Différentiation et intégration numérique

A. Ramadane, Ph.D.

Dans ce chapitre, nous allons utiliser l'interpolation pour

- approcher la dérivée d'une fonction f au point x_0 : $f'(x_0)$,
- approcher les dérivées d'ordre supérieure : $f''(x_0)$, etc.,
- calculer la valeur approchée de : $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$,
- estimer les erreurs produites par ces formules en utilisant l'erreur d'interpolation : $f(x) = p_n(x) + E_n(x)$.

En général, il est facile de dériver une fonction f si l'expression analytique est connue. Dans ce chapitre, on s'intéresse au cas où f n'est connue seulement en certains nœuds x_i.

Deux approches pour évaluer numériquement $f'(x_0)$:

- par interpolation : si p_n est le polynôme qui interpole f aux nœuds x_i : on pose

$$f'(x_0) \approx p_n'(x_0)$$

- par le développement de Taylor.

Si l'on choisit le polynôme de degré 1 passant par les points $(x_0, f(x_0))$ et $(x_0 + h, f(x_0 + h))$, on obtient

$$f(x) = p_1(x) + E_1(x) = f(x_0) + f[x_0, x_0 + h](x - x_0) + E_1(x)$$

et donc :

$$f'(x_0) = p_1'(x_0) + E_1'(x_0) = f[x_0, x_0 + h] + E_1'(x_0)$$

Formule avant

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

On rappele que l'erreur d'interpolation s'écrit :

$$E_n(x) = f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}\, F(x)$$

où $F(x) = (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_n)$ et pour un certain $\xi(x)$ compris dans l'intervalle $[x_0, x_n]$.
Par conséquent, l'erreur sur la dérivée sera :

Expression de l'erreur

$$E_n'(x_0) = (f(x) - p_n)'(x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_0)}{(n+1)!}\, F'(x_0)$$

Exemple : pour la formule avant, on a que $n = 1$ et
$F(x) = (x - x_0)(x - x_0 - h)$ et $F'(x_0) = -h$, d'où

$$E_1'(x_0) = -\frac{f^{(2)}(\xi_0)\, h}{2}$$

Soient les 3 points $(x_0 - h, f(x_0 - h))$, $(x_0, f(x_0))$ et $(x_0 + h, f(x_0 + h))$.

$$\begin{aligned} p_2(x) = f(x_0 - h) + f[x_0 - h, x_0](x - x_0 + h) + \\ f[x_0 - h, x_0, x_0 + h](x - x_0 + h)(x - x_0) \end{aligned}$$

et donc

$$p_2'(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h}$$

D'autre part

$$F(x) = (x - x_0 + h)(x - x_0)(x - x_0 - h) \quad \Longrightarrow \quad F'(x_0) = -h^2,$$

Formule centrée

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h} - \frac{f^{(3)}(\xi_0)\; h^2}{6}$$

Formules de différences finies d'ordre 1 pour $f'(x)$
$f'(x_0) = \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} + O(h)$ *Différence avant d'ordre 1*
$f'(x_0) = \dfrac{f(x_0) - f(x_0-h)}{h} + O(h)$ *Différence arrière d'ordre 1*

Formules de différences d'ordre 2 pour $f'(x)$
$f'(x_0) = \dfrac{-f(x_0+2h)+4f(x_0+h)-3f(x_0)}{2h} + \dfrac{h^2 f'''(\xi_0)}{3}$ *Différence avant d'ordre 2*
$f'(x_0) = \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h} - \dfrac{h^2 f'''(\xi_1)}{6}$ *Différence centrée d'ordre 2*
$f'(x_0) = \dfrac{3f(x_0)-4f(x_0-h)+f(x_0-2h)}{2h} + \dfrac{h^2 f'''(\xi_2)}{3}$ *Différence arrière d'ordre 2*

Reprenons le polynôme de degré 2

$$p_2(x) = f(x_0-h)+f[x_0-h,x_0](x-x_0+h)+f[x_0-h,x_0,x_0+h](x-x_0+h)(x-x_0)$$

Sa dérivée seconde est :

$$p_2''(x_0) = \frac{f(x_0+h) - 2f(x_0) + f(x_0-h)}{h^2}$$

Pour estimer l'erreur de cette formule

$$E_2(x) = f(x) - p_2(x) \quad \Longrightarrow \quad E_2''(x_0) = f''(x_0) - p_2''(x_0)$$

il faut utiliser le développement de Taylor.

Formule centrée d'ordre 2

$$f''(x_0) = \frac{f(x_0+h) - 2f(x_0) + f(x_0-h)}{h^2} - \frac{f^{(4)}(\xi_0)\ h^2}{12}$$

Formules de différences finies pour $f''(x)$

$$f''(x) = \frac{f(x-2h) - 2f(x-h) + f(x)}{h^2} + O(h)$$

Différence arrière d'ordre 1

$$f''(x) = \frac{f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)}{h^2} + O(h)$$

Différence avant d'ordre 1

$$f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} + O(h^2)$$

Différence centrée d'ordre 2

$$f''(x) = \frac{-f(x+2h) + 16f(x+h) - 30f(x) + 16f(x-h) - f(x-2h)}{12h^2} + O(h^4)$$

Différence centrée d'ordre 4

La différentiation est un procédé numériquement instable.
Exemple : la dérivée de $f(x) = e^x$ en $x = 0$.

Instabilité numérique (simple précision)		
h	$f'(x) \simeq \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$	$f''(x) \simeq \frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2}$
$0.1 \times 10^{+1}$	1.175 201 178	1.086 161 137
$0.1 \times 10^{+0}$	1.001 667 619	1.000 839 472
0.1×10^{-2}	1.000 016 928	1.000 165 939
0.1×10^{-3}	1.000 017 047	1.013 279 080
0.1×10^{-4}	1.000 166 059	0.000 000 000
0.1×10^{-5}	1.001 358 151	0.000 000 000
0.1×10^{-6}	0.983 476 758	−59 604.6601

Remarquez que quand h est petit, les quantités $f(x+h) - f(x-h)$ et $f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)$ deviennent très petites.Ceci donne l'erreur d'arrondi.

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h} - \frac{h^2 f'''(\xi_1)}{6}, \quad \xi_1 \in]x_0 - h, x_0 + h[$$

Si on suppose que l'erreur d'arrondi sur l'évaluation de $f(x)$ est ε et que $|f^{(3)}(\xi)| < M$ dans l'intervalle $[x_0 - h, x_0 + h]$:

$$\tilde{f}(x_0+h) = f(x_0+h) \pm \varepsilon, \text{ et } \tilde{f}(x_0-h) = f(x_0-h) \pm \varepsilon$$

on a

$$f'(x_0) - \frac{\tilde{f}(x_0+h) - \tilde{f}(x_0-h)}{2h} = f'(x_0) - \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h} \pm \frac{\varepsilon}{2h}$$
$$f'(x_0) - \frac{\tilde{f}(x_0+h) - \tilde{f}(x_0-h)}{2h} = -\frac{h^2 f'''(\xi_1)}{6} \pm \frac{\varepsilon}{2h}$$

alors $|f'(x_0) - \frac{\tilde{f}(x_0+h) - \tilde{f}(x_0-h)}{2h}| \leq \frac{\varepsilon}{h} + \frac{h^2}{6}M$

La valeur optimale de h est donne par $h_{opt} = (\frac{3\varepsilon}{M})^{\frac{1}{3}}$

Mais en pratique on ne connait pas $f'''(\xi)$.

1. A partir des données expérimentales

x	1.00	1.01	1.02
$f(x)$	1.27	1.32	1.38

calculer les approximations de $f'(1.005)$, $f'(1.015)$ et $f''(1.01)$ données par les formules centrées. Si suppose que l'erreur d'arrondi sur l'évaluation de $f(x)$ est $\varepsilon = \pm 0.005$, quelle sera l'erreur maximale sur les 3 quantitées calculées ?

2. La dérivée première de f au point x_0 peut être évaluée par les formules suivantes : $f'(x_0) \cong \frac{3f(x_0) - 4f(x_0 - h) + f(x_0 - 2h)}{2h}$
   (a) Evaluer la dérivée première de $f(x) = e^x$ au point $x_0 = 0$ à l'aide de la formule ci-dessus pour $h = .1, .05, .025, .0125$. Que peut-on dire de l'ordre de cette formule ?
   (b) Donner le terme d'erreur pour cette formule. Indiquer l'ordre de la formule et comparer votre réponse avec la question (a).
   (c) Si on sait que l'erreur d'arrondi sur l'évaluation de $f(x)$ est $\varepsilon = 10^{-15}$ et que $|f^{(3)}(x)| \leq M$ dans l'intervalle $[x_0 - 2h, x_0]$, trouver la valeur optimale de h pour laquelle l'estimation de l'erreur pour cette formule sera minimale. Quelle sera la réponse pour $f(x) = e^x$?

Soit Q_{exa} une quantié inconnue qui represente une valeur exacte, supposons que nous avons un procédé d'approximation paramétré par h $Q_{app}(h)$ avec :

$$Q_{exa} = Q_{app}(h) + O(h^n)$$

exemple :$Q_{exa} = f'(x_0)$ et $Q_{app}(h) = \frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$.

On a

$$Q_{exa} = Q_{app}(h) + c_n h^n + c_{n+1} h^{n+1} + O(h^{n+2})$$

En considerant $h/2$ on a

$$Q_{exa} = Q_{app}(\frac{h}{2}) + c_n \frac{h^n}{2^n} + c_{n+1} \frac{h^{n+1}}{2^n} + O((\frac{h}{2})^{n+2})$$

On peut combiner les deux identités, pour cela on a

$$2^n Q_{exa} = 2^n Q_{app}(\frac{h}{2}) + c_n h^n + \frac{c_{n+1}}{2} h^{n+1} + O(h^{n+2})$$

$$Q_{exa} = Q_{app}(h) + c_n h^n + c_{n+1} h^{n+1} + O(h^{n+2})$$

$$2^n Q_{exa} - Q_{exa} = 2^n Q_{app}(\frac{h}{2}) - Q_{app}(h) - \frac{c_{n+1}}{2} h^{n+1} + O(h^{n+2})$$

$$\begin{aligned}(2^n-1)Q_{exa} &= 2^n Q_{app}(\tfrac{h}{2}) - Q_{app}(h) - \tfrac{c_{n+1}}{2}h^{n+1} + O(h^{n+2})\\ &= 2^n Q_{app}(\tfrac{h}{2}) - Q_{app}(h) + O(h^{n+1})\end{aligned}$$

On a ainsi l'extrapolation de Richardson :

$$Q_{exa} = \frac{2^n Q_{app}(\frac{h}{2}) - Q_{app}(h)}{2^n - 1} + O(h^{n+1})$$

En utilisant deux approximations d'ordre n de Q_{exa} on obtient une nouvelle approximation d'ordre $n+1$

- Cette méthode permet d'obtenir un gain en précision sans changer h : évite les problèmes liés à h trop petit.
- Cette méthode s'appuie fortement sur le fait que la constante du terme d'erreur dominant est indépendante de h

Exemple 6.3 : Application avec $f(x) = e^x$. Utiliser la différence avant d'ordre 1 et puis la différence centrée d'orde 2.

Pour $h = 0.1$, $f'(0) \simeq \frac{e^{0+h}-e^0}{h} = \frac{e^{0.1}-1}{0.1} = 1.05170918 = Q_{app}(0.1)$

Pour $h = 0.05$, $f'(0) \simeq \frac{e^{0+0.05}-e^0}{0.05} = 1.0254219 = Q_{app}(0.05)$

l'extrapolation de Richardson :

$f'(0) \simeq \frac{2^1 Q_{app}(\frac{h}{2})-Q_{app}(h)}{2^1-1} = 2Q_{app}(0.05) - Q_{app}(0.1) = 0.99913462$

qui est une approximation d'ordre 2, plus précise de $f'(0)$.

Si on utilise la différence centrée on trouve :

Pour $h = 0.05$, $f'(0) \simeq \frac{e^{0.05}-e^{-0.05}}{2(0.05)} = 1.0004167 = Q_{app}(0.05)$

Pour $h = 0.025$, $f'(0) \simeq \frac{e^{0.025}-e^{-0.025}}{2(0.025)} = 1.00010418 = Q_{app}(0.025)$

l'extrapolation de Richardson :

$f'(0) \simeq \frac{2^2 Q_{app}(0.025)-Q_{app}(0.05)}{2^2-1} = 1.000000007$

qui est une approximation d'ordre 4. Car on a

$\frac{fx+h-f(x-h)}{2h} = f'(x) + \frac{f'''(x)h^2}{3!} + \frac{f^{(5)}(x)h^4}{5!} + O(h^6)$

Soit une fonction f définie sur $[a, b]$. L'objectif est d'approcher la valeur de

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

Pour cela, on va introduire une partition de l'intervalle $[a, b]$

$$a = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_m = b$$

et utiliser la relation

$$\int_a^b f(x)\, dx = \sum_{i=0}^{m-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x)\, dx$$

Par conséquent il suffit d'approcher chacunes des intégrales

$$\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x)\, dx$$

On fixe l'intervalle $[a, b]$.

Soit x_i un ensemble de nœuds dans $[a, b]$ et p_n le polynôme qui interpole f en ces nœuds

$$f(x) = p_n(x) + E_n(x).$$

Les formules de Newton-Cotes simples sont basées sur la relation

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b p_n(x)\,dx + \int_a^b E_n(x)\,dx$$

On pose $[a, b]$, $h = b - a$ et $x_0 = \dfrac{a+b}{2}$. On choisit le polynôme de degré 0 passant par le point $(x_0, f(x_0))$ On obtient

$$f(x) = p_0(x) + E_0(x) = f(x_0) + f'(\xi(x))(x - x_0)$$

et donc :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b p_0(x)dx + \int_a^b f'(\xi(x))(x - x_0)\,dx$$

Formule du point-milieu

$$\int_a^b f(x)dx = f(\frac{a+b}{2})(b-a) + \frac{f''(\xi)}{12}(b-a)^3 \;\text{ pour }\; \xi \in [a, b]$$

On pose $[a, b] = [x_0, x_1]$ et $h = x_1 - x_0$. On choisit le polynôme de degré 1 passant par les points $(x_0, f(x_0))$ et $(x_1, f(x_1))$. On obtient

$$f(x) = p_1(x)+E_1(x) = f(x_0)+f[x_0, x_1](x-x_0)+\frac{f''(\xi(x))}{2}(x-x_0)(x-x_1$$

et donc :

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} p_1(x)dx + \int_{x_0}^{x_1} \frac{f''(\xi(x))}{2}(x-x_0)(x-x_1)\, dx$$

Formule du trapèze

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx = \frac{h}{2}(f(x_0)+f(x_1)) - \frac{f''(\xi)}{12}\, h^3 \quad \text{pour} \quad \xi \in [x_0, x_1]$$

On pose $x_0 = a$, $x_1 = \frac{a+b}{2}$ et $x_2 = b$. De plus, on fixe $h = \frac{b-a}{2}$. On choisit le polynôme de degré 2 passant par les points $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$ et $(x_2, f(x_2))$. On obtient

$$f(x) = p_2(x) + E_2(x)$$

et donc :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b p_2(x)dx + \int_a^b E_2(x)\, dx$$

Formule de Simpson

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}\left(f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)\right) - \frac{f''''(\eta)}{90}h^5$$

On veut approximer l'intégrale $I(f) = \int_a^b f(x)dx$ par les trois méthodes ci-haut : Pour $[a, b] = [1, 1.2]$ et $[a, b] = [1, 2]$

$f(x)$	x^2	$\frac{1}{1+x}$	$\sqrt{1+x^2}$	e^x	$sin(x)$
valeur exacte	0.24267	0.09531	0.29742	0.60184	0.17794
M. point-milieu	0.24200	0.09524	0.29732	0.60083	0.17824
M. trapèze	0.24400	0.09545	0.29626	0.60384	0.17735
M. Simpson	0.24267	0.09531	0.29742	0.60184	0.17794

$f(x)$	x^2	$\frac{1}{1+x}$	$\sqrt{1+x^2}$	e^x	$sin(x)$
valeur exacte	2.667	1.099	2.958	1.416	6.389
M. point-milieu	2.000	1.000	2.818	1.682	5.436
M.trapèze	4.000	1.333	3.326	0.909	8.389
M. Simpson	2.667	1.111	2.964	1.425	6.421

On suppose que $\left|f^{(4)}(x)\right| \leq M, \forall x \in [a,b]$.
Si on choisit $h = \frac{b-a}{2}$ petit, alors on s'attend que l'erreur commise par la méthode de Simpson soit petite :

$$\left|\int_a^b f(x)dx - \frac{h}{3}\left(f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)\right)\right| = \left|\frac{f^{(4)}(\xi)}{90}h^5\right| \leq \frac{M}{90}h^5$$

Mais $(b-a)$ peut être assez grand.
Idée : subdiviser l'intervalle $[a,b]$

Soit une partition de l'intervalle $[a, b]$

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

de pas $h = \dfrac{b-a}{n}$.

On peut calculer l'intégrale par la formule

$$\int_a^b f(x)\, dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\, dx$$

et utiliser une des formules de Newton-Cotes simple pour approcher chacune des intégrales

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\, dx$$

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \simeq \sum_{i=0}^{n-1} \frac{h}{2}\left[f(x_i) + f(x_{i+1})\right]$$

$$= \frac{h}{2}\left([f(x_0) + f(x_1)] + [f(x_1) + f(x_2)] + \ldots\right.$$

$$\left. + [f(x_{n-2}) + f(x_{n-1})] + [f(x_{n-1}) + f(x_n)]\right)$$

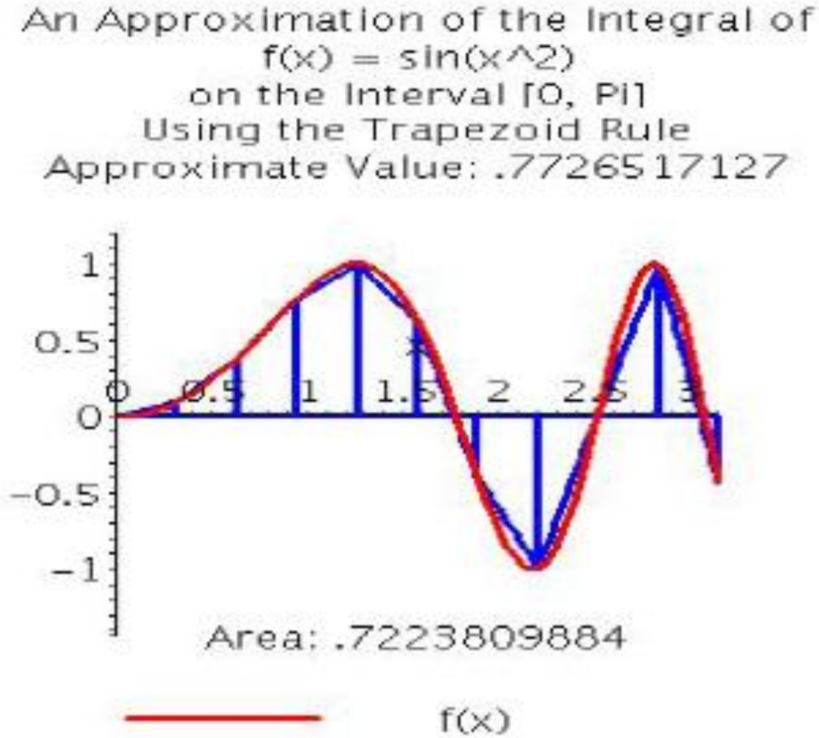
On remarque que tous les termes $f(x_i)$ sont répétés deux fois, sauf le premier et le dernier. On en conclut que :

trapèze composée

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}\left(f(x_0) + 2\left[f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_{n-1})\right] + f(x_n)\right)$$

Terme d'erreur

$$E_T = -\frac{(b-a)}{12} f''(\eta) h^2$$



On choisit $n = 2m$ pair et on utilise la méthode de Simpson simple dans chaque paire de sous-intervalle.

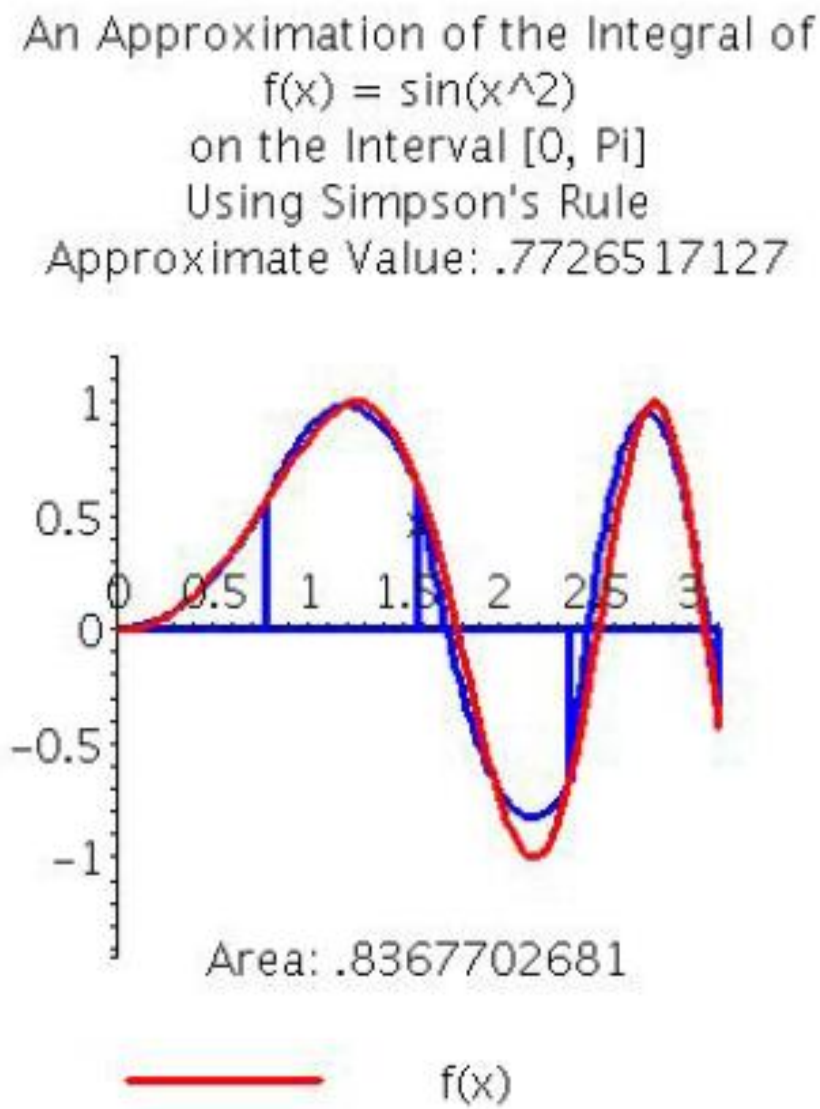
$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx &= \sum_{i=0}^{m-1} \int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} f(x)dx \simeq \sum_{i=0}^{m-1} \frac{h}{3}\left(f(x_{2i}) + 4f(x_{2i+1}) + f(x_{2i+2})\right) \\
&= \frac{h}{3}\big((f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)) + (f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)) + \cdots \\
&\quad + (f(x_{2m-4}) + 4f(x_{2m-3}) + f(x_{2m-2})) \\
&\quad + (f(x_{2m-2}) + 4f(x_{2m-1}) + f(x_{2m}))\big) \\
&= \frac{h}{3}\big(f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \cdots \\
&\quad + 4f(x_{2m-3}) + 2f(x_{2m-2}) + 4f(x_{2m-1}) + f(x_{2m})\big)
\end{aligned}$$

Simpson composée

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}(f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \cdots$$
$$+ 4f(x_{2m-3}) + 2f(x_{2m-2}) + 4f(x_{2m-1}) + f(x_{2m}))$$

Terme d'erreur

$$E_S = -\frac{(b-a)}{180} f''''(\eta)h^4$$


An Approximation of the Integral of
f(x) = sin(x^2)
on the Interval [0, Pi]
Using Simpson's Rule
Approximate Value: .7726517127
1
0.5
0
-0.5
-1
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
x
Area: .8367702681
f(x)

On a vu qu'une formule de quadrature basée sur l'interpolation s'écrit sous la forme

$$\int_a^b f(x)\, dx \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\omega_i$$

où $a \leq x_1 < x_2 < \cdots < x_n \leq b$ sont les nœuds d'interpolation et les ω_i sont les poids.

Propriétés

- La formule de quadrature est toujours exacte pour les polynômes de degré $\leq n-1$.
- $\omega_i = \int_a^b L_i(x)\, dx$ où L_i est le i ième polynôme de Lagrange.

- (méthode du trapèze) ($h = b - a$)

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}(f(a) + f(b)) - \frac{f''(\xi)}{12}\, h^3 \;\text{ pour }\; \xi \in [a, b]$$

Cette formule est exacte pour les polynômes de degré ≤ 1

- (méthode de Simpson) ($h = \frac{b-a}{2}$)

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}\left(f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)\right) - \frac{f''''(\eta)}{90} h^5$$

Cette formule est exacte pour les polynômes de degré ≤ 3

Jusqu'à présent, on considère les nœuds x_i comme étant donnés.

Question

Est-il possible de choisir les nœuds x_i de sorte que la formule de quadrature soit exacte pour des polynômes de degré le plus élevé possible ?

Réponse

- Il faut déterminer les x_i et les ω_i, donc $2n$ inconnues.
- L'exactitude pour chaque polynôme de la forme $f(x) = x^k$ fournit une équation.
- On peut espérer un degré d'exactitude de l'ordre de $2n - 1$.

Pour calculer les nœuds de Gauss, il est préférable de se réduire à un intervalle de référence $[-1, 1]$.

Pour cela, on effectue un changement de variable :

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \int_{-1}^1 f\left(\frac{(b-a)t+(a+b)}{2}\right)\frac{(b-a)}{2}dt \\ &= \frac{(b-a)}{2}\int_{-1}^1 g(t)dt\end{aligned}$$

où

$$g(t) = f\left(\frac{(b-a)t+(a+b)}{2}\right)$$

Pour illustrer comment obtenir la formule de Gauss avec $n = 1$:

- Un nœud de Gauss $x_1 \in [-1; 1]$
- Un poids d'intégration ω_1

tels que la formule de quadrature

$$\int_{-1}^{1} f(x)\, dx \approx \omega_1 f(x_1)$$

soit exacte pour tout polynôme de degré ≤ 1.
Calcul des nœuds et poids de Gauss :

- Prenons $f(x) = 1 \quad \Rightarrow \quad \displaystyle\int_{-1}^{1} 1\, dx = 2 = \omega_1$
- Prenons $f(x) = x \quad \Rightarrow \quad \displaystyle\int_{-1}^{1} x\, dx = 0 = x_1\omega_1$

$$\int_{-1}^{1} f(x)\, dx \approx 2 \times f(0)$$

Pour illustrer comment obtenir la formule de Gauss avec $n = 2$:

- deux nœuds de Gauss $x_1, x_2 \in [-1; 1]$
- deux poids d'intégration $\omega_1; \omega_2$

tels que la formule de quadrature

$$\int_{-1}^{1} f(x)\, dx \approx \omega_1 f(x_1) + \omega_2 f(x_2)$$

soit exacte pour tout polynôme de degré ≤ 3.

Calcul des nœuds et poids de Gauss :

- Prenons $f(x) = 1 \quad \Rightarrow \quad \int_{-1}^{1} 1\, dx = 2 = \omega_1 + \omega_2$
- Prenons $f(x) = x \quad \Rightarrow \quad \int_{-1}^{1} x\, dx = 0 = x_1\omega_1 + x_2\omega_2$
- Prenons $f(x) = x^2 \quad \Rightarrow \quad \int_{-1}^{1} x^2\, dx = \frac{2}{3} = x_1^2\omega_1 + x_2^2\omega_2$
- Prenons $f(x) = x^3 \quad \Rightarrow \quad \int_{-1}^{1} x^3\, dx = 0 = x_1^3\omega_1 + x_2^3\omega_2$

On obtient la solution $x_1 = \frac{-1}{\sqrt{3}}, \quad x_2 = -x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}},$
$\omega_1 = 1, \quad \omega_2 = 1$

$$\int_{-1}^{1} f(x)\, dx \approx 1 \times f(\frac{-1}{\sqrt{3}}) + 1 \times f(\frac{1}{\sqrt{3}})$$

Formule de Gauss à 3 nœuds

$$\int_{-1}^{1} f(x)\, dx \approx f(-\sqrt{\frac{3}{5}})\, \frac{5}{9} + f(0)\, \frac{8}{9} + f(\sqrt{\frac{3}{5}})\, \frac{5}{9}$$

qui est exacte jusqu'au degré 5.

n	Points d'intégration t_i	Poids d'intégration w_i	Degré de précision
1	0	2	1
2	−0.577 350 269	1	3
	+0.577 350 269	1	
3	−0.774 596 669	0.555 555 556	5
	0.0	0.888 888 889	
	+0.774 596 669	0.555 555 556	
4	−0.861 136 312	0.347 854 845	7
	−0.339 981 044	0.652 145 155	
	+0.339 981 044	0.652 145 155	
	+0.861 136 312	0.347 854 845	
5	−0.906 179 846	0.236 926 885	9
	−0.538 469 310	0.478 628 670	
	0.0	0.568 888 889	
	+0.538 469 310	0.478 628 670	
	+0.906 179 846	0.236 926 885	

- La quadrature de Gauss à n points est exacte dans le cas des polynômes de degré $(2n-1)$.
- Le terme d'erreur est donné par :

$$\frac{2^{2n+1}(n!)^4}{(2n+1)((2n)!)^3}f^{(2n)}(\xi) \text{ où } \xi \in [-1,1]$$

- Pour un intervalle diférent de $[-1,1]$, il faut effectuer un changement de variable.
- Il est possible d'obtenir des formules de Gauss composées.