Exercices de différentiation

A. Ramadane, Ph.D.

Exercice 1

À l'aide de la formule de différence centrée d'ordre 2:

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2),$$

montrer que

$$f''(x) \simeq \frac{f(x+2h) - 2f(x) + f(x-2h)}{4h^2}.$$

Réponse

$f'(x) \simeq \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$, $f'(x+h) \simeq \frac{f(x+2h)-f(x)}{2h}$, $f'(x-h) \simeq \frac{f(x)-f(x-2h)}{2h}$, $f''(x) \simeq \frac{f'(x+h)-f'(x-h)}{2h}$ d'où $f''(x) \simeq \frac{f(x+2h)-2f(x)+f(x-2h)}{4h^2}$.

Exercice 2

Identifier l'erreur qui a été faite dans le raisonnement suivant et dans un deuxième temps, corriger l'erreur et refaire le raisonnement de façon correcte. Du développement de Taylor, nous avons:

$$\begin{cases} f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \frac{h^3}{6}f'''(\xi_1), & \text{pour} \quad \xi_1 \in (x, x+h); \\ f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) - \frac{h^3}{6}f'''(\xi_2), & \text{pour} \quad \xi_2 \in (x-h, x), \end{cases}$$

alors

$$\frac{1}{h^2}[f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)] = f''(x) + \frac{h}{6}[f'''(\xi_1) - f'''(\xi_2)]$$

et donc l'ordre de cette approximation de f'' est $\mathcal{O}(h)$.

Réponse

L'erreur commise est qu'on est limité à un développement de Taylor de degré 2 (ordre 3).
Le bon raisonnement: $f(x+h) = f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{2}f''(x)+\frac{h^3}{6}f'''(x)+\frac{h^4}{24}f^{(4)}(x)+\mathcal{O}(h^5)$
et $f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) - \frac{h^3}{6}f'''(x) + \frac{h^4}{24}f^{(4)}(x) + \mathcal{O}(h^5)$.
Alors $f''(x) = \frac{1}{h^2}[f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)] - \frac{h^2}{12}f^{(4)}(x) + \mathcal{O}(h^3)$ et donc l'ordre de cette approximation de $f''(x)$ est 2.

Exercice 2

Soit $f(x)$ une fonction telle que $f(2) = 4$, $f(4) = 2$, $f(6) = 0$ et $f(8) = -5$. Calculer deux approximations d'ordre 2 de $f'(2)$.

Réponse

La différence avant d'ordre 2 avec $h = 2$ donne $f'(2) \simeq \frac{-f(6)+4f(4)-3f(2)}{4} = -1$. La différence avant d'ordre 1 donne $f'(2) \simeq \frac{f(4)-f(2)}{2} = -1$ pour $h = 2$; $f'(2) \simeq \frac{f(6)-f(2)}{4} = -1$ pour $h = 4$ et $f'(2) \simeq \frac{f(8)-f(2)}{6} = -\frac{3}{2}$ pour $h = 6$. Ensuite, on applique l'extrapolation de Richardson sur la différence avant d'odre 1 pour obtenir des approximations d'ordre 2. Ainsi sur les resultats obtenus avec $h = 2$ et $h = 4$, on obtient $f'(2) \simeq \frac{2\times(-1)-(-1)}{2-1} = -1$; et avec $h = 2$ et $h = 6$, on obtient $f'(2) \simeq \frac{3\times(-1)-(-\frac{3}{2})}{3-1} = -\frac{3}{4}$ qui sont des approximations d'ordre 2.

Exercice 3

(a) À l'aide des développements de Taylor appropriés, donner l'expression des deux premiers termes de l'erreur liée à la formule:

$$\frac{f(x+ah)-f(x-bh)}{(a+b)h},$$

permettant de calculer une approximation de $f'(x)$. Dans cette formule, a et b sont des constantes telles que $a+b \neq 0$.

(b) Déterminer l'ordre de cette approximation en fonction des valeurs de a et b.

Réponse

(a) L'expression des deux premiers termes de l'erreur : $\frac{(a-b)h}{2} f''(x) + \frac{(a^2+b^2-ab)h^2}{6} f'''(x)$

(b) Si $a \neq b$, l'approximation est d'ordre 1. Si $a = b$, l'approximation est d'ordre 2.

Exercice 4

On considère la formule aux différences

$$App(h) = \frac{-f(x+3h) + 4f(x+2h) - 5f(x+h) + 2f(x)}{h^2} \simeq f''(x),$$

une approximation de $f''(x)$.

(a) On dispose des valeurs suivantes de la fonction $f(x)$:

x	$f(x)$
1,0	0,841 471
1,1	0,891 207
1,2	0,932 039
1,3	0,963 558
1,4	0,985 450
1,5	0,997 495
1,6	0,999 574

En vous servant de la formule aux différences $App(h)$, calculer deux approximations de $f''(1,0)$ pour $h = 0,1$ et pour $h = 0,2$. Sachant que la valeur exacte de $f''(1,0) = -0,841\,471$, estimer numériquement *l'ordre de précision* de cette formule aux différences.

(b) En vous servant des développements de Taylor appropriés, montrer que

$$App(h) = f''(x) - \frac{11}{12}h^2 f^{(4)}(x) + \mathcal{O}(h^3),$$

et en déduire *l'ordre de précision* de l'approximation $App(h)$.

(a) La formule aux différences donne $f''(1) \simeq -0,8495$ pour $h = 0,1$ et $f''(1) \simeq -0,875\,675$ pour $h = 0,2$. Les erreurs absolues sont respectivement $E(h = 0,1) = 0,008\,029$ et $E(h = 0,2) = 0,034\,204$. Le ratio des erreurs absolues est $\frac{E(h=0,2)}{E(h=0,1)} = 4,26 \simeq 2^2$. La formule est d'ordre 2.

(b)

$$
\begin{aligned}
-f(x+3h) &= -f(x) - 3hf'(x) - \frac{9h^2}{2}f''(x) - \frac{27h^3}{3!}f'''(x) - \frac{81h^3}{4!}f^{(4)}(x) + \mathcal{O}(h^5) \\
4f(x+2h) &= 4f(x) + 8hf'(x) + \frac{16h^2}{2}f''(x) + \frac{32h^3}{3!}f'''(x) + \frac{64h^3}{4!}f^{(4)}(x) + \mathcal{O}(h^5) \\
-5f(x+h) &= -5f(x) - 5hf'(x) - \frac{5h^2}{2}f''(x) - \frac{5h^3}{3!}f'''(x) + \frac{5h^3}{4!}f^{(4)}(x) + \mathcal{O}(h^5) \\
2f(x) &= 2f(x)
\end{aligned}
$$

$$h^2 app(h) = h^2 f''(x) - \frac{11h^4}{12}f^{(4)}(x) + \mathcal{O}(h^5)$$

$$app(h) = f''(x) - \frac{11h^2}{12}f^{(4)}(x) + \mathcal{O}(h^3)$$

$$f''(x) = app(h) + \frac{11h^2}{12}f^{(4)}(x) + \mathcal{O}(h^3) \Rightarrow f''(x) = app(h) + \mathcal{O}(h^2)$$

$\Rightarrow$ approximation d'ordre 2.

On considère le θ-schéma

$$f'(x) \simeq (1-\theta)\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right)+\theta\left(\frac{f(x)-f(x-h)}{h}\right)=App_\theta(h)$$

obtenu à partir d'une combinaison linéaire des formules de différences avant et arrière d'ordre 1. À l'aide de développements de Taylor de degré appropriés, montrer que les 2 premiers termes de l'erreur associée au θ-schéma ($App_\theta(h)$) sont donnés par:

$$\frac{(2\theta-1)h}{2}f''(x)-\frac{h^2}{6}f'''(x),$$

et en déduire l'ordre de précision du θ-schéma en fonction du paramètre θ.

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f''(x)h^2}{2} + \frac{f'''(x)h^3}{3!} + \dots,$$
$$f(x-h) = f(x) - f'(x)h + \frac{f''(x)h^2}{2} - \frac{f'''(x)h^3}{3!} + \dots.$$
D'où

$$\begin{aligned} App_\theta(h) &= (1-\theta)\left[f'(x) + \frac{f''(x)h}{2} + \frac{f'''(x)h^2}{3!} + \dots\right] + \theta\left[f''(x) - \frac{f''(x)h}{2} + \frac{f'''(x)h^2}{3!} - \dots\right] \\ &= f'(x) + (1-2\theta)\frac{f''(x)h}{2} + \frac{f'''(x)h^2}{3!} + \dots. \end{aligned}$$

D'où $f'(x) = (1-\theta)\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right) + \theta\left(\frac{f(x)-f(x-h)}{h}\right) + (2\theta-1)\frac{f''(x)h}{2} - \frac{f'''(x)h^2}{6} + \dots$