Aide mémoire d'analyse numérique

A. Ramadane, Ph.D.

CALCUL SCIENTIFIQUE POUR INGÉNIEURS
AIDE MÉMOIRE

Définitions, développement de Taylor et erreur de troncature

- Erreur absolue: $\Delta x = |x - x^\star|$
- Erreur relative: $e_r(x) = \frac{\Delta x}{|x|}$
- Chiffres significatifs:

  Le chiffre de $x^\star$ associé à la puissance de m et les chiffres associés aux puissances supérieures tels que $\Delta x \leq 0,5 \times 10^m$.

- $f(x_0 + h) = P_n(h) + R_n(h)$:

$$\begin{cases} P_n(h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{1}{2!}f''(x_0)h^2 + \frac{1}{3!}f'''(x_0)h^3 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)h^n \\ R_n(h) = \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi(h))h^{(n+1)} \quad \text{pour } \xi(h) \text{ entre } x_0 \text{ et } x_0 + h. \end{cases}$$

- $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$:

$$\begin{cases} P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n \\ R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi(x))(x - x_0)^{(n+1)} \quad \text{pour } \xi(x) \text{ entre } x_0 \text{ et } x. \end{cases}$$

- $f(h) = \mathcal{O}(h^n)$:

  Il existe une constante $C > 0$ t.q. $\left|\frac{f(h)}{h^n}\right| \leq C$ pour h près de 0.

Interpolation

- Interpolation polynômiale de Lagrange: étant donné $(n+1)$ points $(x_i, f(x_i))$ pour $i = 0, 1, \cdots, n$:

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) L_i(x),$$

$$\text{où} \quad L_i(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}$$

- Différences divisées: $f[x_i] = f(x_i)$,

$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}, \quad f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}] - f[x_i, x_{i+1}]}{x_{i+2} - x_i}, \quad \text{etc.}$$

- Polynôme de Newton:

$$p_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + \cdots + a_n(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1}),$$

où $a_i = f[x_0, x_1, x_2, \cdots, x_i]$ pour $i = 0, 1, \ldots, n$

- Erreur d'interpolation:

$$E_n(x) = f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n) \quad \text{pour} \quad \xi(x) \in \,]x_0, x_n[$$

- Approximation de l'erreur d'interpolation:

$$E_n(x) \simeq f[x_0, x_1, \cdots, x_n, x_{n+1}](x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)$$

- Borne de l'erreur d'interpolation:

$$|E_n(x)| \leq \max_{\xi(x) \in \,]x_0, x_n[} |f^{(n+1)}(\xi(x))| \frac{h^{n+1}}{4(n+1)} \quad \text{pour} \quad h = x_i - x_{i-1} \quad \text{où} \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

Différentiation et intégration numériques

- Différentiation numérique:

formule de différence finie	terme d'erreur
$f'(x) \simeq \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$	$-\frac{f''(\xi)}{2}h$
$f'(x) \simeq \frac{f(x)-f(x-h)}{h}$	$\frac{f''(\xi)}{2}h$
$f'(x) \simeq \frac{-f(x+2h)+4f(x+h)-3f(x)}{2h}$	$\frac{f'''(\xi)}{3}h^2$
$f'(x) \simeq \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$	$-\frac{f'''(\xi)}{6}h^2$
$f'(x) \simeq \frac{3f(x)-4f(x-h)+f(x-2h)}{2h}$	$\frac{f'''(\xi)}{3}h^2$
$f''(x) \simeq \frac{f(x+2h)-2f(x+h)+f(x)}{h^2}$	$-f'''(\xi)h$
$f''(x) \simeq \frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2}$	$-\frac{f''''(\xi)}{12}h^2$
$f''(x) \simeq \frac{f(x-2h)-2f(x-h)+f(x)}{h^2}$	$f'''(\xi)h$
$f''(x) \simeq \frac{-f(x+2h)+16f(x+h)-30f(x)+16f(x-h)-f(x-2h)}{12h^2}$	$\frac{1}{90}f^{(6)}(\xi)h^4$

- Extrapolation de Richardson:

  Soit
  $$Q_{\text{exa}} = Q_{\text{app}}(h) + c_n h^n + c_{n+1} h^{n+1} + c_{n+2} h^{n+2} + \cdots$$
  alors pour $p > 1$
  $$Q_{\text{exa}} = \frac{p^n Q_{\text{app}}(\frac{h}{p}) - Q_{\text{app}}(h)}{p^n - 1} + \frac{\left(\frac{1}{p} - 1\right) c_{n+1} h^{n+1} + \left(\frac{1}{p^2} - 1\right) c_{n+2} h^{n+2} + \cdots}{p^n - 1}$$

- Quadratures de Newton-Cotes:

méthode	formule de quadrature	terme d'erreur	nombre de points
trapèze	$\frac{h}{2}(f(x_0) + f(x_1))$	$-\frac{f''(\xi)}{12} h^3$	2
trapèze composée	$\frac{h}{2}(f(x_0) + 2[f(x_1) + \cdots$ $\cdots + f(x_{n-1})] + f(x_n))$	$-\frac{(b-a)}{12} f''(\xi) h^2$	$n+1$
Simpson $\frac{1}{3}$	$\frac{h}{3}(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2))$	$-\frac{f^{(4)}(\xi)}{90} h^5$	3
Simpson $\frac{1}{3}$ composée	$\frac{h}{3}(f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots$ $\cdots + 2f(x_{2n-2}) + 4f(x_{2n-1}) + f(x_{2n}))$	$-\frac{(b-a)}{180} f^{(4)}(\xi) h^4$	$2n+1$
Simpson $\frac{3}{8}$	$\frac{3h}{8}(f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3))$	$-\frac{3f^{(4)}(\xi)}{80} h^5$	4
Simpson $\frac{3}{8}$ composée	$\frac{3h}{8}(f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + 2f(x_3) + 3f(x_4) + \cdots$ $\cdots + 2f(x_{3n-3}) + 3f(x_{3n-2}) + 3f(x_{3n-1}) + f(x_{3n}))$	$-\frac{(b-a)}{80} f^{(4)}(\xi) h^4$	$3n+1$
Boole	$\frac{2h}{45}(7f(x_0) + 32f(x_1) + 12f(x_2) + 32f(x_3) + 7f(x_4))$	$-\frac{8f^{(6)}(\xi)}{945} h^7$	5
Boole composée	$\frac{2h}{45}(7f(x_0) + 32f(x_1) + 12f(x_2) + 32f(x_3) +$ $+14f(x_4) + \cdots + 32f(x_{4n-5}) + 14f(x_{4n-4}) +$ $+32f(x_{4n-3}) + 12f(x_{4n-2}) + 32f(x_{4n-1}) + 7f(x_{4n}))$	$-\frac{2(b-a)}{945} f^{(6)}(\xi) h^6$	$4n+1$

- Intégration de Gauss:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{(b-a)}{2}\int_{-1}^{1} f\left(\frac{(b-a)t+(a+b)}{2}\right)dt = \frac{(b-a)}{2}\int_{-1}^{1} g(t)\,dt \simeq \frac{(b-a)}{2}\sum_{i=1}^{n}\omega_i\, g(t_i)$$

nb de pts (n)	points de Gauss t_i	poids de Gauss ω_i	degré de précision ($2n-1$)
1	$+0,000\,000\,000$	$2,000\,000\,000$	1
2	$-0,577\,350\,269$ $+0,577\,350\,269$	$1,000\,000\,000$ $1,000\,000\,000$	3
3	$-0,774\,596\,669$ $+0,000\,000\,000$ $+0,774\,596\,669$	$0,555\,555\,556$ $0,888\,888\,889$ $0,555\,555\,556$	5
4	$-0,861\,136\,312$ $-0,339\,981\,044$ $+0,339\,981\,044$ $+0,861\,136\,312$	$0,347\,854\,845$ $0,652\,145\,155$ $0,652\,145\,155$ $0,347\,854\,845$	7

Équations algébriques non linéaires

- Problème « de racine »: chercher r t.q. $f(r) = 0$
- Borne supérieure de l'erreur pour la méthode de la bissection: $|x_n - r| \leq \frac{b-a}{2^n}$
- Problème de point fixe: chercher r t.q. $r = g(r)$
- Algorithme de point fixe: pour x_0 donné, $x_{n+1} = g(x_n)$ pour $n = 0, 1, 2, \ldots$
- Développement pour l'analyse de convergence de la méthode de points fixes:

$$e_{n+1} := x_{n+1} - r = g'(r)e_n + \tfrac{1}{2}g''(r)e_n^2 + \tfrac{1}{6}g'''(r)e_n^3 + \cdots$$

- Méthode de Newton: pour x_0 donné,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad \text{pour} \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

- Une racine r de la fonction $f(x)$ est de *multiplicité* m si $f(x) = (x - r)^m h(x)$ pour une fonction $h(x)$ qui vérifie $h(r) \neq 0$ ou encore si:

$$f(r) = f'(r) = f''(r) = \cdots = f^{(m-1)}(r) = 0 \quad \text{et} \quad f^{(m)}(r) \neq 0$$

- Taux de convergence de la méthode de Newton dans le cas d'une racine de *multiplicité* m: $1 - \frac{1}{m}$
- Méthode de la sécante:pour x_0 et x_1 donnés,

$$x_{n+1} = g(x_n, x_{n-1}) = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - x_{n-1})}{(f(x_n) - f(x_{n-1}))} \quad \text{pour} \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

- Méthode de l'interpolation quadratique inverse: pour x_0 et x_1 et x_2 donnés,

$$\begin{aligned} x_{n+1} = g(x_n, x_{n-1}, x_{n-2}) = &\frac{x_{n-2} f(x_{n-1}) f(x_n)}{(f(x_{n-2}) - f(x_{n-1}))(f(x_{n-2}) - f(x_n))} \\ &+ \frac{x_{n-1} f(x_{n-2}) f(x_n)}{(f(x_{n-1}) - f(x_{n-2}))(f(x_{n-1}) - f(x_n))} \\ &+ \frac{x_n f(x_{n-2}) f(x_{n-1})}{(f(x_n) - f(x_{n-2}))(f(x_n) - f(x_{n-1}))} \end{aligned}$$

pour $n = 2, 3, \ldots$

- Analyse de convergence pour les méthodes à k points, $x_{n+1} = g(x_n, x_{n-1}, \ldots, x_{n-k+1})$:

$$e_{n+1} \simeq K(r) e_n e_{n-1} \cdots e_{n-k+1} \quad \text{où} \quad f(r) = 0$$

et

$$e_{n+1} \simeq C e_n^p \quad \text{où} \quad \begin{cases} p^2 - p - 1 = 0 & \text{pour} \quad k = 2 \quad (p \simeq 1,61) \\ p^3 - p^2 - p - 1 = 0 & \text{pour} \quad k = 3 \quad (p \simeq 1,84) \\ p^k - p^{k-1} - \cdots - p - 1 = 0 & \text{dans le cas général} \end{cases}$$

Systèmes d'équations algébriques

- La factorisation matricielle de Crout:

$$A = LU = \begin{pmatrix} \ell_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \ell_{21} & \ell_{22} & 0 & \ddots & \vdots \\ \ell_{31} & l_{32} & \ell_{33} & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \ell_{n1} & \ell_{n2} & \cdots & \ell_{nn-1} & \ell_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & 1 & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- La résolution des systèmes linéaires:

$$A\vec{x} = \vec{b} \Leftrightarrow LU\vec{x} = P\vec{b} \Rightarrow \begin{cases} 1^\circ)\ L\vec{y} = P\vec{b}; \\ 2^\circ)\ U\vec{x} = \vec{y}. \end{cases}$$

Note: On peut utiliser le vecteur de permutation $\vec{O}$ plutôt que la matrice de permutation P.

- Normes vectorielles:

$$\|\vec{x}\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} \qquad \|\vec{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \qquad \|\vec{x}\|_\infty = \max_{i=1,2,\ldots,n} |x_i|$$

- Normes matricielles:

$$\|A\|_1 = \max_{j=1,2,\ldots,n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \qquad \|A\|_\infty = \max_{i=1,2,\ldots,n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \qquad \|A\|_{\mathrm{F}} = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2}$$

- Conditionnement matriciel: $\mathrm{cond}\, A = \|A\|\,\|A^{-1}\|$

- Bornes de l'erreur: pour le résidu $\vec{r} = \vec{b} - A\vec{x}^\star$ et la perturbation E sur la matrice A,

$$\frac{1}{\mathrm{cond}\, A} \frac{\|\vec{r}\|}{\|\vec{b}\|} \le \frac{\|\vec{x} - \vec{x}^\star\|}{\|\vec{x}\|} \le \mathrm{cond}\, A \frac{\|\vec{r}\|}{\|\vec{b}\|} \qquad \text{et} \qquad \frac{\|\vec{x} - \vec{x}^\star\|}{\|\vec{x}^\star\|} \le \mathrm{cond}\, A \frac{\|E\|}{\|A\|}$$

- Matrice à diagonale strictement dominante A:

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| \quad \text{pour} \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

- La méthode de Newton: pour $\vec{x}^k$ donné, résoudre

$$J(\vec{x}^k)\vec{\delta}x = -\vec{R}(\vec{x}^k) \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\vec{x}^k) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\vec{x}^k) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\vec{x}^k) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\vec{x}^k) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\vec{x}^k) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\vec{x}^k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\vec{x}^k) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(\vec{x}^k) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\vec{x}^k) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \\ \vdots \\ \delta x_n \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} f_1(\vec{x}^k) \\ f_2(\vec{x}^k) \\ \vdots \\ f_n(\vec{x}^k) \end{pmatrix}$$

puis $\vec{x}^{k+1} = \vec{x}^k + \vec{\delta}x$ pour $k = 0, 1, 2, \ldots$