Contrôle en méthodes numériques

Durée (2 h : 00 mn)

Prof. A.Ramadane, Ph.D.

Université Internationale de Casablanca

LAUREATE INTERNATIONAL UNIVERSITIES

Exercice 1 (6 points)

Considérons l'intégrale

$$I = \int_{-3}^{3} e^{2x^2} \mathrm{dx}$$

a) Calculer une approximation de I en appliquant la méthode du trapèze composée avec 4 intervalles.
b) Pour cette méthode, quel est le nombre minimal d'intervalles à utiliser pour obtenir une approximation qui a une erreur d'au plus 10^{-2} ?
c) Utiliser la méthode de quadrature de Gauss à 3 nœuds pour trouver une approximation de I
d) Calculer une approximation de I en appliquant la quadrature suivante :
$$\int_{-1}^{1} f(t)dt \simeq \frac{1}{2} f(-1) + \frac{3}{2} f(\frac{1}{3})$$
e) Sachant que le degré de précision de la méthode du trapèze composée est 1, est-il possible d'obtenir avec cette méthode (en utilisant un nombre suffisamment grand d'intervalles) une approximation qui soit meilleure que celle que l'on peut calculer par la quadrature de la question (d) ? Discuter

Exercice2 (3 points)

$$f''(x) \simeq \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}$$

a) Obtenir l'ordre de cette approximation en utilisant les développements de Taylor appropriés (détailler les calculs).

b) Utiliser cette formule de différences pour obtenir une approximation de $f''(3,0)$ pour la fonction tabulée suivante, en prenant d'abord h = 0, 2, ensuite h =0,1.

x	f(x)
2.8	1,587 7867
2.9	1,641 8539
3.0	1,693 1472
3.1	1,741 9373
3.2	1,788 4574

Exercice 3 (3,5 points)

On considère le θ-schéma

$$f'(x) \simeq (1-\theta)\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right) + \theta\left(\frac{f(x)-f(x-h)}{h}\right) = App_\theta(h)$$

obtenu à partir d'une combinaison linéaire des formules de différences avant et arrière d'ordre 1. À l'aide de développements de Taylor de degré appropriés, montrer que les 2 premiers termes de l'erreur associée au θ-schéma ($App_\theta(h)$) sont donnés par:

$$\frac{(2\theta-1)h}{2}f''(x) - \frac{h^2}{6}f'''(x),$$

et en déduire l'ordre de précision du θ-schéma en fonction du paramètre θ.

Exercice 4 (4 points)

Soit g(t) une fonction continue définie sur l'intervalle [-1,1]; . On choisit trois points d'intégration t_1; t_2 et t_3 tels que t_1=-1; t_2= α et t_3 = 1, où α est un nombre réel donné respectant | α | < 1. Pour approcher l'intégrale $\int_{-1}^{1} g(t)dt$, la formule de quadrature suivante est considérée:

$$I(g) = \sum_{i=1}^{3} w_i \, g(t_i) = w_1 \, g(-1) + w_2 \, g(\alpha) + w_3 \, g(1)$$

a) Trouver les poids d'intégration w1; w2 et w3 en fonction de α tels que la formule de quadrature soit de degré de précision 2.

b) Trouver ensuite α tel que I(g)= $\int_{-1}^{1} g(t)dt$ pour tout polynôme g(t) de degré 3.

c) Réécrire cette formule sur l'intervalle [a ; b] pour intégrer une fonction continue f (x) définie sur cet intervalle. Identifier la formule d'intégration numérique de Newton-Cotes qui est obtenue.

Université Internationale de Casablanca

LAUREATE INTERNATIONAL UNIVERSITIES

Exercice 5 (3,5 points)

On considère la formule aux différences

$$App(h) = \frac{-f(x+3h) + 4f(x+2h) - 5f(x+h) + 2f(x)}{h^2} \simeq f''(x),$$

une approximation de $f''(x)$.

(a) On dispose des valeurs suivantes de la fonction $f(x)$:

x	$f(x)$
1,0	0,841 471
1,1	0,891 207
1,2	0,932 039
1,3	0,963 558
1,4	0,985 450
1,5	0,997 495
1,6	0,999 574

En vous servant de la formule aux différences $App(h)$, calculer deux approximations de $f''(1,0)$ pour $h = 0,1$ et pour $h = 0,2$. Sachant que la valeur exacte de $f''(1,0) = -0,841\,471$, estimer numériquement *l'ordre de précision* de cette formule aux différences.

(b) En vous servant des développements de Taylor appropriés, montrer que

$$App(h) = f''(x) - \frac{11}{12}h^2 f^{(4)}(x) + \mathcal{O}(h^3),$$

et en déduire *l'ordre de précision* de l'approximation $App(h)$.