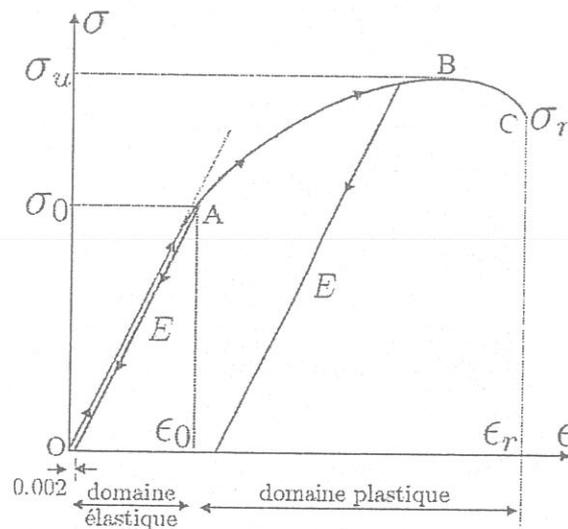


FIGURE 3.2 – Exemple d'une courbe contrainte-déformation avec définition des zones élastique et plastique

En général, une courbe contrainte-déformation est composée de deux parties :

- **courbe élastique** : c'est la partie linéaire à partir de l'origine (partie de la courbe  $OA$  de la figure 3.2). Il s'agit du comportement élastique du matériau qui est caractérisé par un effet réversible.

La contrainte  $\sigma_0$  représentant la limite supérieure de la partie élastique est appelée **limite élastique**. Elle correspond à une déformation résiduelle de 0.2%.

- **courbe plastique** : il s'agit de la partie de la courbe  $ABC$  qui correspond à la partie plastique du matériau. Cette partie peut être divisée

en deux sous-parties : la sous-partie  $AB$  correspondant à l'écroutissage plastique et la partie  $BC$  correspondant à la striction du matériau (zone de rupture).

La contrainte correspondant au point  $B$  s'appelle **contrainte ultime**  $\sigma_u$ . Elle correspond à la contrainte maximale qui peut être développée sur une section de l'éprouvette étudiée.

Le point  $C$  correspond à la rupture, la contrainte et la déformation correspondantes sont la **contrainte de rupture**  $\sigma_r$  et la **déformation de rupture**  $\epsilon_r$ .

Un schéma expliquant le développement d'une zone de striction sur une éprouvette sollicitée en traction est présenté dans la figure (3.3).

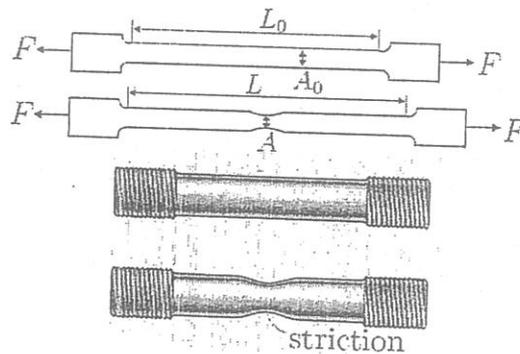


FIGURE 3.3 – Striction des éprouvettes en traction

En prenant comme exemple l'acier doux, nous représentons sur la figure (3.4) les courbes contraintes-déformations correspondantes à la zone de striction et la zone hors striction.

Nous pouvons constater que la contrainte augmente continuellement jusqu'à la rupture au niveau de la zone de striction alors que cette contrainte diminue après développement de la striction sur le reste de l'éprouvette.

Les principales propriétés mécaniques d'un matériau sont :

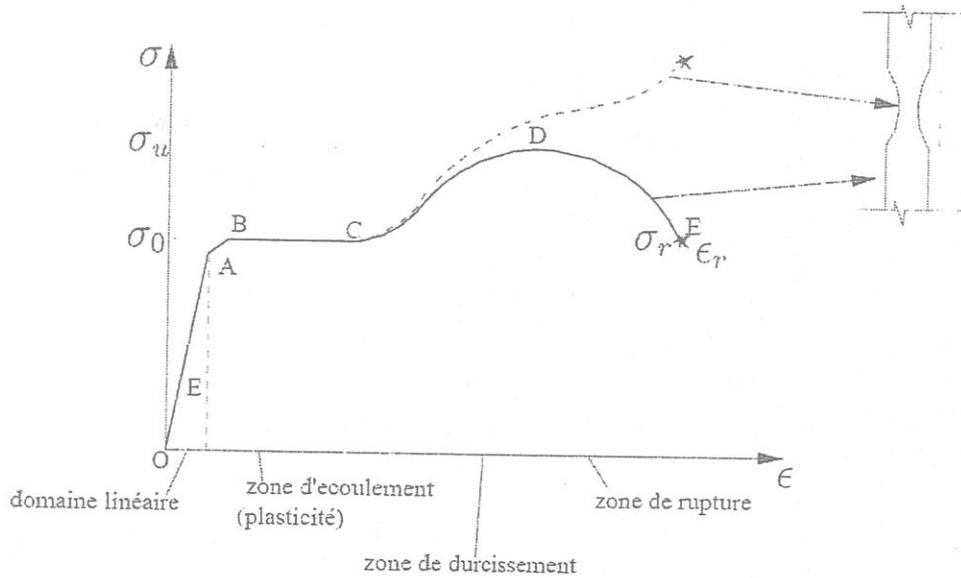


FIGURE 3.4 – Comportement d'une éprouvette sur la zone de striction et hors zone de striction (acier doux)

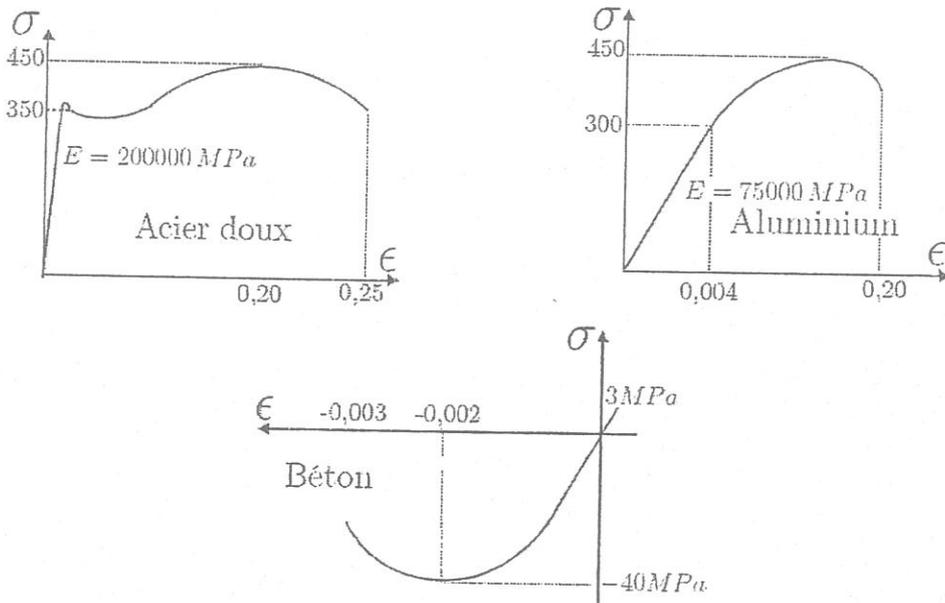


FIGURE 3.5 – Courbes contrainte-déformation pour l'acier doux, l'aluminium et le béton

$\sigma_0$	: limite élastique à 0.2% de la déformation résiduelle (MPa),
$\epsilon_0$	: déformation à la limite élastique (%),
$E$	: module d'élasticité (MPa),
$\sigma_u$	: contrainte ultime (MPa),
$A_0$	: section initiale ( $mm^2$ ),
$A_f$	: section finale ( $mm^2$ ),
$L_0$	: longueur initiale (mm)
$L_f$	: longueur finale (mm)
$\sigma_r$	: contrainte à la rupture (MPa),
$\epsilon_r$	: déformation à la rupture (%),
$RA$	: $(= \frac{A_0 - A_f}{A_0})$ réduction de la section $A$ ,
$ALL$	: $(= \frac{L_f - L_0}{L_0})$ allongement total,
$\epsilon_e$	: déformation élastique (voir figure 3.6),
$\epsilon_p$	: déformation plastique résiduelle (voir figure 3.6).

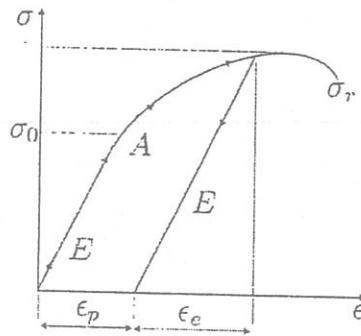
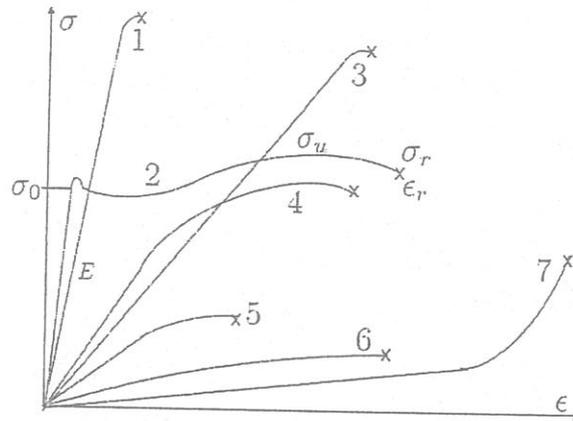


FIGURE 3.6 – Définition des déformations élastique et plastique après relâchement

A partir des propriétés mécaniques, on peut définir les notions suivantes :

- matériau fragile : la déformation à la rupture  $\epsilon_r$  est petite,
- matériau ductile : la déformation plastique résiduelle  $\epsilon_p$  est grande,
- matériau résistant : la limite élastique  $\sigma_0$  est grande,
- matériau rigide : le module d'élasticité (module de YOUNG) est grand.

En considérant la figure (3.7), les matériaux 1 à 7 présentent les propriétés suivantes :

FIGURE 3.7 - Courbes  $\sigma - \epsilon$  pour plusieurs matériaux

- 1- rigide, résistant et fragile (fibres de carbone),
- 2- rigide, assez résistant et ductile (acier de construction),
- 3- peu rigide, résistant et fragile (fibres de verre),
- 4- peu rigide, peu résistant et ductile (aluminium),
- 5- peu rigide, peu résistant et peu ductile (acrylique),
- 6- peu rigide, peu résistant et très ductile (plomb),
- 7- très peu rigide, très peu résistant et très élastique (caoutchouc).

Nous présentons ci-après les limites d'élasticité  $\sigma_0$  et les modules de YOUNG  $E$  pour les matériaux les plus utilisés dans la pratique :

	$\sigma_0$ (MPa)	$E$ (MPa)
Fibres de carbone	2000 à 3000	150000 à 200000
Fibres de verre	1000 à 2500	50000
Acier trempé	700 à 1000	200000
Titane	500	110000
Acier de construction	350	200000
Duraluminium	350	75000
Aluminium	70	70000
Cuivre	55	110000
Béton ( <i>compression</i> )	-20 à -100	30000 environ
Bois de construction	10 à 20	10000
Béton ( <i>tension</i> )	2 à 5	30000 environ

*Remarque : Un acier trempé est un acier traité thermiquement et chimiquement dans le but de lui augmenter la résistance (limite d'élasticité  $\sigma_0$ ).*

## 3.2 Loi de Hooke

Pour la plupart des matériaux, à condition de se placer dans le domaine élastique (figure 3.9), nous admettons que les contraintes sont proportionnelles aux déformations.

Cela est traduit par la loi de Hooke définie par :

$$\sigma = E\epsilon \quad (3.2)$$

avec  $\epsilon = \epsilon_x$  est la déformation axiale,  $E$  est le module d'élasticité du matériau et  $\sigma = \sigma_x$  est la contrainte normale.

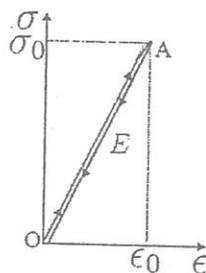


FIGURE 3.8 – Comportement élastique d'un matériau

## 3.3 Contraintes et déformations dues aux efforts normaux

### 3.3.1 Contraintes normales

Faisons une coupure fictive dans une poutre de section droite  $S$ , située à une distance  $x$  du point  $A$  entre les deux extrémités  $A$  et  $B$  (figure 3.9). Cette poutre est sollicitée par un effort normal  $P$  sur ses deux extrémités.

Cette coupure fait apparaître les efforts intérieurs dans la poutre.  
L'effort normal  $N$  appliqué à la section  $S$  est :

$$N = \iint_S \sigma \, dS \quad (3.3)$$

$$= \sum_{i=1}^n \Delta P_i \quad (3.4)$$

$$= P \quad (3.5)$$

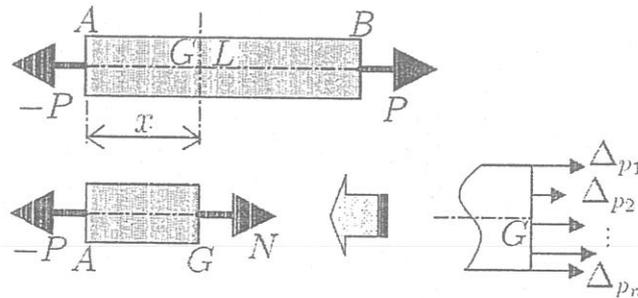


FIGURE 3.9 – Contraintes normales dues à une traction

→ Supposons l'hypothèse de SAINT-VENANT vérifiée, la contrainte  $\sigma$  engendrée par l'effort normal  $N$  est exprimée par :

$$\sigma = \frac{N}{S} \quad (3.6)$$

Une charge axiale est représentée par une force perpendiculaire à la section droite de la poutre. Cette force est appliquée au centroïde de la section. Sur la figure (3.10),  $P$  est une charge axiale pour la coupe 1 – 1, par contre elle ne l'est pas pour la section 2 – 2 parce qu'elle ne passe pas par son centroïde et elle engendre un moment  $M = Ph$  sur cette section.

### 3.3.2 Allongement axial

Considérons une poutre constituée d'un matériau homogène et isotrope et qui a une section  $S$  variable sollicitée par une force axiale  $P$  (figure 3.11). En supposant que l'hypothèse de BERNOULLI est vérifiée, alors toutes les fibres d'un élément de longueur  $dx$  s'allongent d'une longueur  $d\delta$  et leur allongement relatif  $\epsilon$  est défini par :

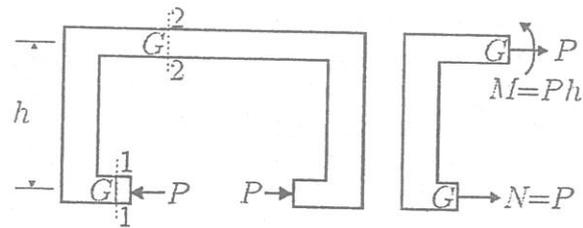


FIGURE 3.10 – Effort normal sur deux sections excentrées

$$\epsilon_x = \frac{d\delta}{dx} \quad (3.7)$$

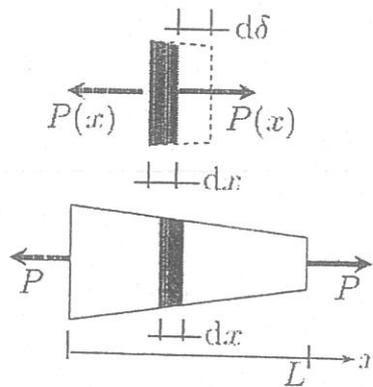


FIGURE 3.11 – Poutre à section variable sollicitée en traction

En considérant la loi de HOOKE et la définition d'une contrainte :

$$\sigma_x = E\epsilon_x \quad (3.8)$$

$$\sigma_x = \frac{N(x)}{S(x)} \quad (3.9)$$

L'expression d'un allongement élémentaire peut s'écrire sous la forme :

$$d\delta = \frac{N(x)}{ES(x)} dx \quad (3.10)$$

L'allongement total de la poutre est :

$$\Delta L = \int_0^L \frac{N(x)}{ES(x)} dx \quad (3.11)$$

Pour une plaque à section constante (figure 3.12), l'expression de l'allongement devient :

$$\Delta L = \frac{NL}{ES} \quad (3.12)$$

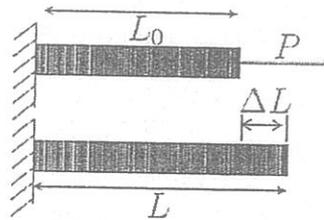


FIGURE 3.12 – Poutre à section constante sollicitée en traction

La contrainte étant exprimée par :

$$\sigma = \frac{N}{S} \quad (3.13)$$

### 3.3.3 Contraction latérale (Coefficient de poisson)

Une poutre chargée par un effort normal  $P$  (figure 3.13) s'allonge dans sa direction principale  $x$  par la valeur :

$$\Delta L = \epsilon L \quad (3.14)$$

Dans les deux autres sens (c.à.d les axes  $y$  et  $z$ ), la poutre se rétrécit par les valeurs :

$$\Delta L_y = -\nu \epsilon L_y \quad (3.15)$$

$$\Delta L_z = -\nu \epsilon L_z \quad (3.16)$$

où  $\nu$  est le coefficient de Poisson. Sa valeur est comprise entre 0,2 et 0,4 pour la grande majorité des matériaux.

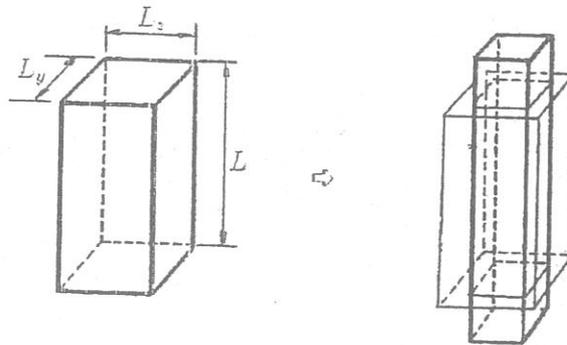


FIGURE 3.13 – Déformation d'une poutre sollicitée en traction

### 3.3.4 Contraintes dans une section inclinée

Considérons une poutre chargée en traction et une section inclinée  $S$  d'un angle  $\alpha$  dont la normale est  $\vec{n}$  et la tangente est  $\vec{t}$  (voir figure 3.14).

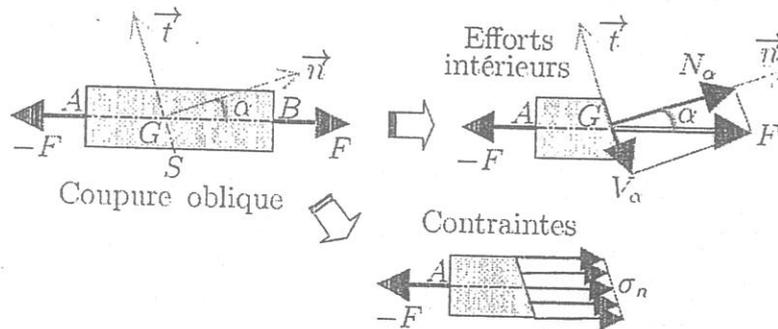


FIGURE 3.14 – Coupure inclinée dans une poutre sollicitée en traction

L'effort normal et l'effort tangentiel sur la section inclinée sont donnés par :

$$N_\alpha = F \cos \alpha \quad (3.17)$$

$$V_\alpha = F \sin \alpha \quad (3.18)$$

En supposant le principe de SAINT-VENANT vérifié, les contraintes  $\sigma_n$  sont identiques en tout point et parallèles à l'axe (ligne moyenne) de la poutre.

La projection de  $\sigma_n$  sur  $\vec{n}$  et  $\vec{t}$  donne respectivement la contrainte normale à la coupure  $\sigma_\alpha$  et la contrainte tangentielle  $\tau_\alpha$ .

La section inclinée  $S$  est reliée à une section droite  $S_0$  par la relation :

$$S_0 = S \cos \alpha \quad (3.19)$$

avec  $S$  est l'aire de la section inclinée et  $S_0$  est l'aire de la section droite.

La contrainte normale sur une section droite est donnée par :

$$\sigma_0 = \frac{F}{S_0} \quad (3.20)$$

On peut donc écrire les expressions des contraintes normale et tangentielle sur une section inclinée comme suit :

$$\sigma_\alpha = \frac{N_\alpha}{S} = \frac{N_\alpha}{S_0} \cos \alpha = \frac{F}{S_0} \cos^2 \alpha \quad (3.21)$$

$$\rightarrow \boxed{\sigma_\alpha = \sigma_0 \cos^2 \alpha} \quad (3.22)$$

$$\text{et : } \tau_\alpha = \frac{V_\alpha}{S} = \frac{F \sin \alpha \cos \alpha}{S_0} \quad (3.23)$$

$$\rightarrow \boxed{\tau_\alpha = \sigma_0 \sin \alpha \cos \alpha} \quad (3.24)$$

A partir des formules (3.22) et (3.24), on peut donc conclure que la contrainte normale  $\sigma_\alpha$  est maximale pour  $\alpha = 0^\circ$  ( $\sigma_{\alpha_{\max}} = \sigma_0$ ) et la contrainte tangentielle  $\tau_\alpha$  est maximale pour  $\alpha = 45^\circ$  ( $\tau_{\alpha_{\max}} = \sigma_0/2$ ).

Pour une structure composée d'un matériau qui a une faible résistance au cisaillement, la rupture par traction ou compression se développe dans un plan incliné à  $45^\circ$  dont les contraintes de cisaillement  $\tau_\alpha$  sont maximales (voir figure 3.15). En revanche, si la résistance à l'effort normal est plus faible, la rupture se produit dans une section droite ( $\alpha = 0^\circ$ ).

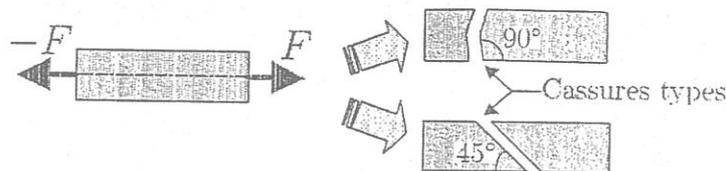


FIGURE 3.15 – Cassures types en traction

### 3.4 Variation uniforme de température

Comme les structures sont généralement exposées à des variations de température climatique ou industrielle, l'effet de ces dernières se manifeste sous forme de déformations (dilatation et rétrécissement) des éléments. Dans cette section, on étudiera l'effet de la variation de température sur les éléments structuraux.

#### 3.4.1 Déformation libre

La déformation causée par une variation de température est uniforme dans les trois directions (figure 3.16) et elle est exprimée par :

$$\epsilon = \alpha_L \Delta T \quad (3.25)$$

avec  $\alpha_L$  est le coefficient de dilatation thermique ( $^{\circ}\text{C}^{-1}$ ,  $\text{K}^{-1}$ ).

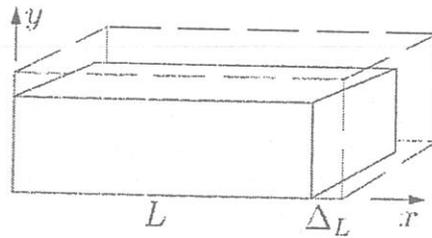


FIGURE 3.16 – Dilatation thermique d'un solide

Puisque la déformation est uniforme dans les trois directions, on a :

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0 \quad (3.26)$$

$$\epsilon = \epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_z \quad (3.27)$$

Dans le cas d'une déformation libre, il n'y a pas de contraintes engendrées et on a :

$$\sigma = \sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0 \quad (3.28)$$

La variation de longueur est exprimée par :

$$\Delta L = \epsilon L = \alpha_L L \Delta T \quad (3.29)$$

Matériau	Valeur	Matériau	Valeur	Matériau	Valeur
Aluminium	25.0	Acier inox	17.3	Béton	12.0
Cuivre	16.0	Polystyrène	70.0	Fer	12.0
Nickel	13.0	Epoxyde	55.0	Plomb	29.0
Zinc	30.0	Acier	12.0	Verre	9.0

TABLE 3.1 – Exemples de valeurs de  $\alpha_L$  ( $\times 10^{-6} \text{ mm.}^\circ\text{C}$ )

Nous présentons dans le tableau (A.1) les valeurs du coefficient de dilatation thermique  $\alpha_L$  pour quelques matériaux.

Nous constatons que le coefficient de dilatation thermique pour l'acier est le même que pour le béton :

$$\alpha_{L_{\text{béton}}} = \alpha_{L_{\text{acier}}} = 12.0 \times 10^{-6} \text{ mm.}^\circ\text{C} \quad (3.30)$$

Cela empêche le développement de contraintes de cisaillement, à cause d'une variation de température, à l'interface acier - béton dans un béton armé ou dans une structure mixte acier - béton.

### 3.4.2 Déformation empêchée

Les déformations causées par une variation de température induisent des contraintes complémentaires dans le cas d'une déformation empêchée.

Considérons une poutre libre qui est soumise à une augmentation de température  $\Delta T$  (figure 3.17). Avant que l'extrémité droite de la poutre ne touche le mur, il n'y a aucun effort développé dans la poutre. Si la température continue à augmenter, la barre aura tendance à s'allonger d'une longueur  $\Delta L = \alpha_L \Delta T L$  (formule 3.29) mais le mur empêche cette déformation en créant une force de compression dans la barre.

L'égalité des déformations donne (voir figure 3.18) :

$$\delta = \Delta L_{\text{temp}} - \Delta L_F \quad (3.31)$$

$$= \alpha_L \Delta T L - \frac{FL}{ES} \quad (3.32)$$

sachant que  $\Delta L_F = \frac{FL}{ES}$  (voir formule A.1), où  $S$  est l'aire d'une section droite de la poutre.

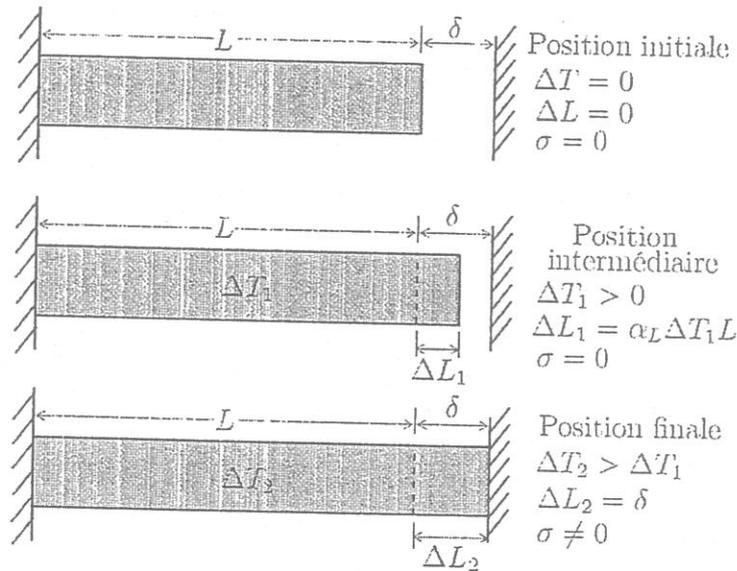


FIGURE 3.17 – Étapes d'une déformation axiale empêchée

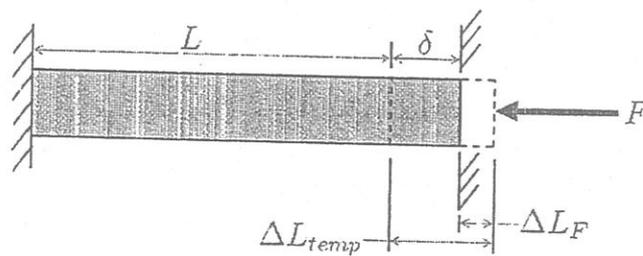


FIGURE 3.18 – Déformation empêchée d'une poutre sous sollicitation thermique

Connaissant  $\delta$  et  $\Delta T_2$ , on peut calculer la force de compression  $F$  produite :

$$F = \frac{AS}{L}(\alpha_L \Delta T_2 L - \delta) \quad (3.33)$$

La contrainte développée dans une section droite de la poutre est :

$$\sigma = \frac{F}{S} \quad (3.34)$$

### 3.5 Diagrammes des efforts normaux $N$ (DEN)

Nous présentons ci-bas quelques propriétés des diagrammes des efforts normaux (DEN) :

\* Un DEN donne les valeurs de l'effort normal dans toutes les sections perpendiculaires à la force axiale.

\* Un DEN est obtenu par la méthode des sections en faisant une coupe entre chaque force concentrée ou à travers chaque charge répartie.

\* Convention de signes :

✂ traction : +  
✂ compression : -

\* Pour construire un DEN, faire le DCL (Diagramme du Corps Libre) et appliquer les lois de l'équilibre statique à chacune des coupes analysées.

☞ Attention au sens des efforts.

☞ Exemple 1 :

Soit une poutre chargée par des efforts concentrés comme schématisé dans la figure (3.19).

Chercher le DEN de ce schéma ?

☞ Solution 1 :

Section ① :

$$N(x) = 50 \text{ kN} - 20 \text{ kN} - 20 \text{ kN} + 30 \text{ kN} \quad (3.35)$$

$$= 40 \text{ kN} \quad (3.36)$$

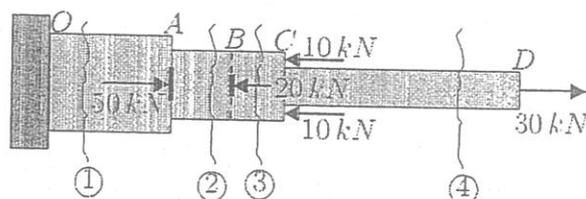


FIGURE 3.19 – Poutre à sections variables par morceaux

Section ② :

$$N(x) = -20 \text{ kN} - 20 \text{ kN} + 30 \text{ kN} \quad (3.37)$$

$$= -10 \text{ kN} \quad (3.38)$$

Section ③ :

$$N(x) = -20 \text{ kN} + 30 \text{ kN} \quad (3.39)$$

$$= 10 \text{ kN} \quad (3.40)$$

Section ④ :

$$N(x) = 30 \text{ kN} \quad (3.41)$$

Le DEN est présenté dans la figure (3.20).

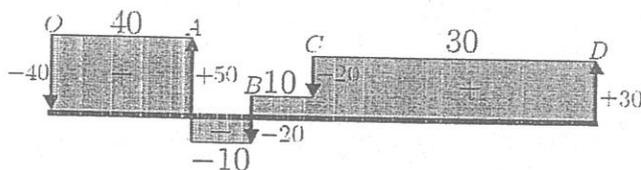


FIGURE 3.20 – DEN de l'exemple 1

## ❖ Exemple 2 :

Soit une poutre chargée par un effort concentré et son propre poids (figure 3.21).

Déterminer le DEN ?

⇒ Solution 2 :

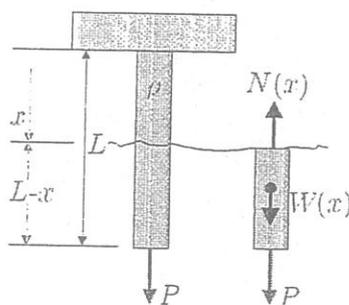


FIGURE 3.21 – Schéma de l'exemple 2

Pour une position  $x$  donnée, le poids de la partie inférieure de la poutre est donné par :

$$W(x) = \rho g V(x) \quad (3.42)$$

$$= \rho g S(L - x) \quad (3.43)$$

où  $\rho$  est la masse volumique du matériau de la poutre,  $V(x)$  est le volume au dessous de la position  $x$  et  $S$  est l'aire d'une section droite de la poutre. L'effort appliqué à la position  $x$  est :

$$N(x) = P + W(x) \quad (3.44)$$

$$= P + \rho g S(L - x) \quad (3.45)$$

Pour les extrémités de la poutre, on a :

$$N_0 = P + \rho g SL \quad (3.46)$$

$$N_L = P \quad (3.47)$$

Le DEN de cet exemple est présenté dans la figure (3.22).



FIGURE 3.22 – DEN de l'exemple 2

### 3.6 Cas des cylindres ouverts à parois minces

On retrouve fréquemment dans la pratique des cylindres droits à parois minces (canalisations, ...) contenant des fluides sous pression. Pour un cylindre ouvert infiniment long, il n'existe aucune contrainte longitudinale.

Soit un cylindre de longueur caractéristique  $b$ , de rayon  $r$  et d'épaisseur  $t$  soumis à une pression interne uniforme  $p$  (figure 3.19).

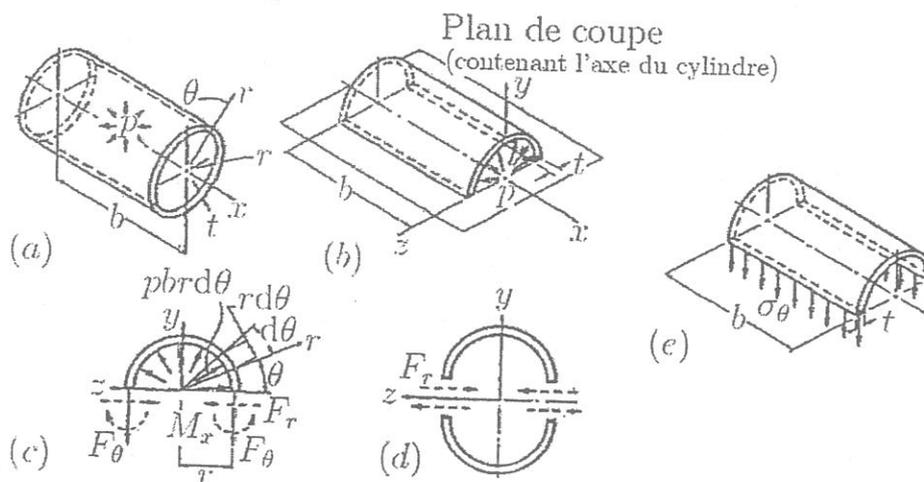


FIGURE 3.23 – Cylindre ouvert à paroi mince sous pression

#### 3.6.1 Etude des contraintes

\* On suppose que la contrainte est uniforme (variation négligeable) sur

toute l'épaisseur de la paroi. Cette hypothèse est d'autant plus valable que le rapport  $\frac{t}{r} \rightarrow 0$  (en pratique lorsque  $\frac{t}{r} \leq \frac{1}{10}$ ).

\* La variation de la contrainte  $\sigma$  est négligeable sur l'épaisseur (puisque  $\frac{t}{r} \rightarrow 0$ ), donc  $M_x \rightarrow 0$ .

\* Par symétrie selon l'axe  $y$ , il en résulte que  $F_r = 0$ .

\* Sachant que l'effort appliqué sur un élément  $d\theta$  et sur la longueur  $b$  est donné par :

$$dF_\theta = pbrd\theta \quad (3.48)$$

L'équilibre des forces verticales (selon l'axe  $y$ ) donne :

$$2F_\theta = \int_0^\pi pbr \sin \theta d\theta \quad (3.49)$$

$$= 2pbr \quad (3.50)$$

$$\Rightarrow \boxed{F_\theta = pbr} \quad (3.51)$$

\* La contrainte normale circonférentielle  $\sigma_\theta$  est due à  $F_\theta$  :

$$\sigma_\theta = \frac{F_\theta}{bt} \quad (3.52)$$

$$= \frac{pbr}{bt} \quad (3.53)$$

$$\Rightarrow \boxed{\sigma_\theta = \frac{pr}{t}} \quad (3.54)$$

$\sigma_\theta$  est appelée aussi **tension de membrane** (uniforme sur toute l'épaisseur du cylindre).

### 3.6.2 Etude des allongements

\* La paroi étant mince, on peut développer le cylindre et obtenir ainsi une feuille de longueur  $2\pi r$  et de section  $bt$  soumise à une traction uniaxiale d'intensité  $F_\theta$ .

En reprenant la formule (A.1), l'allongement circonférentiel est donné par :

$$\delta_{\theta} = \frac{\sigma_{\theta} \cdot (2\pi r)}{E} \quad (3.55)$$

$$\rightarrow \boxed{\delta_{\theta} = \frac{2\pi r^2 p}{tE}} \quad (3.56)$$

\* Si on a une variation de température  $\Delta T$  en plus, l'allongement total devient :

$$\delta_{\theta} = \frac{2\pi r^2 p}{tE} + \alpha_L (2\pi r) \Delta T \quad (3.57)$$

$$\rightarrow \delta_{\theta} = 2\pi \left( \frac{pr^2}{tE} + \alpha_L r \Delta T \right) \quad (3.58)$$

\* En pratique, c'est la variation du rayon  $\delta_r$  qui est la plus intéressante. Le périmètre final est :

$$2\pi(r + \delta_r) = 2\pi r + \delta_{\theta} \quad (3.59)$$

$$\rightarrow \delta_r = \frac{\delta_{\theta}}{2\pi} \quad (3.60)$$

$$\rightarrow \boxed{\delta_r = \frac{pr^2}{tE} + \alpha_L r \Delta T} \quad (3.61)$$

### 3.7 Exercices

↔ Exercice 1 :

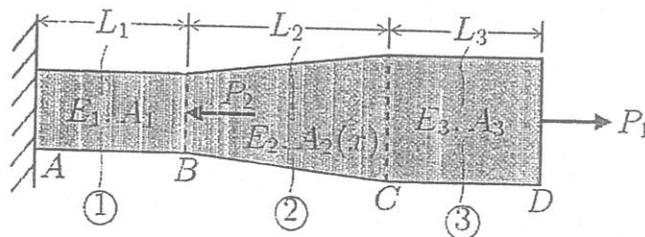


FIGURE 3.24 – Schéma de l'exercice 1

1. Tracer le diagramme des efforts normaux DEN.

2. Calculer les allongements de la poutre au niveau des sections ①, ② et ③ et au niveau des points  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$ .

⇒ Solution 1 :

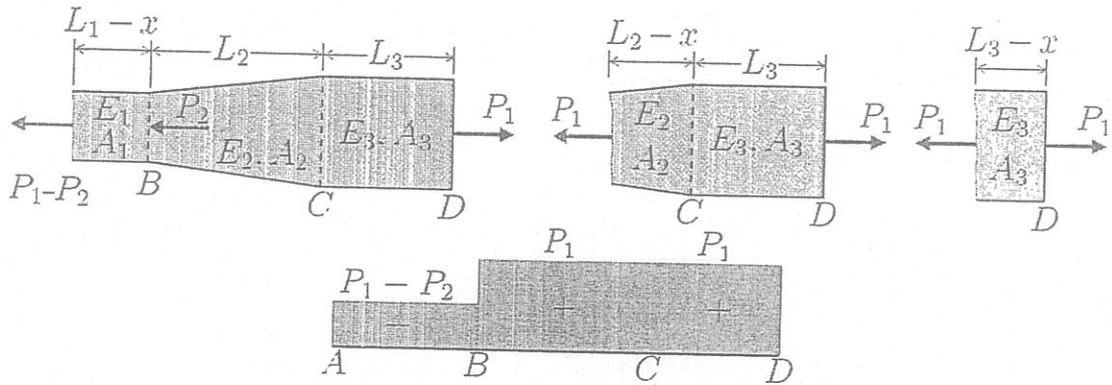


FIGURE 3.25 – Coupes et DEN de l'exercice 1

⇒ Exercice 2 :

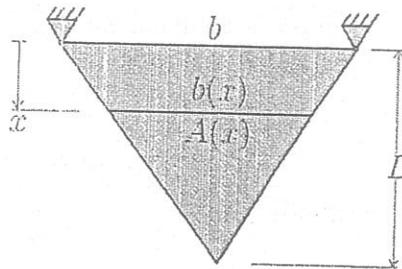


FIGURE 3.26 – Schéma de l'exercice 2

⇒ Solution 2 :

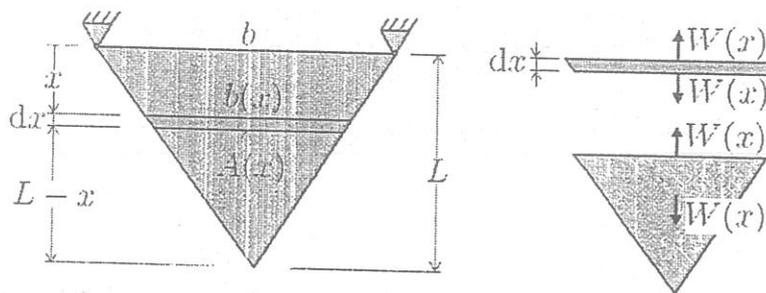


FIGURE 3.27 – Schéma de la solution de l'exercice 2