Exercices d'intégration

A. Ramadane, Ph.D.

Exercice sur l'ordre de la méthode

À l'aide d'une certaine méthode d'intégartion numérique, on a évalué $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\, dx$ en utilisant 3 valeurs différentes de h. On a obtenu les résultats suivants.

Valeurs de I	
h	I
0,1	1,001 235
0,2	1,009 872
0,4	1,078 979

Compte tenu de la valeur exacte de I, déduire l'ordre de convergence de la quadrature employée.

$\frac{\text{Erreur}(h=0{,}2)}{\text{Erreur}(h=0{,}1)} = \frac{0{,}009\,872}{0{,}001\,234} = 7,99 \simeq 2^3$. La méthode est donc d'ordre 3.

On veut calculer:

$$\int_{1,8}^{3,4} e^x \, dx,$$

en utilisant la *la méthode des trapèzes composée.* Quel est le nombre minimum d'intervalles qui assurent une approximation de I avec au moins 4 *chiffres significatifs*?

$\int_{1,8}^{3,4} e^x \, dx = 23,91445$. 46 intervalles assurent une approximation de I avec au moins 4 chiffres significatifs.

Utiliser la méthode de Simpson 3/8 avec 6 intervalles pour évaluer :

$$\int_1^9 \sqrt{x}\, dx.$$

Comparer le résultat avec la valeur exacte.

Simpson 3/8 ($h = \frac{4}{3}$): 17,327 866 29 avec une erreur absolue de $0,54 \times 10^{-2}$.

Estimer l'intégrale

$$\int_{-2}^{2} e^x\, dx$$

à l'aide de l'intégration de Gauss à 2 points.

Estimer l'intégrale

$$\int_{-2}^{2} e^x \, dx$$

à l'aide de l'intégration de Gauss à 2 points.

$$I = \int_{-2}^{2} e^x \, dx = 2 \int_{-1}^{1} e^{2t} \, dt \simeq 2 \left(e^{2\sqrt{\frac{1}{3}}} + e^{-2\sqrt{\frac{1}{3}}} \right) = 6,976\,449\,920.$$

Déterminer les poids d'intégration w_1 et w_2 ainsi que le point d'intégration t_2 de sorte que la formule suivante (appelée quadrature de Radau)

$$\int_{-1}^{1} f(t)\,dt \simeq w_1 f(-1) + w_2 f(t_2)$$

soit de degré de précision le plus élevé possible. Donner ce degré de précision.

La formule sera exacte pour les polynômes de degré au plus 2. Si elle est exacte pour $g(t) = 1$, $g(t) = t$ et $g(t) = t^2$, w_1, w_2 et t_2 sont solution du système

$$\begin{cases} w_1 + w_2 = 2; \\ \\ -w_1 + w_2 t_2 = 0; \\ \\ w_1 + w_2 t_2^2 = \frac{2}{3}. \end{cases}$$

On trouve $w_1 = \frac{1}{2}$, $w_2 = \frac{3}{2}$, $t_2 = \frac{1}{3}$ et donc la quadrature est $\int_{-1}^{1} g(t)dt \simeq \frac{1}{2}g(-1) + \frac{3}{2}g(\frac{1}{3})$. Pour déterminer le degré de précision de la quadrature. on vérifie pour $g(t) = t^3$. La valeur exacte de l'intégrale $\int_{-1}^{1} t^3 dt$ est 0, alors que on obtient $-\frac{1}{3}$. Le degré de précision est donc 2.

Considérons l'intégrale

$$I = \int_{-1}^{1} e^{x^2}\, dx.$$

(a) Calculer une approximation de I en appliquant la méthode du trapèze composée avec 3 intervalles.

(b) Pour cette méthode, quel est le nombre minimal d'intervalles à utiliser pour obtenir une approximation qui a une erreur d'au plus 10^{-2}?

(c) Considérons la quadrature de Lobatto:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\, dx \simeq w_1\,[f(-1) + f(1)] + w_2\,[f(-x_1) + f(x_1)]\,.$$

Sachant que cette quadrature est exacte pour toutes les fonctions $f(x) = x^p$, avec $p = 1, 3, 5, \cdots$, déterminer le système d'équations qui doit être résolu (**ne pas résoudre**) pour trouver w_1, w_2 et x_1 pour que la quadrature de Lobatto soit au moins de dégré de précision 5.

(d) Sachant que le degré de précision de la méthode du trapèze composée est 1, est-il possible d'obtenir avec cette méthode (en utilisant un nombre suffisamment grand d'intervalles) une approximation de I qui soit meilleure que celle que l'on peut calculer par la quadrature de Labatto developpée en (c) (dégré de précision 5 au moins)? Discuter.

(a) On pose $h = \frac{2}{3}, \quad x_0 = -1, \quad x_1 = -\frac{1}{3}, \quad x_2 = \frac{1}{3}, \quad \text{et} \quad x_3 = 1$ et on obtient

$$\int_{-1}^{1} e^{x^2}\,dz \simeq \frac{h}{2}(e + 2e^{\frac{1}{9}} + 2e^{\frac{1}{9}} + e) = 3,302\,213\,310.$$

(b) Pour $h = \dfrac{2}{n}$, l'erreur absolue est $|E| = \dfrac{2}{12}|f''(\eta)|h^2 = \dfrac{4}{6n^2}|e^{\eta^2}(2+4\eta^2) \leq \dfrac{4e}{n^2}$. Cette erreur est inférieure à 10^{-2} dès que $n \geq 33$.

(c) La quadrature est au moins de degré de précision 5 si elle est exacte pour $f(x) = x^p$ pour $p = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. Vu que la quadrature est par hypothèse exacte pour $p =$

(a) On pose $h = \frac{2}{3}$, $x_0 = -1$, $x_1 = -\frac{1}{3}$, $x_2 = \frac{1}{3}$, et $x_3 = 1$ et on obtient

$$\int_{-1}^{1} e^{x^2}\, dz \simeq \frac{h}{2}(e + 2e^{\frac{1}{9}} + 2e^{\frac{1}{9}} + e) = 3,302\,213\,310.$$

(b) Pour $h = \dfrac{2}{n}$, l'erreur absolue est $|E| = \dfrac{2}{12}|f''(\eta)|h^2 = \dfrac{4}{6n^2}|e^{\eta^2}(2+4\eta^2) \leq \dfrac{4e}{n^2}$. Cette erreur est inférieure à 10^{-2} dès que $n \geq 33$.

(c) La quadrature est au moins de degré de précision 5 si elle est exacte pour $f(x) = x^p$ pour $p = 0,1,2,3,4,5$. Vu que la quadrature est par hypothèse exacte pour $p =$

1, 3, 5, il faut juste montrer qu'elle est exacte pour $p = 0,2,4$. On obtient le système suivant:

$$\begin{cases} w_1 + w_2 = 1; \\ \\ w_1 + w_2 x_1^2 = \frac{1}{3}; \\ \\ w_1 + w_2 x_1^4 = \frac{1}{5}. \end{cases}$$

(d) La notion d'ordre n'est pas associée à la quadrature de Lobatto. Si la quadrature n'est pas exacte, on ne peut pas améliorer l'approximation. Cependant on peut améliorer l'approximation de l'integrale avec la méthode du trapèze composée en utilisant un nombre suffisament grand d'intervalles.

Dans une règle de quadrature de Chebychev, tous les poids sont égaux et les nœuds sont choisis de sorte à obtenir une règle de plus haut degré possible. Avec trois nœuds :

$$\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x \approx w\left(f(x_0) + f(x_1) + f(x_2)\right).$$

(a) Donnez le système d'équations à résoudre pour déterminer le poids ainsi que les trois nœuds ;

(b) Résoudre ce système ;

(c) Quel est le degré de cette règle ?

(d) Utiliser vos résultats pour calculer une approximation de

$$\int_{-1}^{1} \sin(x)^2 \cos(x)\mathrm{d}x.$$

(a) Avec 3 nœuds, il y a 4 inconnues. On impose donc 4 conditions avec $f(x) = x^k$ pour $k = 0, 1, 2, 3$:

$$\begin{aligned} 2 &= 3w \\ 0 &= w(x_0 + x_1 + x_2) \\ 2/3 &= w(x_0^2 + x_1^2 + x_2^2) \\ 0 &= w(x_0^3 + x_1^3 + x_2^3). \end{aligned}$$

(b) On trouve immédiatement $w = 2/3$. On voit ensuite facilement que $x_1 = 0$ puis que $x_0 = -1/\sqrt{2}$, $x_2 = 1/\sqrt{2}$;

(c) Par construction, la règle est au moins de degré 3 puisqu'elle intègre x^k exactement pour $k = 0, 1, 2, 3$. Elle n'est pas de degré 4 car

$$\frac{2}{5} = \int_{-1}^{1} x^4 \mathrm{d}x \neq \frac{2}{3}\left(\frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{4}\right).$$

(d) On obtient l'approximation

$$\int_{-1}^{1} \sin(x)^2 \cos(x) \mathrm{d}x \simeq 0,4277928304548286 3.$$