Contrôle en méthodes numériques

Durée (2 h : 00 mn)

Prof. A.Ramadane, Ph.D.

Université Internationale de Casablanca

LAUREATE INTERNATIONAL UNIVERSITIES

Exercice 1 (6 points)

Considérons l'intégrale

$$I = \int_{-5}^{3} e^{x^2} dx$$

a) Calculer une approximation de I en appliquant la méthode du trapèze composée avec 4 intervalles.
b) Pour cette méthode, quel est le nombre minimal d'intervalles à utiliser pour obtenir une approximation qui a une erreur d'au plus 10^{-2} ?
c) Utiliser la méthode de quadrature de Gauss à 3 nœuds pour trouver une approximation de I
d) Calculer une approximation de I en appliquant la quadrature suivante :
$$\int_{-1}^{1} f(t)dt \simeq \frac{1}{2} f(-1) + \frac{3}{2} f(\frac{1}{3})$$
e) Sachant que le degré de précision de la méthode du trapèze composée est 1, est-il possible d'obtenir avec cette méthode (en utilisant un nombre suffisamment grand d'intervalles) une approximation qui soit meilleure que celle que l'on peut calculer par la quadrature de la question (d) ? Discuter

Exercice2 (4 points)

On considère la formule aux différences

$$App(h) = \frac{f(x+2h) - 2f(x+h) + 2f(x-h) - f(x-2h)}{2h^3} \simeq f^{(3)}(x),$$

une approximation de la dérivée troisième $f^{(3)}(x)$.

(a) On dispose des valeurs suivantes de la fonction $f(x)$:

x	$f(x)$	x	$f(x)$
0,80	0,088 967 97	1,05	0,053 648 07
0,85	0,079 617 83	1,10	0,049 115 91
0,90	0,071 633 24	1,15	0,045 126 35
0,95	0,064 766 84	1,20	0,041 597 34
1,00	0,058 823 53		

En vous servant de la formule aux différences $App(h)$, calculer deux approximations de $f^{(3)}(1)$ et estimer numériquement *l'ordre de précision* de cette formule aux différences sachant que $f^{(3)}(1) = -1,103\,435\,06$.

(b) En vous servant des développements de Taylor appropriés, montrer que

$$App(h) = f^{(3)}(x) + \frac{1}{4}h^2 f^{(5)}(x) + \mathcal{O}(h^4),$$

et en déduire *l'ordre de précision* de l'approximation $App(h)$.

Exercice 3 (5 points)

On considère la table de différences divisées suivante:

xi	*f (xi)*	$F[X_i, X_{i+1}]$.	$F[X_{i,..} X_{i+2}]$.	$F[X_{i,..} X_{i+3}]$.
1,9	0,94630			
		-0,127 975		
1,5	0,99749		?	
		-0,314 725		?
2,3	0,74571		?	
		-0,795 824		
2,7	0,42738			

a) Compléter la table.

b) En vous servant de la table de différences divisées, calculer une approximation de $f(1,6)$ en utilisant le polynôme de Newton passant par les 3 premiers points.

c) Donner une estimation de l'erreur d'interpolation en x =1,6 et en déduire le nombre de chiffres significatifs de l'approximation obtenue en (b).

d) Sachant que $f(x) = \sin(x)$, calculer une borne supérieure de la valeur absolue de l'erreur d'interpolation en x (1, 6).

e) Quel polynôme est le plus précis, celui trouvé en (b), ou le polynôme de Lagrange passant par $f(x)$ en x = 5,1 ; 1,9 et 2;3? Justifier votre réponse.

f) Rappeler et comparer les méthodes d'interpolation : Vandermonde, Lagrange, Newton et Spline.

Exercice 4 (5 points)

Le tableau suivant présente la concentration de la médianone en fonction du temps, en présence de 5% d'agent complexant, lorsque exposer à l'ultra violet:

Temps (min)	Médianone (10^{-5}mol/l)
10	5,15
20	5,11
30	5,06
40	5,00

(a) Estimer la concentration de la médianone en 10^{-5}mol/l à 35 minutes en utilisant le polynôme de Lagrange de *degré 2* passant par les 3 derniers points du tableau.

(b) Est-il possible d'obtenir une meilleure approximation de la concentration de la médianone en 10^{-5}mol/l à 35 minutes en utilisant le polynôme de Lagrange de *degré 2* passant par les 3 premiers du tableau? Justifier votre Solution. **(Ne pas calculer cette nouvelle approximation.)**