Université Internationale de Casablanca
LAUREATE INTERNATIONAL UNIVERSITIES
Université Privée Autorisée par l'Etat UP2/11

# Interpolation

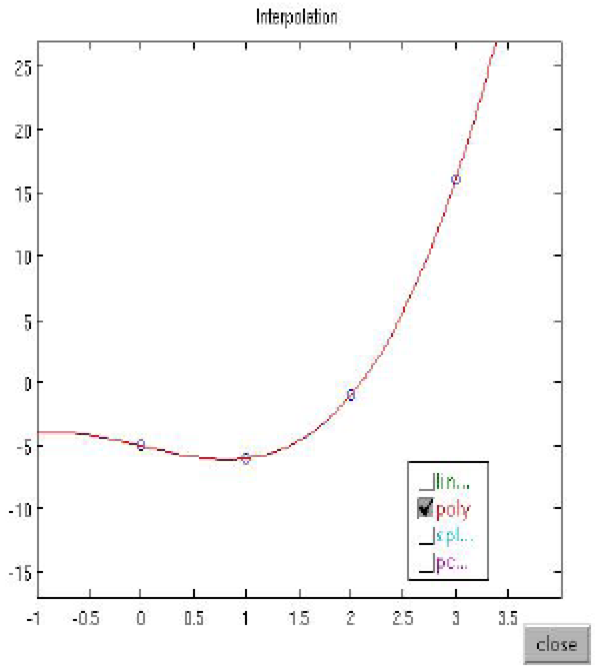
A. Ramadane, Ph.D.

### Problème fondamental de l'interpolation

Etant donné un ensemble de points $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^{n}$,
il s'agit de construire une fonction $p$ relativement simple et qui passent par les données :

$$p(x_i) = y_i \quad \text{pour } i = 0, 1, 2, \ldots, n$$

Les points $(x_i, y_i)$ sont appelés *points de collocation* ou *points d'interpolation*



Pourquoi vouloir interpoler des données ?

- Souvent les données sont les résultats de mesures expérimentales et l'expression exacte de $f$ n'est pas connue.
- Il est possible que l'expression de $f$ soit connue d'avance mais trop compliquée à manipuler.
- L'expression de la fonction $f$ n'est pas connue mais seulement en certains points $(x_i, f(x_i))$ pour $i = 0, 1, 2, \ldots, n$.
- L'interpolation permet d'évaluer $f(x)$ pour des valeurs de $x$ différentes des $x_i$.
- Le calcul de $f$ peut être très coûteux, donc on ne veut pas évaluer $f$ trop souvent.
- Particulièrement utile pour la dérivation et l'intégration numérique.

Dans ce chapitre, il sera surtout question d'interpolation polynômiale :

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n$$

Exemple à 3 points : $(-2, -15), (1, 3), (3, -5)$

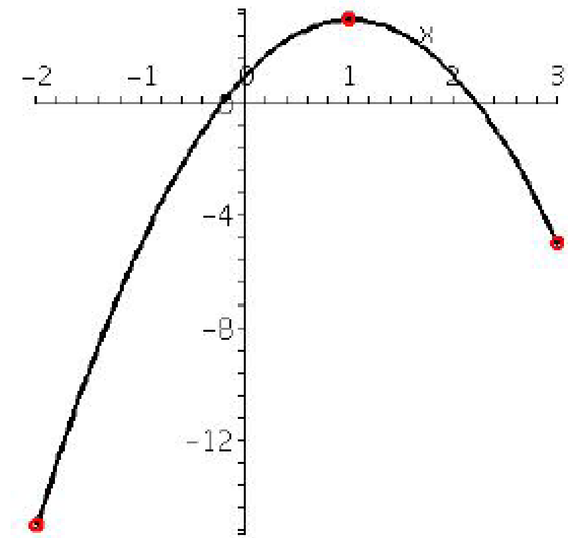
On cherche un polynôme d'interpolation de la forme

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

Pour cela, on doit calculer les $a_i$ :

$$\begin{cases} a_0 - 2a_1 + 4a_2 = -15 \\ a_0 + a_1 + a_2 = 3 \\ a_0 + 3a_1 + 9a_2 = -5 \end{cases}$$

Interpolation de 3 points



Intuitivement, il faut obtenir un système d'équations avec autant d'inconnues que d'équations.
Pour cela, il faut choisir le degré de $p$ égale à $n$.

**Théorème**

Tout polynôme de degré $n \geq 1$ admet très exactement $n$ racines (avec multiplicités) qui peuvent être réelles ou complexes conjuguées. (On sait que $r$ est une racine de $p_n(x)$ si $p_n(r) = 0$.)

**Corrolaire**

Par $(n+1)$ points de collocation d'abscisses distinctes $(x_i, y_i)$ pour $i = 0, 1, 2, \cdots, n)$, on ne peut faire correspondre qu'un et un seul polynôme de degré $n$.

Commmençons par un exemple à 4 points : on cherche un polynôme $p_3$ qui passent par $(x_0, y_0), (x_1, y_2), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ :

$$p_3(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$

Les égalités $p_3(x_i) = y_i$ s'écrivent

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + a_3 x_0^3 = y_0 \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + a_3 x_1^3 = y_1 \\ a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_2^3 = y_2 \\ a_0 + a_1 x_3 + a_2 x_3^2 + a_3 x_3^3 = y_3 \end{cases}$$

ou sous forme matricielle

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & x_0^3 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \qquad \Longleftrightarrow \qquad Va = y$$

Les égalités

$$a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + a_3 x_i^3 + \cdots + a_n x_i^n = f(x_i) \qquad \text{pour } i = 0, 1, 2, \ldots, n$$

constituent un système linéaire de $(n+1)$ équations en $(n+1)$ inconnues.

### Système matriciel de Vandermonde

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & x_0^3 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & x_n^3 & \cdots & x_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{bmatrix}$$

Pour le polynôme de degré 3 passant par $(0,1),(1,2),(2,9)$ et $(3,28)$ on a le système

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 9 \\ 28 \end{bmatrix}$$

donnant $a_0 = 1, a_1 = a_2 = 0$ et $a_3 = 1$ i.e. $p(x) = 1 + x^3$. Mais si on retire le dernier points de collocation on doit résoudre un autre système linéaire :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 9 \end{bmatrix}$$

- Si les abscisses sont distinctes (ce qui est notre cas) alors la matrice de Vandermonde est inversible. Ce qui démontre l'existence d'un interpolant quelque soit l'ensemble de points de collocation d'abscisses distinctes.
- On peut montrer que le conditionnement de la matrice de Vandermonde est mauvais, en fait le système devient numériquement singulier pour $n$ assez grand (à cause des $x_i^n$).
- L'ajout ou le retrait d'un point de collocation illustre le peut de flexibilité de la méthode.

L'approche par la matrice de Vandermonde exige la résolution d'un système linéaire.

Est-ce vraiment nécessaire ?

L'approche de Lagrange consiste à chercher le polynôme d'interpolation de la forme

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i(x)$$

où $L_i(x)$ sont des polynômes de degré $n$ vérifiant

$$\begin{cases} L_i(x_i) & = & 1 & \forall i \\ L_i(x_j) & = & 0 & \forall j \neq i \end{cases}$$

On doit construire deux polynômes $L_0(x)$ et $L_1(x)$ de degré 1 qui vérifient :

$$\begin{cases} L_0(x_0) = 1 \\ L_0(x_1) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} L_1(x_0) = 0 \\ L_1(x_1) = 1 \end{cases}$$

On obtient

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)}$$
$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)}$$

## Cas pour $L_0$

On doit construire un polynômes $L_0(x)$ de degré 2 qui vérifient :

$$\begin{cases} L_0(x_0) = 1 \\ L_0(x_1) = 0 \\ L_0(x_2) = 0 \end{cases}$$

On obtient

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}$$

De même, on obtient

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} \quad \text{et} \quad L_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

On veut des polynômes de degré $n$ tels que

$$L_i(x_i) = 1 \quad L_i(x_j) = 0 \;\; i \neq j$$

L'expression générale pour la fonction $L_i(x)$ est :

$$L_i(x) = \frac{(x - x_0)\cdots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\cdots(x - x_n)}{(x_i - x_0)\cdots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\cdots(x_i - x_n)} = \prod_{j \neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

**Interpolation à $n + 1$ points de collocation**

Soit $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$, $\cdots (x_n, f(x_n))$ alors l'interpolant de degré n de $f$ est

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)L_i(x)$$

C'est la formule de Lagrange

## Exemple 5.4

On cherche l'interpolant passant par les points $(0,1),(1,2),(2,9)$ et $(3,28)$. Utilisant la formule de Lagrange on a

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} = \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{-6}$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} = \frac{x(x-2)(x-3)}{2}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} = \frac{x(x-1)(x-3)}{-2}$$

$$L_3(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} = \frac{x(x-1)(x-2)}{6}$$

$$p_3(x) = \sum_{i=0}^{3} f(x_i)L_i(x) = 1L_0(x) + 2L_1(x) + 9L_2(x) + 28L_3(x)$$

On cherche l'interpolant passant par les points $(0,1), (1,2), (2,9)$ et $(3,28)$. Utilisant la formule de Lagrange on a

$$p_3(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{-6} + 2\frac{x(x-2)(x-3)}{2} + 9\frac{x(x-1)(x-3)}{-2} + 28\frac{x(x-1)(x-2)}{6}$$

$$p_3(x) = -\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{6} + x(x-2)(x-3) - 9\frac{x(x-1)(x-3)}{2} + 14\frac{x(x-1)(x-2)}{3}$$

Il s'agit ici des données de l'exemple 5.1. Le polynôme étant unique on est garanti qu'en développant la formule de Lagrange on aura $p_3(x) = 1 + x^3$ (la solution obtenue dans l'exemple 5.1). Ainsi, on a : $f(2.5) \simeq p_3(2.5) = 16,625$.

Les deux approches précédentes possèdent un inconvénient majeur : elles ne sont pas récursives.
Si on souhaite ajouter une donnée $(x_{n+1}, y_{n+1})$, il faut recommencer tout le processus à zéro ! ! !
L'approche de Newton permet :

- une évaluation trés économique du polynôme d'interpolation.
- la récursivité

Au lieu d'utiliser le développement usuel d'un polynôme, on prend un autre plus approprié

$$
\begin{aligned}
p_n(x) \quad = \quad & c_0 \\
& + c_1(x - x_0) \\
& + c_2(x - x_0)(x - x_1) \\
& + c_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \\
& \vdots \\
& + c_{n-1}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_{n-2}) \\
& + c_n(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_{n-1})
\end{aligned}
$$

## Récursivité

La récursion prendra la forme

$$p_n(x) = p_{n-1}(x) + c_n(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_{n-1})$$

Soient les 3 points : $(-2, -15), (1, 3), (3, -5)$
On cherche un polynôme d'interpolation de la forme

$$p(x) = c_0 + c_1(x+2) + c_2(x+2)(x-1)$$

Pour cela, on doit calculer les $c_i$ :

$$\begin{cases} c_0 & = & -15 \\ c_0 + 3c_1 & = & 3 \\ c_0 + 5c_1 + 10c_2 & = & -5 \end{cases}$$

de solution $c_0 = -15, c_1 = 6, c_2 = -2$ facile à obtenir car le système linéaire est triangulaire.

Dans la suite, on fera l'hypothèse que les données proviennent d'une fonction $f$ : $y_i = f(x_i)$ et l'on pose $f[x_i] = f(x_i)$.

### Premières différences divisées

$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f[x_{i+1}] - f[x_i]}{x_{i+1} - x_i} = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$$

### Deuxièmes différences divisées

$$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}] - f[x_i, x_{i+1}]}{(x_{i+2} - x_i)}$$

### $n$-ièmes différences divisées

$$f[x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n] = \frac{f[x_1, x_2, \ldots, x_n] - f[x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}]}{(x_n - x_0)}$$

L'unique polynôme de Newton de degré $n$ passant par les $(n+1)$ points de collocation $((x_i, f(x_i))$ pour $i = 0, 1, 2, \cdots, n)$ :

$$p_n(x) = f(x_0) + \sum_{i=1}^{n} f[x_0, x_1, \cdots, x_i](x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{i-1})$$

Ce polynôme peut s'écrire sous la forme récursive :

$$p_n(x) = p_{n-1}(x) + c_n(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})$$

et les coefficients de ce polynôme sont les différences divisées :

$c_i = f[x_0, x_1, x_2, \ldots, x_i]$ pour $0 \leq i \leq n$

**Exemple d'ordre 2**

Le polynôme :

$$p_2(x) = \underbrace{f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0)}_{p_1(x)} + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)$$

passe par les trois premiers points de collocation. Aussi obtenue par l'ajout d'un terme de degré 2 au polynôme $p_1(x)$ déjà calculé.

La manière la plus simple consiste à construire une table dite de différences divisées de la façon suivante.

## Table de différences divisées

| $x_i$ | $f[x_i]$ | $f[x_i, x_{i+1}]$ | $f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$ | $f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}]$ |
|---|---|---|---|---|
| $x_0$ | $f(x_0)$ | | | |
| | | $f[x_0, x_1]$ | | |
| $x_1$ | $f(x_1)$ | | $f[x_0, x_1, x_2]$ | |
| | | $f[x_1, x_2]$ | | $f[x_0, x_1, x_2, x_3]$ |
| $x_2$ | $f(x_2)$ | | $f[x_1, x_2, x_3]$ | |
| | | $f[x_2, x_3]$ | | |
| $x_3$ | $f(x_3)$ | | | |

On cherche l'interpolant passant par les points $(0,1),(1,2),(2,9)$ et $(3,28)$. Utilisant la table de différences divisées :

## Table de différences divisées

| $x_i$ | $f[x_i]$ | $f[x_i, x_{i+1}]$ | $f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$ | $f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}]$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | | | |
| | | $f[0,1] = 1$ | | |
| 1 | 2 | | $f[0,1,2] = 3$ | |
| | | $f[1,2] = 7$ | | $f[0,1,2,3] = 1$ |
| 2 | 9 | | $f[1,2,3] = 6$ | |
| | | $f[2,3] = 19$ | | |
| 3 | 28 | | | |

La formule de Newton donne le polynôme de degré 2
$p_2(x) = 1 + 1(x-0) + 3(x-0)(x-1) = 1 + x + 3x(x-1)$
et le polynôme de degré 3
$p_3(x) = p_2(x) + 1(x-0)(x-1)(x-2) = x^3 + 1$

Si on veut ajouter le point $(5, 54)$, on va compléter la table de différences divisées déjà utilisée :

| Table de différences divisées | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | $f(x_i)$ | $f[x_i, x_{i+1}]$ | $f[x_i, \cdots, x_{i+2}]$ | $f[x_i, \cdots, x_{i+3}]$ | $f[x_i, \cdots, x_{i+4}]$ |
| 0 | 1 | | | | |
| | | 1 | | | |
| 1 | 2 | | 3 | | |
| | | 7 | | 1 | |
| 2 | 9 | | 6 | | $-\frac{3}{5}$ |
| | | 19 | | $-2$ | |
| 3 | 28 | | $-2$ | | |
| | | 13 | | | |
| 5 | 54 | | | | |

La formule de Newton donne le polynôme de degré 4 est
$p_4(x) = p_3(x) - \frac{3}{5}(x-0)(x-1)(x-2)(x-3)$

## exemple 5.6

On cherche l'interpolant passant par les points $(2,1)$,$(0,-1)$, $(5,10)$ et $(3,-4)$. Utilisant la table de différences divisées :

### Table de différences divisées

| $x_i$ | $f[x_i]$ | $f[x_i, x_{i+1}]$ | $f[x_i, \cdots, x_{i+2}]$ | $f[x_i, \cdots, x_{i+3}]$ |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 1 | | | |
| | | 1 | | |
| 0 | $-1$ | | 0.4 | |
| | | 2, 2 | | 1, 2 |
| 5 | 10 | | 1, 6 | |
| | | 7 | | |
| 3 | $-4$ | | | |

La formule de Newton donne le polynôme de degré 3

$p_3(x) = 1 + 1(x-2) + 0,4(x-2)(x-0) + 1,2(x-2)(x-0)(x-5)$

M. de Horner : $p_2(x) = 1 + (x-2)(1 + (x-0)(0,4 + 1,2(x-5)))$

On peut estimer la fonction inconnue $f(x)$ :

$f(1) \simeq p_3(1) = 1 + (-1)(1 + (1)(0.4 + 1.2(-4))) = 4.4$

Soient les noeuds de collocation $(x_i, y_i)$ où $y_i = f(x_i)$ pour une fonction $f$ à priori inconnue, on définit l'erreur d'interpolation par

$$E_n(x) = f(x) - p_n(x).$$

où $p_n$ est le polynôme de degré $n$ qui interpole ces données.

## Théorème

Soit $x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n$, les abscisses des points de collocation. On suppose que la fonction $f(x)$ est définie dans l'intervalle $[x_0, x_n]$ et qu'elle est $(n+1)$ fois dérivable dans $]x_0, x_n[$. Alors, pour tout $x$ compris dans $[x_0, x_n]$, il existe $\xi(x)$ appartenant à l'intervalle $]x_0, x_n[$ tel que :

$$E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n)$$

La relation est l'expression analytique de l'erreur d'interpolation.

- $E_n(x_i) = 0$ quel que soit $i = 0, \ldots, n$. L'erreur d'interpolation est nulle aux points de collocation.
- Même si $f$ est connue, le point $\xi(x)$ est en général inconnue et varie avec $x$.
- Il existe une similarité entre l'erreur d'interpolation et l'erreur reliée au développement de Taylor ( voir chapitre 1).
- Puisque le terme d'erreur en un point $x$ fait intervenir des coefficients de la forme $(x - x_i)$, il y a tout intérêt à choisir les points $x_i$ qui sont situés le plus près possible de $x$.
- La fonction $(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)$ est un polynôme de degré $(n + 1)$ et possède donc les $(n + 1)$ racines réelles ($x_i$ pour $i = 0, 1, \cdots, n$). Dans certaines conditions, cette fonction peut osciller avec de fortes amplitudes, d'où le risque de grandes erreurs d'interpolation.

S'il existe une constante $M > 0$ vérifiant

$$|f^{(n+1)}(x)| \leq M \qquad \text{pour tout } x \text{ compris dans } [x_0, x_n]$$

on peut estimer l'erreur d'interpolation au point $x$ grâce à la formule

$$\begin{aligned} |E_n(x)| &= \left|\frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}\right| \, |(x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_n)| \\ &\leq \frac{M}{(n+1)!} \, |(x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_n)| \end{aligned}$$

On a que :

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{(x_1 - x_0)} \simeq f'(x_0)$$

Plus généralement, on peut montrer que :

$$f[x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n] \simeq \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

Si la dérivée $(n+1)$-ième de $f(x)$ varie peu dans l'intervalle $[x_0, x_n]$ on peut approcher

$$\frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!} \simeq \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!} \simeq f[x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n, x_{n+1}]$$

On peut ainsi estimer le terme d'erreur par :

$$E_n(x) \simeq f[x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n, x_{n+1}](x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)$$

L'approximation n'est pas toujours d'une grande précision, mais c'est généralement la seule disponible.

Soit une table de la fonction $\sqrt{x}$.

**Table de différences divisées**

| $x_i$ | $f(x_i)$ | $f[x_i, x_{i+1}]$ | $f[x_i, \cdots, x_{i+2}]$ | $f[x_i, \cdots, x_{i+3}]$ | $f[x_i, \cdots, x_{i+4}]$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 7 | 2.645 751 | | | | |
| | | 0.177 124 | | | |
| 9 | 3.000 000 | | −0.004 702 99 | | |
| | | 0.158 312 | | 0.000 206 783 | |
| 11 | 3.316 625 | | −0.003 462 29 | | $-0.9692 \times 10^{-5}$ |
| | | 0.144 463 | | 0.000 129 248 | |
| 13 | 3.605 551 | | −0.002 686 80 | | |
| | | 0.133 716 | | | |
| 15 | 3.872 983 | | | | |

## Exemple :

On tente d'obtenir une approximation de $\sqrt{8}$ à l'aide de cette table. En se basant sur un polynôme de degré 1 et en prenant $x_0 = 7$, on obtient facilement :

$$p_1(x) = 2.645\,751 + 0.177\,124(x - 7)$$

de telle sorte que :

$$p_1(8) = 2.822\,875$$

L'erreur exacte en $x = 8$ est alors :

$$E_1(8) = f(8) - p_1(8) = \sqrt{8} - 2.822\,875 = 0.005\,552\,125$$

On peut estimer cette erreur par le terme suivant dans la formule de Newton

$$E_1(8) \simeq -0.004\,702\,99(8 - 7)(8 - 9) = 0.004\,702\,99$$

On constate donc que l'erreur approximative est assez près de l'erreur exacte.

soit $f(x) = 2sin(x) + 3cos(x)$.
a) Déterminer le polynôme $P_2$ de degré 2 qui interpole $f$ aux noeuds, $x_0 = 0, x_1 = \frac{\pi}{2}$ et $x_2 = \pi$.
b)Au lieu d'utiliser le polynôme calculé en a), on décide d'interpoler $f$ sur $[0, \pi]$ aux noeuds :

$$x_i = i\frac{\pi}{n}, \quad i = 0, \cdots, n$$

par une fonction linéaire par morceaux. Quel devra être le nombre $n$ de sous-intervalle pour que l'erreur d'interpolation soit partout inférieure à $10^{-4}$ ?

(a) $p_2(x) = 3\frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)(x-\pi)}{\left(\frac{\pi}{2}\right)\pi} + 2\frac{-x(x-\pi)}{\frac{\pi}{2}\frac{\pi}{2}} - 3\frac{x\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{\pi\left(\frac{\pi}{2}\right)}.$

(b) $f(\frac{\pi}{4}) \simeq P_2(\frac{\pi}{4}) = 3.$

(c)

$$|e_2(x)| \leq \max_{\xi(x)\in]0,\pi[} |f^{(3)}(\xi(x))|\frac{h^3}{4\times 3} = \max_{\xi(x)\in]0,\pi[} |-2\cos x + 3\sin x|\frac{\pi^3}{96}$$

$$\max_{\xi(x)\in]0,\pi[} |-2\cos x + 3\sin x| \simeq 3,61 \Rightarrow |e_2(x)| \leq \frac{3,61\pi^3}{96} = 1,165\,965.$$

Autre solution $|-2\cos x + 3\sin x| \leq 2|\cos x| + 3|\sin x| \leq 5 \Rightarrow |e_2(x)| \leq 1,614\,910.$

(d)

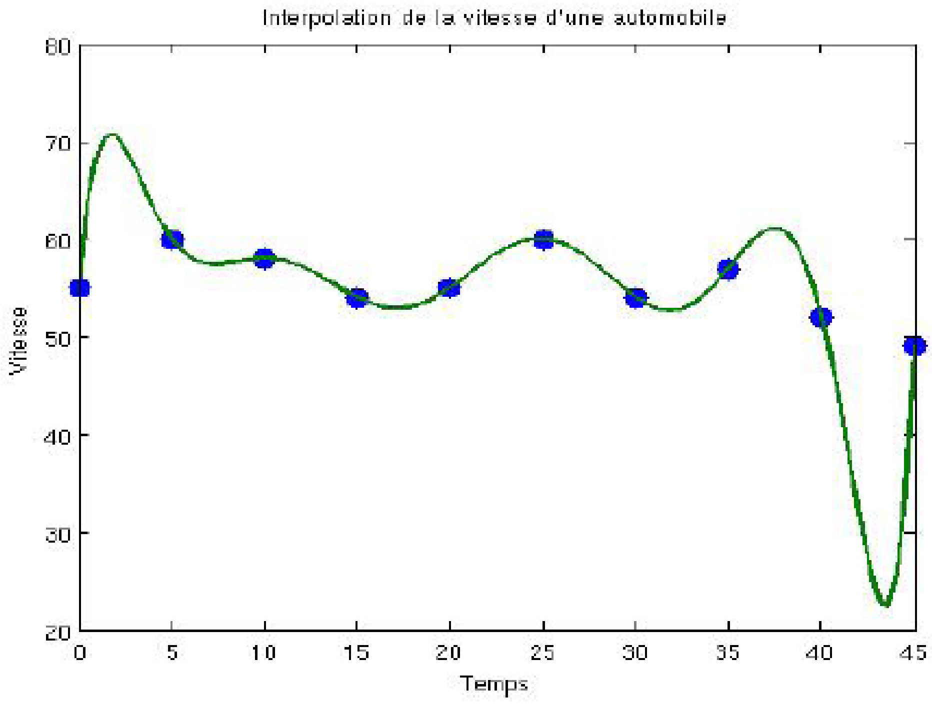
$$|e_1(x)| \leq \max_{\xi(x)\in]0,\pi[} |f^{(2)}(\xi(x))|\frac{h^2}{4\times 2} = \max_{\xi(x)\in]0,\pi[} |-2\sin x - 3\cos x|\frac{\pi^2}{8n^2}$$

$$\max_{\xi(x)\in]0,\pi[} |-2\sin x - 3\cos x| \simeq 3,61 \Rightarrow |e_1(x)| \leq \frac{0,45125\pi^2}{n^2} \leq 10^{-4}$$

$$n \geq \sqrt{4,515\times 10^3\pi^2} = 211,037 \Rightarrow n \geq 212$$

Autre solution $|-2\sin x - 3\cos x| \leq 2|\sin x| + 3|\cos x| \leq 5 \Rightarrow n \geq 249.$

Soit les valeurs expérimentales suivantes, que l'on a obtenues en mesurant la vitesse (en km/h) d'un véhicule toutes les 5 secondes :

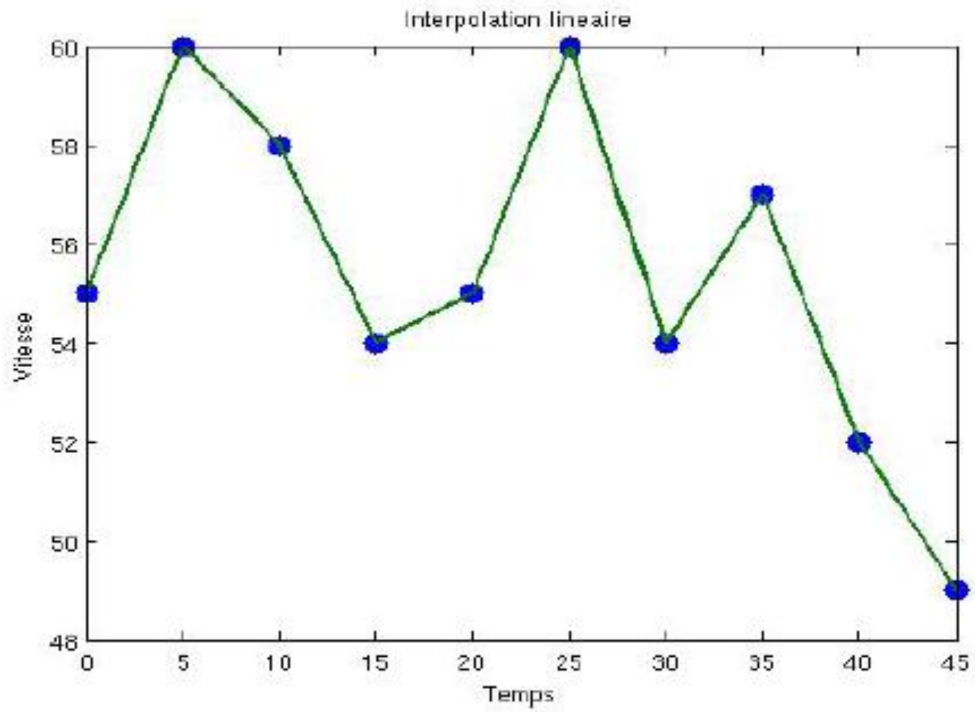



Si l'on interpole les valeurs en $t = 42.5$ s, on trouve une vitesse de 27.02 km/h, ce qui semble peu probable puisque le véhicule se déplace à une vitesse à peu près uniforme.

Soit $x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n$, les abscisses des points de collocation. On recherche une fonction $p$ définie sur chaque sous-intervalle $[x_i, x_{i+1}]$

$$p_{|[x_i,x_{i+1}]}(x) = \text{ un polynôme de degré } m$$

Exemple : interpolation linéaire (m =1)

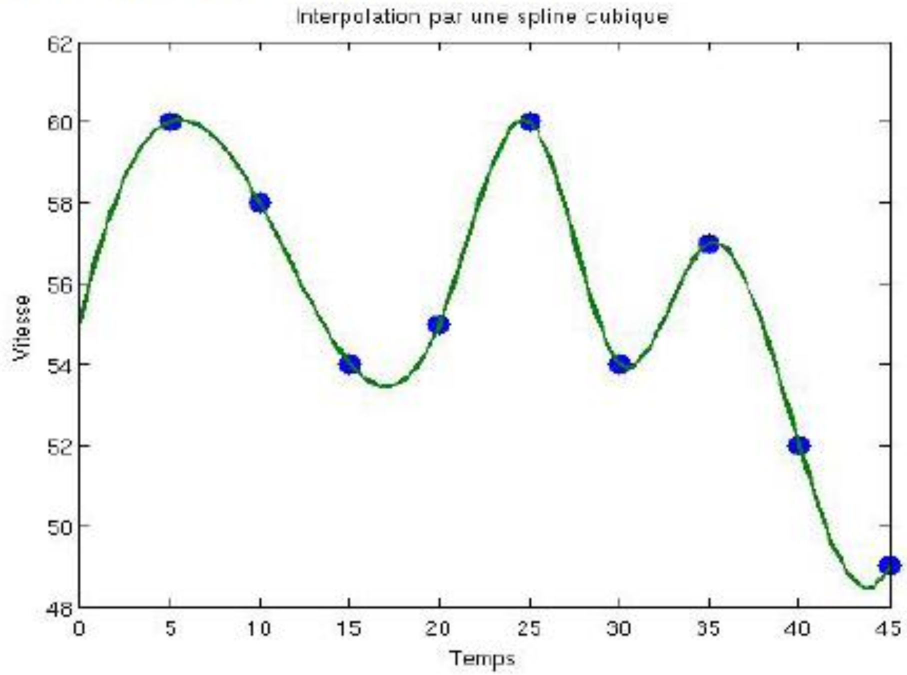


- L'interpolation par un polynômes de degré élevé est à éviter.
- Peut mener à des erreurs d'interpolation importantes.
- il est parfois nécessaire d'obtenir des courbes plus régulières.
- C'est le cas en conception assistée par ordinateur (CAO)

Une voie très populaire consiste à utiliser dans chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ un polynôme de degré 3 de la forme :

$$p_i(x) = a_i x^3 + b_i x^2 + c_i x + d_i \quad \text{pour } i = 0, 2, \cdots, n-1$$

et à relier ces différents polynômes de façon à ce que la courbe résultante soit deux fois différentiable.



On va chercher une spline cubique de la forme

$$S(x) = \begin{cases} p_0(x), & x \in [x_0, x_1] \\ p_1(x), & x \in [x_1, x_2] \\ \vdots & \\ p_i(x), & x \in [x_i, x_{i+1}] \\ \vdots & \\ p_{n-1}(x), & x \in [x_{n-1}, x_n] \end{cases}$$

avec

$$p_i(x) = f_i + f_i'(x - x_i) + \frac{f_i''}{2!}(x - x_i)^2 + \frac{f_i'''}{3!}(x - x_i)^3, \quad x \in [x_i, x_{i+1}]$$

$$i = 0, 1, 2 \cdots, n - 1$$

- le polynôme $S(x)$ passe par les deux extrémité $(x_0, f(x_0)), (x_n, f(x_n))$, c'est-à-dire :

$$p_0(x_0) = f(x_0), \qquad p_{n-1}(x_n) = f(x_n)$$

  ce qui introduit 2 équations ;
- Les deux polynômes $p_i(x)$ et $p_{i+1}(x)$ doivent passer par le point $(x_i, f(x_i))$ (continuité de $S(x)$), c'est-à-dire :

$$p_i(x_{i+1}) = f(x_{i+1}) = p_{i+1}(x_{i+1}) \quad \text{pour } i = 0, 1, \cdots, n-2$$

- Ou encore

$$p_i(x_i) = f_i = f(x_i) \quad \text{pour } i = 0, 1, \cdots, n-1$$

  et

$$p_i(x_{i+1}) = f(x_{i+1}) \quad \text{pour } i = 0, 1, \cdots, n-1$$

Cela résulte en $2n$ équations.

- pour assurer la régularité de la courbe, on doit imposer que les dérivées premières et secondes de ces deux polynômes soient continues aux points intérieurs. On doit donc imposer :

$$p'_i(x_{i+1}) = p'_{i+1}(x_{i+1}) \text{ pour } i = 0, 1, \cdots, n-2$$

  et :

$$p''_i(x_{i+1}) = p''_{i+1}(x_{i+1}) = f''_{i+1} \text{ pour } i = 0, 1, \cdots, n-2$$

  ce qui donne $(2n-2)$ nouvelles équations ;

Au total, on a $(4n-2)$ équations en $4n$ inconnues et il manque donc 2 équations pour pouvoir résoudre ce système linéaire.

On prend $h_i = x_{i+1} - x_i \quad i = 0, ..., n-1$

- $p_i(x_i) = f(x_i) \Rightarrow f_i = f(x_i)$ pour $i = 0, 1, \cdots, n-1$
- $p_i(x_{i+1}) = f(x_{i+1}) = f_i + f_i' h_i + \frac{f_i''}{2} h_i^2 + \frac{f_i'''}{3!} h_i^3$
  ce qui donne
  $f_i' = f[x_i, x_{i+1}] - \frac{f_i''}{2} h_i - \frac{f_i'''}{3!} h_i^2$ pour $i = 0, 1, \cdots, n-1$
- $p_i''(x_{i+1}) = p_{i+1}''(x_{i+1}) = f_{i+1}''$ ou encore $f_{i+1}'' = f_i'' + f_i''' h_i$
  ce qui donne $f_i''' = \frac{f_{i+1}'' - f_i''}{h_i}$ pour $i = 0, 1, \cdots, n-2$
- Soit $f_n''$ la derivée seconde de la spline $S(x)$ en $x_n$. On a
  $f_n'' = p_{n-1}'' = f_{n-1}'' + f_{n-1}''' h_{n-1} \Rightarrow f_{n-1}''' = \frac{f_n'' - f_{n-1}''}{h_{n-1}}$
- $p_{i+1}'(x_{i+1}) = p_i'(x_{i+1}) \Rightarrow f_{i+1}' = f_i' + f_i'' h_i + \frac{f_i'''}{2} h_i^2$

En utilisant toutes ces relations, on détermine les $f_i''$

- $h_i = x_{i+1} - x_i \quad i = 0, ..., n-1$
- Pour $i = 0, ..., n-1$

$$\begin{cases} f_i = f(x_i) \\ f_i' = f[x_i, x_{i+1}] - \frac{f_i''}{3} h_i - \frac{f_{i+1}''}{6} h_i \\ f_i''' = \frac{f_{i+1}'' - f_i''}{h_i} \end{cases}$$

- Pour $\quad i = 0, ..., n-2,$

$$\frac{h_i}{h_{i+1} + h_i} f_i'' + 2f_{i+1}'' + \frac{h_{i+1}}{h_{i+1} + h_i} f_{i+2}'' = 6f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$$

Il y a au total $(n+1)$ inconnues $f_i''$ et l'on n'a que $(n-1)$ équations.
On doit donc fixer de façon arbitraire deux des inconnues. Il existe plusieurs possibilités, mais la plus simple consiste à imposer :

$$p_0''(x_0) = 0 \quad \text{et} \quad p_{n-1}''(x_n) = 0 \Longrightarrow f_0'' = 0 \quad \text{et} \quad f_n'' = 0$$

On qualifie de spline naturelle la courbe qui en résulte. La spline naturelle impose que la dérivée seconde est nulle aux deux extrémités et donc que la courbe y est linéaire.

Pour determine la spline cubique naturelle $S(x)$, on calcule les coefficients $(f_i, f_i', f_i'', f_i''')$ :

- $h_i = x_{i+1} - x_i \quad i = 0, ..., n-1$
- Conditions aux bors (spline naturelle) : $f_0'' = 0$ et $f_n'' = 0$
- Pour $\quad i = 0, ..., n-2,$

$$\frac{h_i}{h_{i+1} + h_i} f_i'' + 2f_{i+1}'' + \frac{h_{i+1}}{h_{i+1} + h_i} f_{i+2}'' = 6f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$$

- Pour $i = 0, ..., n-1$

$$\begin{cases} f_i = f(x_i) \\ f_i' = f[x_i, x_{i+1}] - \frac{f_i''}{3} h_i - \frac{f_{i+1}''}{6} h_i \\ f_i''' = \frac{f_{i+1}'' - f_i''}{h_i} \end{cases}$$

# Bibliographie :

**Analyse numérique pour ingénieurs, André Fortin, Presses internationale, Polytechniques, 2008.**

# Annexe

**Borne supérieure de l'erreur d'interpolation**

**Théorème 5.4**

Soit $x_0 < x_1 < x_2 \cdots < x_n$, les abscisses des points de collocation. On suppose que la fonction $f(x)$ est définie dans l'intervalle $[x_0\,, x_n]$ et qu'elle est $(n+1)$ fois dérivable dans l'intervalle $]x_0\,, x_n[$. Alors, pour tout $x$ compris dans $[x_0\,, x_n]$ , il existe $\xi(x)$ appartenant à l'intervalle $]x_0\,, x_n[$ tel que:

$$E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n).$$

On remarque que l'expression analytique de l'erreur d'interpolation dépend de la dérivée d'ordre $(n+1)$ de la fonction $f(x)$ évaluée au point $\xi(x)$ ainsi que de la fonction $F_n(x) = (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$. La figure ci-dessus montre la valeur absolue de la fonction $F_n(x)$ pour 11 abscisses $x_i$ également distantes dans l'intervalle $[-1\,, 1]$.

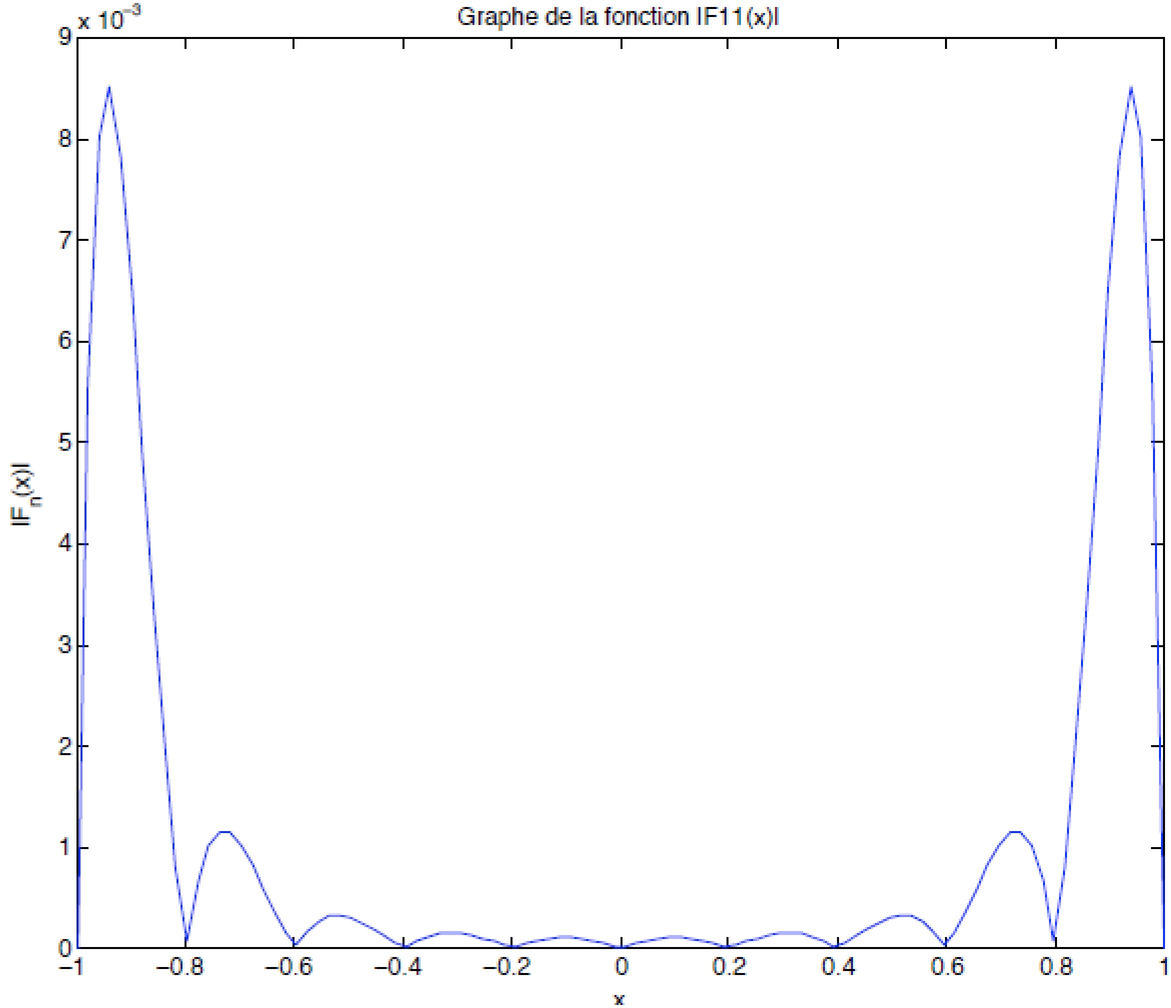



Figure 1: Graphe de la fonction $|F_{11}(x)|$.