T.D. d’interpolation

Exercice 1

Soit $f(x) = 2\sin(x) + 3\cos(x)$, où x est en radians.

(a) Déterminer le polynôme de degré 2 qui interpole la fonction $f(x)$ en $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{\pi}{2}$ et $x_2 = \pi$.

(b) Estimer la valeur de $f(\frac{\pi}{4})$ en utilisant le polynôme trouvé en (a).

(c) Donner une borne supérieure de l'erreur commise en (b). **(Ne pas calculer l'erreur exacte).**

(d) Au lieu d'utiliser le polynôme calculé en (a), on décide d'interpoler la fonction $f(x)$ sur l'intervalle $[0\ ,\ \pi]$ en $x_i = i\frac{\pi}{n}$ pour $i = 0, \cdots, n$ par une fonction linéaire par morceaux. Cette fonction s'obtient en reliant chaque paire de points consécutifs, $(x_i, f(x_i))$ et $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$, par un segment de droite. Quel doit être le nombre n de sous-intervalles pour que l'erreur d'interpolation (en valeur absolue) soit partout inférieure à 10^{-4}?

(a) $p_2(x) = 3\frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)(x-\pi)}{(\frac{\pi}{2})\pi} + 2\frac{-x(x-\pi)}{\frac{\pi}{2}\frac{\pi}{2}} - 3\frac{x\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{\pi(\frac{\pi}{2})}$.

(b) $f(\frac{\pi}{4}) \simeq P_2(\frac{\pi}{4}) = 3$.

(c)

$|e_2(x)| \leq \max_{\xi(x)\in]0,\pi[} |f^{(3)}(\xi(x))|\frac{h^3}{4\times 3} = \max_{\xi(x)\in]0,\pi[} |-2\cos x + 3\sin x|\frac{\pi^3}{96}$

$\max_{\xi(x)\in]0,\pi[} |-2\cos x + 3\sin x| \simeq 3,61 \Rightarrow |e_2(x)| \leq \frac{3,61\pi^3}{96} = 1,165\,965.$

Autre solution $|-2\cos x + 3\sin x| \leq 2|\cos x| + 3|\sin x| \leq 5 \Rightarrow |e_2(x)| \leq 1,614\,91$

(d)

$|e_1(x)| \leq \max_{\xi(x)\in]0,\pi[} |f^{(2)}(\xi(x))|\frac{h^2}{4\times 2} = \max_{\xi(x)\in]0,\pi[} |-2\sin x - 3\cos x|\frac{\pi^2}{8n^2}$

$\max_{\xi(x)\in]0,\pi[} |-2\sin x - 3\cos x| \simeq 3,61 \Rightarrow |e_1(x)| \leq \frac{0,45125\pi^2}{n^2} \leq 10^{-4}$

$n \geq \sqrt{4,515\times 10^3\pi^2} = 211,037 \Rightarrow n \geq 212$

Autre solution $|-2\sin x - 3\cos x| \leq 2|\sin x| + 3|\cos x| \leq 5 \Rightarrow n \geq 249.$

Exercice 2

En relevant toutes les 10 secondes la vitesse d'écoulement de l'eau dans une conduite cylindrique, on a obtenu

t	0	10	20	30
v	2,00	1,89	1,72	1,44

(a) Trouver une approximation de la vitesse en $t = 15$ via un polynôme interpolant de degré 2 ;

(b) Répéter l'opération avec un polynôme de degré 3.

(a) $v(15) \simeq P_2(15) = 1{,}8125.$

(b) $v(15) \simeq P_3(15) = 1{,}815\,625.$

Exercice 3

Soit $f(x)$ une fonction qui passe par les points $q_1 = (0, 3)$, $q_2 = (2, -1)$ et $q_3 = (5, 8)$.

(a) À l'aide de la *formule de Newton*, trouver le polynôme d'interpolation de degré 2 qui passe par les points q_1, q_2 et q_3 et proposer une approximation de $f(3)$.

(b) Sachant que $f(6) = 7$, donner une approximation de l'erreur commise en (a).

(c) On sait aussi que $f'(0) = 6$. Calculer le polynôme d'interpolation de degré minimal passant par les points q_1, q_2 et q_3, dont la dérivée en $x = 0$ est égale à 6.

(a) $f(3) \simeq P_2(3) = 0.$

(b) $E_2(3) \simeq 2.$

(c) $P_3(x) = 3 + 6x - 6x^2 + x^3.$

Exercice 4

On considère la table de différences divisées suivante:

x_i	$f(x_i)$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, \cdots, x_{i+2}]$	$f[x_i, \cdots, x_{i+3}]$
1,9	0,94 630			
		-0,127 975		
1,5	0,99 749		?	
		-0,314 725		?
2,3	0,74 571		?	
		-0,795 824		
2,7	0,42 738			

(a) Completer la table.

(b) En vous servant de la table de différences divisées, calculer une approximation de $f(1,8)$ en utilisant le polynôme de Newton passant par les 3 premiers points.

(c) Donner une estimation de l'erreur d'interpolation en $x = 1,8$ et en déduire le nombre de chiffres significatifs de l'approximation obtenue en (b).

(d) Sachant que $f(x) = \sin(x)$, calculer une borne supérieure de la valeur absolue de l'erreur d'interpolation en $x = 1,8$.

(e) Quel polynôme est le plus précis, celui trouvé en (b), ou le polynôme de Lagrange passant par $f(x)$ en $x = 1{,}5;\ 1{,}9$ et $2{,}3$? Justifier votre reponse.

x_i	$f(x_i)$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, \cdots, x_{i+2}]$	$f[x_i, \cdots, x_{i+3}]$
1,9	0,94 630			
		-0,127 975		
1,5	0,99 749		-0,466 875	
		-0,314 725		0,082 448
2,3	0,74 571		-0,400 917	
		-0,795 824		
2,7	0,42 738			

(b) $f(1,8) \simeq p_2(1,8) = 0,973\,104$.

(c) $|E_2(1,8)| \simeq 0,123\,672 \times 10^{-2} \Rightarrow p_2(1,8) = 0,\boxed{97}3\,104$ possède 2 chiffres significatifs.

(d) $E_2(1,8) \leq \frac{|\cos(2,3)|}{3!} |(1,8-1,9)(1,8-1,5)(1,8-2,3)|$.

(e) On obtient le même résultat car le polynôme de degré 2 qui passe par les points d'abscisses $x = 1,5$; $1,9$ et $2,3$ est unique.