

# Dynamique des solides

## Objectifs du cours :

Après avoir *étudié* ce cours, en présence d'un système technique industriel composé de solides rigides en mouvement relatif sous l'action d'efforts extérieurs, vous devez être capable de :

- Proposer quelques exemples de systèmes comportant des effets dynamiques.
- Déterminer les torseurs cinétique et dynamique, ainsi que l'énergie cinétique d'un ensemble de solides.
- Relier les quantités cinématiques (effets) aux actions mécaniques (causes), c'est à dire connaître et savoir appliquer :
  - le Principe fondamental de la dynamique,
  - le Théorème de l'énergie cinétique.
- Résoudre des problèmes de 3 types :
  - Systèmes à cinématique imposée :  
Déterminer les inconnues de liaison ou les efforts extérieurs ;
  - Systèmes à cinématique libre et actions mécaniques connues :  
Donner la loi du mouvement sous forme d'équations différentielles ;
  - Systèmes à inconnues mixtes (cinématique et actions mécaniques)

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction à la dynamique des machines alternatives</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Principe Fondamental de la Dynamique (PFD)</b>	<b>5</b>
2.1	Bref historique . . . . .	5
2.2	Cas d'une masse ponctuelle : Lois de Newton . . . . .	5
2.3	Cas de la mécanique des solides rigides . . . . .	7
2.4	Énoncé du PFD pour les solides rigides . . . . .	10
2.5	Calcul du torseur dynamique . . . . .	10
<b>3</b>	<b>Torseur cinétique</b>	<b>11</b>
3.1	Définition du torseur cinétique . . . . .	11
3.2	Calcul du torseur dynamique à l'aide du torseur cinétique . . . . .	12
3.3	Calcul du torseur cinétique : matrice d'inertie . . . . .	14
<b>4</b>	<b>Exemple : micro-compresseur</b>	<b>15</b>
<b>5</b>	<b>Caractéristiques d'inertie des solides</b>	<b>15</b>
5.1	Masse et centre de gravité . . . . .	16
5.2	Matrice d'inertie . . . . .	17
5.3	Base principale d'inertie . . . . .	18
5.4	Calcul des termes de la matrice – Exemple . . . . .	18
5.5	Théorème de Huygens . . . . .	20
5.6	Matrices d'inertie de quelques géométries simples . . . . .	20
5.7	Exemple : matrice d'inertie du vilebrequin et de la bielle . . . . .	22
<b>6</b>	<b>Puissances et théorème de l'énergie cinétique</b>	<b>23</b>
6.1	Puissance développée par une action mécanique . . . . .	23
6.2	Théorème de l'énergie cinétique . . . . .	25
<b>7</b>	<b>Notions d'équilibrage</b>	<b>27</b>
7.1	Pourquoi et comment équilibrer les machines . . . . .	27
7.2	Résolution du problème d'équilibrage . . . . .	30
<b>A</b>	<b>Synthèse de l'essentiel à savoir en dynamique au concours</b>	<b>33</b>
A.1	Méthode . . . . .	33
A.2	Formules utiles en dynamique . . . . .	34
A.3	Matrice d'inertie . . . . .	35
A.4	Énergétique . . . . .	35
<b>B</b>	<b>Compléments de modélisation des actions mécaniques</b>	<b>35</b>
B.1	Du local au global . . . . .	36
B.2	Du global au local . . . . .	37
<b>C</b>	<b>Construction de la théorie en mécanique des solides</b>	<b>40</b>
C.1	Modélisation du mouvement et des efforts . . . . .	40
C.2	Notion de dualité . . . . .	41
C.3	Norme $L^2$ pour les champs vectoriels . . . . .	42
C.4	Champ dual d'un champ de torseur . . . . .	42
C.5	Différentes grandeurs duales associées au solides rigides . . . . .	43
C.6	Complément : Théorème de transport et conservation de la masse . . . . .	44

# 1 Introduction à la dynamique des machines alternatives

Les machines alternatives représentent une classe de mécanismes fonctionnant sur le principe d’aller-retour d’un piston, permettant de faire varier le volume d’une chambre. On trouve dans cette catégorie les moteurs thermiques de voiture ou encore les pompes et compresseurs à piston.

Les figures 1 et 2 montrent l’exemple complexe d’un moteur thermique essence de voiture (moteur Ford). On distingue dans la partie supérieure les soupapes (qui ouvrent ou ferment l’admission d’air et l’échappement des gaz), dans la partie inférieure le vilebrequin, qui est l’arbre moteur de sortie, et dans la partie médiane les quatre pistons. On voit nettement pour chaque piston un temps différent du cycle à 4 temps : admission d’air (4), compression (2), combustion et détente (3), et enfin échappement des gaz (1).

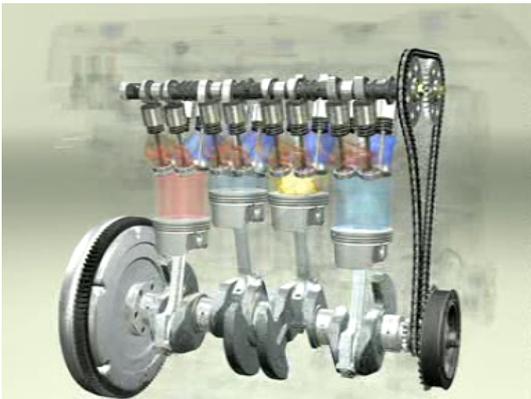


FIGURE 1 – Vue des pièces mobiles d’un moteur thermique à 4 cylindres en ligne.

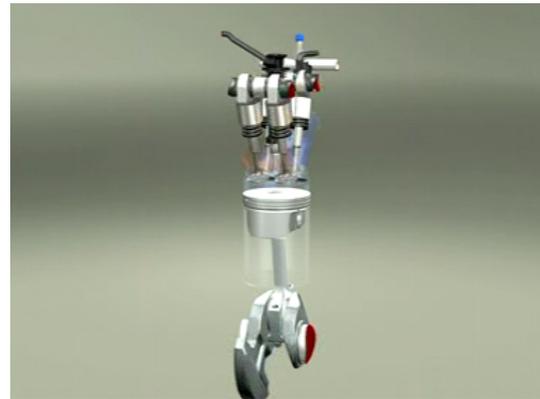


FIGURE 2 – Vue d’un unique cylindre, avec le système bielle-manivelle et les soupapes.

Ces machines présentent la particularité d’imposer un mouvement complexe aux pièces à des vitesses très élevées : un moteur thermique peut tourner, sur des motos par exemple, jusqu’à des vitesses de l’ordre de  $17\,000\text{ tr/min}$ , c’est à dire que le piston effectue 280 aller-retour chaque seconde ! L’inertie des pièces génère des effets dynamiques non négligeables, conduisant d’une part à des vibrations transmises au support et d’autre part à des efforts dynamiques susceptibles de dégrader les pièces et les liaisons. Ces mécanismes doivent faire l’objet d’une étude précise de la répartition des masses et des efforts mis en jeu.

L’illustration de ce cours porte sur un compresseur (figure 3, 4 et 5), disposant d’un unique piston, dont l’étude sera abordable tout en présentant toutes les particularités des machines alternatives.

L’effet dynamique principal est l’effet de *pilon*. Il s’agit d’un effort dans l’axe du piston. En effet, le piston ainsi que la bielle ont globalement un mouvement de translation alternative. Les accélérations aux points morts haut et bas conduisent à des vibrations verticales.

Le second effet dynamique est l’effet de *tamis*. Il s’agit d’un effort orthogonal à l’axe du piston. La bielle, en plus d’un mouvement vertical, effectue un mouvement oscillant horizontal, qui transmet des vibrations horizontales.

Pour compenser ces effets dynamiques, il est possible d’ajouter un balourd sur l’arbre moteur, c’est à dire de déplacer son centre de gravité hors de l’axe de rotation. Ce balourd est susceptible de compenser une part des effets de pilon et de tamis mais ne peut les supprimer totalement.

Les machines alternatives ne pouvant être parfaitement équilibrées, elles sont généralement fixées au bâti par des *silent blocs*. Ce sont des liaisons en caoutchouc absorbant au



FIGURE 3 – vue extérieure du micro-compresseur.

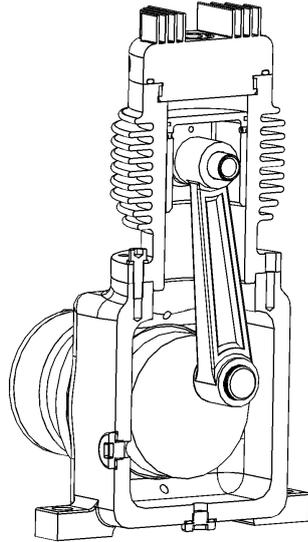


FIGURE 4 – Écorché 1.

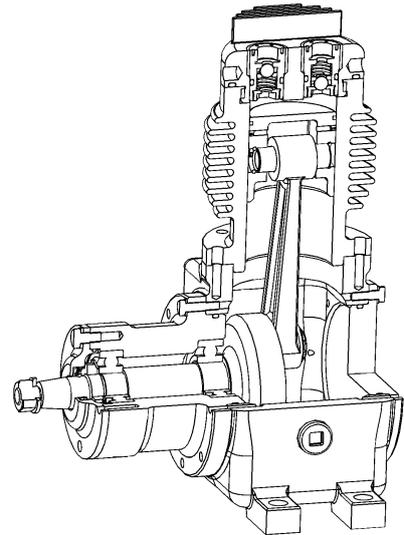


FIGURE 5 – Écorché 2.

mieux les vibrations de la machine.

On se propose dans la suite de déterminer les efforts transmis au bâti par les pièces en mouvement, par effet dynamique. Pour cela, la partie suivante introduit le Principe Fondamental de la Dynamique (PFD), qui contrairement au PFS permet de tenir compte des effets dynamiques. Le PFD utilise un nouveau *torseur dynamique* pour caractériser les effets dynamiques. Les outils permettant de calculer ce torseur dynamique seront développés.

Remarquons avant de poursuivre que les effets dynamiques ne sont pas toujours néfastes. Les photographies 6 et 7 montrent un gyromètre utilisé dans le cadre de la centrale inertielle des missiles balistiques Pluton.



FIGURE 6 – Vue globale du gyromètre.

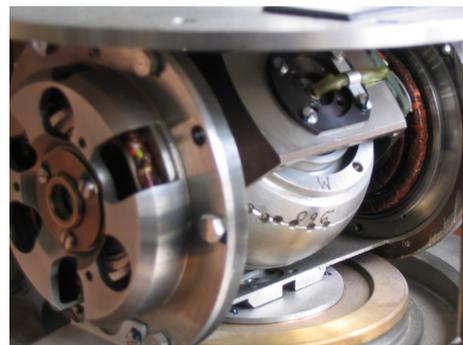


FIGURE 7 – Zoom sur les liaisons pivots.

Un gyromètre est constitué d'un solide en rotation à très grande vitesse (appelé gyroscope) guidé par des liaisons pivots permettant au gyroscope de maintenir sa direction malgré les mouvements du missile. L'effet dynamique tend à maintenir l'axe du gyroscope dans une direction constante par rapport au référentiel galiléen. La mesure des angles des liaisons pivots permet de déterminer la position angulaire du missile.

## 2 Principe Fondamental de la Dynamique (PFD)

### 2.1 Bref historique

Le Principe Fondamental de la Dynamique fut énoncé pour la première fois par Newton en 1687. Comme le mot *Principe* l'indique, il ne peut pas être démontré. C'est une affirmation qui permet de comprendre les phénomènes observés. Le *principe* est donc la base d'une théorie, appelée *Mécanique Classique* ou *Mécanique Newtonienne*. Un *principe physique* est considéré comme correct tant qu'aucune expérience n'a pu le contredire. C'est seulement en 1905 qu'Einstein met le PFD en défaut et propose une nouvelle théorie (relativité restreinte). Cependant, le PFD n'a pas été mis au placard pour autant car il permet de rendre compte simplement de tous les phénomènes mécaniques tant que les vitesses restent faibles devant celle de la lumière. C'est évidemment le cas pour presque toutes les applications intéressant l'ingénieur.

Nous commencerons donc par énoncer les lois de Newton pour la masse ponctuelle, c'est à dire pour une particule élémentaire de matière. Il est alors possible de construire des équations particulières pour différents milieux comme les solides, rigides ou déformables, ou encore les fluides. Nous nous intéresserons dans ce cours à l'expression du PFD pour le cas particulier des solides rigides.

### 2.2 Cas d'une masse ponctuelle : Lois de Newton

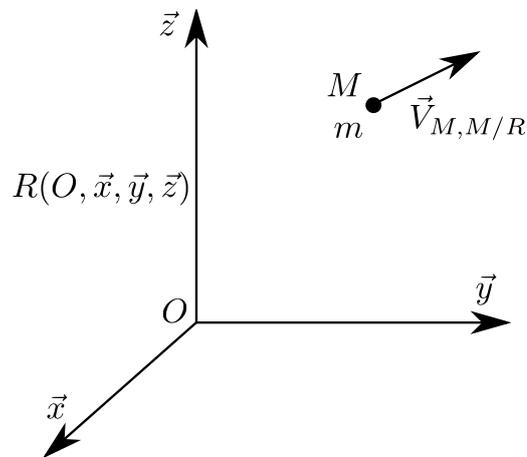


FIGURE 8 – Masse ponctuelle en mouvement dans un référentiel.

On s'intéresse à une particule  $M$  de masse  $m$  en mouvement par rapport à un repère  $R$ .

#### 2.2.1 Première loi de Newton : principe d'inertie

Le principe d'inertie a été imaginé par Galilée puis repris par Newton. Il stipule que si un objet, livré à lui-même, n'est pas perturbé, il continu à se déplacer avec une vitesse constante et en ligne droite s'il était initialement en mouvement, ou continu de rester au repos s'il était initialement au repos. C'est à dire qu'un objet ne peut modifier son mouvement si aucune force extérieure n'est exercée sur lui. On peut par exemple penser à l'astronaute ayant lâché la navette et s'éloignant, impuissant, dans l'espace. Si aucune force extérieure ne s'applique sur lui, il poursuit son mouvement par inertie.

Ce principe a demandé beaucoup d'imagination à Galilée, puisque dans le monde qui nous entoure, tout corps lâché en l'air retombe par terre... Il a donc fallu comprendre que

l'action de la terre est une force extérieure perturbant le mouvement des objets. D'autre part, la terre étant en rotation sur elle-même, un objet *au repos* sur terre (c'est à dire dans le référentiel terrestre) n'est en pratique pas au repos. La première loi de Newton peut aujourd'hui s'énoncer ainsi :

*Il existe au moins un référentiel privilégié  $R_g$ , appelé Galiléen, par rapport auquel tout point matériel  $A$  éloigné de tout autre corps a un mouvement rectiligne uniforme.*

On appelle dans cet énoncé *point matériel* une particule de masse non nulle, *mouvement rectiligne* un mouvement dont la trajectoire est une droite, *uniforme* une vitesse constante. Remarquons que tout référentiel en translation rectiligne uniforme par rapport à un référentiel galiléen est lui aussi galiléen. Il existe donc une infinité de référentiels galiléens.

La définition du repère galiléen est idéale et ne permet pas de trouver un référentiel parfaitement galiléen. Pour les besoins des calculs de trajectoire des planètes, les astronomes ont défini un repère quasi-galiléen : le référentiel de Copernic, lié au soleil et pointant dans la direction de 3 étoiles fixes lointaines.

Le référentiel lié à la terre est une moins bonne approximation du référentiel galiléen mais il est tout de même largement suffisant pour la plupart des applications de l'ingénieur.

Le référentiel terrestre est suffisant lorsque le phénomène mécanique est court devant la période de rotation de la terre ( $T \ll 24h$ ) et que les distances couvertes sont petites devant le rayon de la terre ( $L \ll 6400 km$ ). Il est donc insuffisant pour calculer la trajectoire d'Ariane lors d'un lancement (distance importante). De même, Foucault montra que la terre tournait en observant le mouvement d'un pendule qui oscille sur plusieurs jours (temps long). Le pendule de Foucault oscille toujours dans le Panthéon.

### 2.2.2 Deuxième loi de Newton : Principe Fondamental de la Dynamique

La seconde loi de Newton est la plus importante : elle affirme que la variation de la quantité de mouvement d'une particule est proportionnelle à la force appliquée. Elle représente donc le lien entre *les efforts* appliqués sur la particule et le *mouvement* de cette particule. C'est à dire un lien entre les notions déjà vues en *statique* et en *cinématique*. L'énoncé de la seconde loi s'écrit :

*Dans un repère galiléen  $R_g$ , la force qui s'exerce sur un point matériel  $M$  est égale à la dérivée par rapport au temps de la quantité de mouvement.*

$$\vec{F}_{\overline{M}/M} = \frac{d(m \cdot \vec{V}_{M,M/R_g})}{dt} / R_g$$

On note  $\overline{M}$  l'extérieur à la particule  $M$  ;  $m \cdot \vec{V}_{M,M/R_g}$  est la quantité de mouvement.

On remarque à travers cette loi que, pour qu'une particule soit accélérée, il faut exercer une force extérieure dans le même sens que la vitesse. Pour qu'une particule soit déviée vers la gauche, il faut une force extérieure dirigée vers la gauche. Ainsi, pour que les planètes puissent tourner autour du soleil, il faut qu'une force d'attraction les dévient vers le soleil. Enfin, on remarque que, plus la masse de la particule est importante, plus la force doit être importante.

La masse de la particule étant constante, on peut ré-écrire l'expression mathématique sous la forme :

$$\vec{F}_{\overline{M}/M} = m \cdot \vec{\Gamma}_{M,M/R_g}$$

où  $\vec{\Gamma}_{M,M/R_g}$  est l'accélération de la particule  $M$  par rapport au référentiel galiléen  $R_g$ .

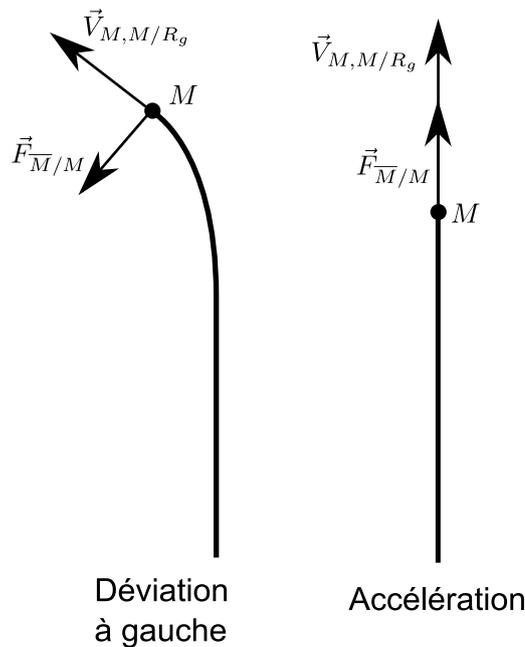


FIGURE 9 – Action mécanique modifiant le mouvement d'un point matériel.

### 2.2.3 Troisième loi de Newton : Principe des actions réciproques

Cette loi a déjà été abordée en statique des solides. Si une particule  $M$  exerce une force  $\vec{F}$  sur une particule  $M'$ , alors réciproquement la particule  $M'$  exerce une force  $\vec{F}' = -\vec{F}$  sur la particule  $M$ .

## 2.3 Cas de la mécanique des solides rigides

Le cas de la masse ponctuelle pose les bases de la mécanique newtonienne mais n'est pas suffisante pour l'ingénieur. En effet, on trouve peu d'objet dans le monde qui nous entoure assimilables à des masses ponctuelles.

Par contre, l'ingénieur est confronté à des phénomènes plus complexes comme ceux des systèmes de solides peu déformables, des solides déformables ou encore des fluides. Il est possible de construire différentes théories modélisant ces phénomènes en considérant la matière comme un ensemble d'une infinité de particules élémentaires répondant aux lois de Newton.

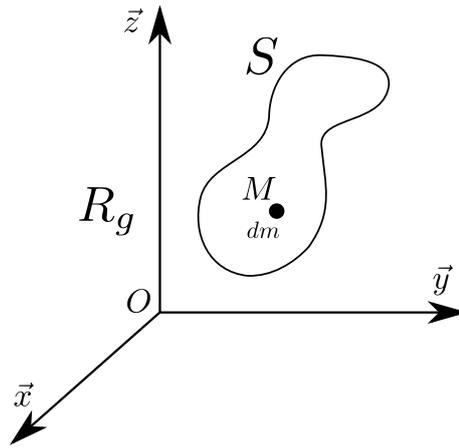
Nous nous intéressons d'une façon générale à un solide rigide  $S$  en mouvement par rapport à un référentiel galiléen  $R_g$ . On a pu voir précédemment que l'outil approprié pour représenter le mouvement d'un solide ou les actions transmissibles entre solides est le *torseur*. Le PFD s'écrira lui aussi comme une relation entre torseurs.

Considérons que le solide  $S$  est constitué d'une infinité de particules élémentaires  $dS$ , situées en  $M$  de volume  $dV$  autour de  $M$  et de masse  $dm = \rho(M).dV$  ( $\rho(M)$  est la masse volumique en  $M$  du solide).

Notons l'accélération du point  $M$  de  $S$  par rapport à  $R_g$  :  $\vec{\Gamma}_{M,S/R_g}$  et les efforts extérieurs appliqués à la particule  $dS$  :  $\vec{df}_{ext/dS}$ .

En appliquant le PFD à  $dS$  :

$$\vec{df}_{ext/dS} = dm.\vec{\Gamma}_{M,S/R_g}$$


 FIGURE 10 – Solide  $S$  en mouvement dans un référentiel  $R_g$ .

En intégrant cette relation en moment et en effort sur tout le solide  $S$ , on obtient l'expression du PFD pour les solides rigides.

### 2.3.1 Relation en effort

Les forces extérieures élémentaires sont intégrées<sup>1</sup> sur le solide  $S$  :

$$\int_S \vec{df}_{ext/dS} = \int_S \vec{\Gamma}_{M,S/R_g} \cdot dm$$

$$\Sigma \vec{F}_{ext/S} = \int_S \vec{\Gamma}_{M,S/R_g} \cdot dm$$

Cette première relation est parfois appelée *théorème de la résultante dynamique*.

La quantité  $\int_S \vec{\Gamma}_{M,S/R_g} \cdot dm$  représente la force nécessaire pour modifier le mouvement de translation du solide.

### 2.3.2 Relation en moment<sup>2</sup>

Le moment de la force extérieure élémentaire en un point  $A$  quelconque s'écrit :

$$\vec{dM}_{A,ext/dS} = \vec{dM}_{M,ext/dS} + \vec{df}_{ext/dS} \wedge \vec{MA} = \vec{0} + \vec{df}_{ext/dS} \wedge \vec{MA}$$

On intègre les moments des forces extérieures :

$$\vec{df}_{ext/dS} = dm \cdot \vec{\Gamma}_{M,S/R_g} \Rightarrow \vec{df}_{ext/dS} \wedge \vec{MA} = \vec{\Gamma}_{M,S/R_g} \wedge \vec{MA} \cdot dm$$

$$\Rightarrow \int_S \vec{dM}_{A,ext/dS} = \int_S \vec{\Gamma}_{M,S/R_g} \wedge \vec{MA} \cdot dm$$

$$\Rightarrow \Sigma \vec{M}_{A,ext/S} = \int_S \vec{AM} \wedge \vec{\Gamma}_{M,S/R_g} \cdot dm$$

Cette dernière relation est parfois appelée *théorème du moment dynamique*

1. Voir remarque 1 page 9

2. Voir remarque 2 page 9

Définition : On appelle *moment dynamique* la quantité :

$$\vec{\delta}_{A,S/R_g} = \int_S \overrightarrow{AM} \wedge \vec{\Gamma}_{M,S/R_g} \cdot dm$$

Tout comme la relation en effort, le moment dynamique représente le moment nécessaire pour modifier le mouvement de rotation autour de  $A$  du solide.

Remarque : Cette relation n'apporte pas d'information pour la masse ponctuelle car celle-ci étant infiniment petite, elle ne présente pas d'inertie en rotation autour de son centre. Elle peut toutefois être écrite (pour l'étude du mouvement à force centrale, on utilise par commodité la propriété de conservation du moment cinétique, qui est cette relation en moment intégrée en temps) mais elle est alors redondante avec la relation en effort.

### 2.3.3 Torseur dynamique

L'ensemble des deux quantités  $\left\{ \begin{array}{l} \Sigma \vec{F}_{ext/S} \\ \Sigma \vec{M}_{A,ext/S} \end{array} \right\}$  formant un torseur (le torseur statique),

d'après les deux égalités précédentes, il est naturel que l'ensemble  $\left\{ \begin{array}{l} \int_S \vec{\Gamma}_{M,S/R_g} \cdot dm \\ \int_S \overrightarrow{AM} \wedge \vec{\Gamma}_{M,S/R_g} \cdot dm \end{array} \right\}$

soit aussi un torseur. C'est ce que nous allons vérifier en tachant de déplacer le torseur en un point  $B$  quelconque :

$$\vec{\delta}_{B,S/R_g} = \int_S \overrightarrow{BM} \wedge \vec{\Gamma}_{M,S/R_g} \cdot dm = \int_S (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM}) \wedge \vec{\Gamma}_{M,S/R_g} \cdot dm = \overrightarrow{BA} \wedge \int_S \vec{\Gamma}_{M,S/R_g} \cdot dm + \vec{\delta}_{A,S/R_g}$$

On obtient donc l'égalité :  $\vec{\delta}_{B,S/R_g} = \vec{\delta}_{A,S/R_g} + \int_S \vec{\Gamma}_{M,S/R_g} \cdot dm \wedge \overrightarrow{AB}$  qui est la relation de changement de point du torseur.

Nous pouvons donc définir le *torseur dynamique* :

$$\left\{ \mathcal{D}_{S/R_g} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \int_S \vec{\Gamma}_{M,S/R_g} \cdot dm \\ \vec{\delta}_{A,S/R_g} \end{array} \right\}$$

où  $\int_S \vec{\Gamma}_{M,S/R_g} \cdot dm$  est la résultante du torseur (résultante dynamique) et  $\vec{\delta}_{A,S/R_g}$  le moment en  $A$  du torseur (moment dynamique).

**Remarque 1** : Lors de la sommation des  $\vec{df}_{(S-dS)/dS}$ , d'après le principe des actions réciproques, les forces internes (efforts des autres particules de  $S$  lors de l'isolement d'une particule élémentaire  $dS$ ) s'annulent et seuls restent les efforts de l'extérieur à  $S$  sur  $S$ .

**Remarque 2** : Pourquoi l'intégration du PFD appliqué à la masse ponctuelle ne suffit-elle pas et faut-il y adjoindre l'intégration des moments ?

Remarquons tout d'abord que la phase d'intégration représente une perte considérable d'information : nous avons une infinité d'équations vectorielles valables en tout point du solide et, après intégration en résultante et moment, il n'en reste que 6... C'est en faisant l'hypothèse de corps rigide que nous renonçons au reste de l'information. Si nous voulions étudier les solides déformables ou les fluides, nous n'aurions pas pu diminuer aussi drastiquement l'information. Nous aurions néanmoins émis des hypothèses simplificatrices sur la déformation qui permettent encore une fois de réduire l'information à l'essentiel.

Mais pourquoi 6 équations suffisent-elles à décrire l'essentiel ? La dimension est définie par le mouvement observé : dans le cas des solides rigides, les hypothèses permettent de caractériser le mouvement d'un solide par un torseur cinématique de dimension 6. Le torseur statique qui en découle est de dimension 6 et le PFD appliqué à un solide présente 6 équations scalaires. Vous trouverez une réponse plus détaillée dans la partie C page 40.

## 2.4 Énoncé du PFD pour les solides rigides

En rassemblant les deux équations établies au 2.3.1 et au 2.3.2 pour former une équation torsorielle, on peut écrire le PFD sous une forme simple (qui ressemble à l'expression du PFS pour les solides) :

*Il existe au moins un repère  $R_g$  appelé repère galiléen tel que pour tout solide ou système de solides  $S$  soumis aux seules actions mécaniques extérieures  $\{\mathcal{T}^{ext/S}\}$  :*

$$\{\mathcal{D}_{S/R_g}\} = \{\mathcal{T}^{ext/S}\}$$

C'est à dire :

$$\int_A \begin{Bmatrix} \vec{\Gamma}_{M,S/R_g} \\ \vec{\delta}_{A,S/R_g} \end{Bmatrix} dm = \int_A \begin{Bmatrix} \vec{F}^{ext/S} \\ \vec{M}_{A,ext/S} \end{Bmatrix}$$

Remarque : Lorsque  $S$  est un système de solides de  $n$  solides  $\{S_1, S_2, \dots, S_n\}$ , le torseur dynamique de  $S$  s'écrit :

$$\{\mathcal{D}_{S/R_g}\} = \{\mathcal{D}_{S_1/R_g}\} + \{\mathcal{D}_{S_2/R_g}\} + \dots + \{\mathcal{D}_{S_n/R_g}\}$$

## 2.5 Calcul du torseur dynamique

Le PFD donne une relation directe entre les efforts exercés sur  $S$  et le mouvement de  $S$  par l'intermédiaire du torseur dynamique. Cependant, l'expression du torseur dynamique est complexe car elle nécessite une intégration sur  $S$ . Voyons comment il est possible de simplifier ces intégrales.

**Résultante dynamique**  $\int_S \vec{\Gamma}_{M,S/R_g} \cdot dm$

Cette expression se simplifie par l'intermédiaire du centre de gravité  $G$  de  $S$ .  $G$  se définit par l'une des deux définitions équivalentes :

$$\int_{M \in S} \vec{GM} dm = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{OG} = \frac{1}{m} \int_S \vec{OM} dm$$

En dérivant deux fois par rapport au temps (sachant que la masse est constante) :

$$\frac{d^2 \vec{OG}}{dt^2} / R_g = \frac{1}{m} \frac{d^2}{dt^2} / R_g \int_S \vec{OM} dm$$

Le théorème de transport (issu de la conservation de la masse ; voir partie C.6 page 44) permet d'invertir l'intégrale et la dérivée :

$$m \cdot \vec{\Gamma}_{G,S/R_g} = \int_S \frac{d^2 \vec{OM}}{dt^2} / R_g dm$$

$$m \cdot \vec{\Gamma}_{G,S/R_g} = \int_S \vec{\Gamma}_{M,S/R_g} \cdot dm$$

La résultante dynamique peut donc se calculer facilement en déterminant l'accélération du centre de gravité  $G$ , ce qui représente un simple calcul de cinématique.

**Moment dynamique**  $\vec{\delta}_{A,S/R_g} = \int_S \overrightarrow{AM} \wedge \vec{\Gamma}_{M,S/R_g} \cdot dm$

L'expression du moment dynamique ne se simplifie pas facilement. La suite du cours vise principalement à calculer ce terme (parties 3 et 5).

$\vec{\delta}_{A,S/R_g}$  contient une dérivée seconde en temps. Pour calculer ce terme, nous allons introduire dans le paragraphe suivant le torseur cinétique qui représente une dérivée première en temps et nous verrons comment calculer  $\vec{\delta}_{A,S/R_g}$  à l'aide de ce nouveau torseur.

L'expression la plus simple du torseur dynamique est donc :

$$\boxed{\left\{ \mathcal{D}_{S/R_g} \right\} = \underset{A}{\left\{ \begin{array}{l} m \cdot \vec{\Gamma}_{G,S/R_g} \\ \vec{\delta}_{A,S/R_g} \end{array} \right\}}$$

Remarque : on peut calculer le torseur dynamique par rapport à n'importe quel repère  $R$ . En pratique, ce torseur étant utilisé pour écrire le PFD, le repère de référence sera toujours choisi galiléen.

### 3 Torseur cinétique

Le torseur cinétique est principalement utilisé comme un intermédiaire de calcul permettant d'obtenir le torseur dynamique. Il est aussi utilisé pour calculer l'énergie cinétique d'un solide rigide.

#### 3.1 Définition du torseur cinétique

On appelle *torseur cinétique* la quantité :

$$\left\{ \mathcal{C}_{S/R_g} \right\} = \underset{A}{\left\{ \begin{array}{l} \int_S \vec{V}_{M,S/R_g} \cdot dm \\ \int_S \overrightarrow{AM} \wedge \vec{V}_{M,S/R_g} \cdot dm \end{array} \right\}}$$

Cette expression est l'analogue de la définition initiale du torseur dynamique en remplaçant l'accélération par la vitesse (d'où le nom *cinétique*). C'est donc bien une expression en dérivée première par rapport au temps (le torseur dynamique est une dérivée seconde en temps).

On peut montrer de manière similaire que c'est bien un champ de torseur et que le torseur cinétique se simplifie sous la forme :

$$\boxed{\left\{ \mathcal{C}_{S/R_g} \right\} = \underset{A}{\left\{ \begin{array}{l} m \cdot \vec{V}_{G,S/R_g} \\ \vec{\sigma}_{A,S/R_g} \end{array} \right\}}$$

où  $\vec{\sigma}_{A,S/R_g}$  est le moment cinétique.

Rappelons alors la formule de changement de point appliquée au torseur cinétique :

$$\vec{\sigma}_{B,S/R_g} = \vec{\sigma}_{A,S/R_g} + m \cdot \vec{V}_{G,S/R_g} \wedge \overrightarrow{AB}$$

Le torseur dynamique représentait l'action mécanique nécessaire pour modifier le mouvement du solide. Le torseur cinétique représente la quantité de mouvement du solide : la résultante  $m \cdot \vec{V}_{G,S/R_g}$  représente la quantité de mouvement en translation (expression bien connue en mécanique du point) tandis que  $\vec{\sigma}_{A,S/R_g}$  représente la quantité de mouvement du solide en rotation autour de  $A$ .

Le torseur dynamique est la "dérivée en temps" du torseur cinétique (la variation de la quantité de mouvement du solide). Nous verrons qu'effectivement, si le point de réduction  $A$  est fixe (donc indépendant du temps), il suffit de dériver les deux vecteurs du torseur pour obtenir le torseur dynamique. Mais, bien sûr, si  $A$  est en mouvement, la dérivation est un peu plus complexe.

### 3.2 Calcul du torseur dynamique à l'aide du torseur cinétique

On suppose connu le torseur cinétique  $\left\{ \mathcal{C}_{S/R_g} \right\}_A = \left\{ \begin{matrix} m \cdot \vec{V}_{G,S/R_g} \\ \vec{\sigma}_{A,S/R_g} \end{matrix} \right\}$ .

Comment déterminer le torseur dynamique :  $\left\{ \mathcal{D}_{S/R_g} \right\}_A = \left\{ \begin{matrix} m \cdot \vec{\Gamma}_{G,S/R_g} \\ \vec{\delta}_{A,S/R_g} \end{matrix} \right\}$  ?

#### 3.2.1 Résultante dynamique

Le calcul de la résultante dynamique est évident puisqu'il s'agit d'une simple dérivation de vecteur :

$$m \cdot \vec{\Gamma}_{M,S/R_g} = m \cdot \frac{d\vec{V}_{G,S/R_g}}{dt} / R_g = \frac{d}{dt} / R_g \left( m \cdot \vec{V}_{G,S/R_g} \right)$$

#### 3.2.2 Moment dynamique

La démonstration de la formule permettant de calculer  $\vec{\delta}_{A,S/R_g}$  en fonction du torseur cinétique présente quelques manipulations à voir au moins une fois. Il n'est cependant pas nécessaire de savoir la refaire.

Le principe du calcul est de partir de la définition de  $\vec{\delta}_{A,S/R_g}$  puis d'exprimer l'intégrale en fonction de vitesses uniquement (et non plus d'accélération) puisque le torseur cinétique contient des masses et des vitesses.

$$\vec{\delta}_{A,S/R_g} = \int_S \overrightarrow{AM} \wedge \vec{\Gamma}_{M,S/R_g} \cdot dm = \int_S \overrightarrow{AM} \wedge \frac{d\vec{V}_{M,S/R_g}}{dt} / R_g$$

La dérivation du produit (vectoriel) s'écrit :

$$\frac{d}{dt} / R_g \left( \overrightarrow{AM} \wedge \vec{V}_{M,S/R_g} \right) = \frac{d\overrightarrow{AM}}{dt} / R_g \wedge \vec{V}_{M,S/R_g} + \underbrace{\overrightarrow{AM} \wedge \frac{d\vec{V}_{M,S/R_g}}{dt} / R_g}_{\text{terme de l'intégrale}}$$

On en déduit :

$$\vec{\delta}_{A,S/R_g} = \underbrace{\int_S \frac{d}{dt} / R_g \left( \overrightarrow{AM} \wedge \vec{V}_{M,S/R_g} \right) \cdot dm}_{\text{1er terme}} - \underbrace{\int_S \frac{d\overrightarrow{AM}}{dt} / R_g \wedge \vec{V}_{M,S/R_g} \cdot dm}_{\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA}}$$

Le théorème de transport permet d'échanger l'intégrale et la dérivée dans le 1er terme.

$$\vec{\delta}_{A,S/R_g} = \frac{d}{dt}/R_g \underbrace{\int_S \vec{AM} \wedge \vec{V}_{M,S/R_g} \cdot dm}_{\vec{\sigma}_{A,S/R_g}} - \int_S \underbrace{\frac{d\vec{OM}}{dt}/R_g \wedge \vec{V}_{M,S/R_g}}_{\vec{V}_{M,S/R_g} \wedge \vec{V}_{M,S/R_g} = \vec{0}} \cdot dm + \int_S \underbrace{\frac{d\vec{OA}}{dt}/R_g}_{\vec{V}_{A,A/R_g}} \wedge \vec{V}_{M,S/R_g} \cdot dm$$

Sachant que la vitesse  $\vec{V}_{A,A/R_g}$ , est indépendante du point d'intégration, ce terme peut être sorti de l'intégrale.

$$\vec{\delta}_{A,S/R_g} = \frac{d\vec{\sigma}_{A,S/R_g}}{dt}/R_g + \vec{V}_{A,A/R_g} \wedge \underbrace{\int_S \vec{V}_{M,S/R_g} \cdot dm}_{m \cdot \vec{V}_{G,S/R_g}}$$

D'où la formule, À RETENIR !

$$\vec{\delta}_{A,S/R_g} = \frac{d\vec{\sigma}_{A,S/R_g}}{dt}/R_g + \vec{V}_{A,A/R_g} \wedge m \cdot \vec{V}_{G,S/R_g}$$

**Remarque 1 :**  $\vec{V}_{A,A/R_g}$  est la *vitesse géométrique* du point A. Ce n'est pas  $\vec{V}_{A,S/R_g}$  car A peut avoir un mouvement indépendant de S (A est le point de réduction du torseur).

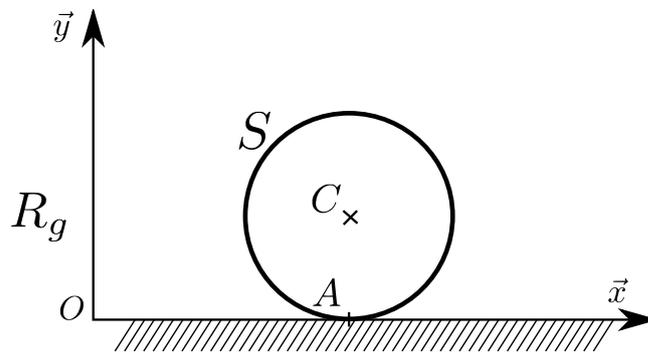


FIGURE 11 – Cylindre roulant sans glisser sur le sol.

Par exemple pour un cylindre S roulant sans glisser sur le sol en A, la vitesse  $\vec{V}_{A,S/R_g} = \vec{0}$  tandis que  $\vec{V}_{A,A/R_g} \neq \vec{0}$  puisque le point de contact se déplace. A n'est attaché ni au sol, ni au cylindre. C'est un point géométrique et non pas un point matériel.

**Remarque 2 :** Simplification de la formule dans des cas particuliers :

Le second terme s'annule, c'est à dire  $\vec{\delta}_{A,S/R_g} = \frac{d\vec{\sigma}_{A,S/R_g}}{dt}/R_g$  dans les cas particuliers suivant :

- si A est un **point fixe** dans  $R_g$ , alors  $\vec{V}_{A,A/R_g} = \vec{0}$  et le second terme est s'annule.
- si  $A = G$ , c'est à dire si on cherche  $\vec{\delta}_{G,S/R_g}$ , alors  $\vec{V}_{A,A/R_g} = \vec{V}_{G,S/R_g}$  et  $\vec{V}_{G,S/R_g} \wedge m \cdot \vec{V}_{G,S/R_g} = \vec{0}$  (vecteurs colinéaires).

Ces cas particuliers nous conduiront très souvent à préférer les **points fixes** ou le **point G** pour mener le calcul du torseur dynamique.

### 3.3 Calcul du torseur cinétique : matrice d'inertie

Le calcul de la résultante cinétique  $m \cdot \vec{V}_{G,S/R_g}$  est évident puisqu'il s'agit d'un calcul de cinématique.

Le calcul de  $\vec{\sigma}_{A,S/R_g} = \int_S \overrightarrow{AM} \wedge \vec{V}_{M,S/R_g} \cdot dm$  est nettement plus complexe car c'est une intégrale sur le solide. Ce calcul ne semble d'ailleurs pas beaucoup plus simple que le calcul de  $\vec{\delta}_{A,S/R_g}$  a priori !

Et pourtant nous pouvons maintenant profiter d'une propriété du champ de vitesse  $\vec{V}_{M,S/R_g}$  : c'est un champ de torseur et nous pouvons exprimer  $\vec{V}_{M,S/R_g}$  en fonction des quantités globales :  $\vec{V}_{A,S/R_g}$  et  $\vec{\Omega}_{S/R_g}$ .

Les calculs sont détaillés ci-dessous mais ne présentent pas d'intérêt particulier. Nous attacherons plus d'importance à l'utilisation de la formule qui en résulte.

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}_{A,S/R_g} &= \int_S \overrightarrow{AM} \wedge \vec{V}_{M,S/R_g} \cdot dm = \int_S \overrightarrow{AM} \wedge \left( \vec{V}_{A,S/R_g} + \vec{\Omega}_{S/R_g} \wedge \overrightarrow{AM} \right) \cdot dm \\ \vec{\sigma}_{A,S/R_g} &= \int_S \overrightarrow{AM} \wedge \vec{V}_{A,S/R_g} \cdot dm + \int_S \overrightarrow{AM} \wedge \left( \vec{\Omega}_{S/R_g} \wedge \overrightarrow{AM} \right) \cdot dm \\ \vec{\sigma}_{A,S/R_g} &= \left( \int_S \overrightarrow{AM} \cdot dm \right) \wedge \vec{V}_{A,S/R_g} + \int_S \overrightarrow{AM} \wedge \left( \vec{\Omega}_{S/R_g} \wedge \overrightarrow{AM} \right) \cdot dm \end{aligned}$$

On retrouve la définition du centre de gravité, d'où la relation :

$$\vec{\sigma}_{A,S/R_g} = \int_S \overrightarrow{AM} \wedge \left( \vec{\Omega}_{S/R_g} \wedge \overrightarrow{AM} \right) \cdot dm + m \cdot \overrightarrow{AG} \wedge \vec{V}_{A,S/R_g}$$

On remarque que  $\vec{\Omega}_{S/R_g}$  est un vecteur constant dans l'intégrale de gauche (il ne dépend pas du point  $M$  d'intégration). L'intégration et le produit vectoriel sont des opérateurs linéaires. Il est donc possible de définir une *application linéaire*  $\mathcal{L}$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ \vec{\Omega}_{S/R_g} &\longrightarrow \mathcal{L}(\vec{\Omega}_{S/R_g}) = \int_S \overrightarrow{AM} \wedge \left( \vec{\Omega}_{S/R_g} \wedge \overrightarrow{AM} \right) \cdot dm \end{aligned}$$

D'autre part, une application linéaire de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}^3$  peut être caractérisée par une matrice. Il existe donc une matrice  $I_{A,S}$ , dépendant uniquement du solide  $S$  et du point  $A$  telle que :

$$\mathcal{L}(\vec{\Omega}_{S/R_g}) = I_{A,S} \cdot \vec{\Omega}_{S/R_g}$$

$I_{A,S}$  est une matrice  $3 \times 3$  appelée *matrice d'inertie*. Chacun de ses termes est homogène à des  $kg \cdot m^2$ .

C'est une matrice *symétrique définie positive* pour tout solide non réduit à un point ou une droite (dans ce cas particulier, elle n'est plus définie).

Le moment cinétique s'exprime alors de manière simple :

$$\boxed{\vec{\sigma}_{A,S/R_g} = I_{A,S} \cdot \vec{\Omega}_{S/R_g} + m \cdot \overrightarrow{AG} \wedge \vec{V}_{A,S/R_g}}$$

La partie 5 a pour seul objet le calcul des caractéristiques d'inertie d'un solide et en particulier le calcul de la matrice d'inertie  $I_{A,S}$ .

**Remarque :** Simplification de la formule dans les cas particuliers.

Le second terme s'annule, c'est à dire  $\vec{\sigma}_{A,S/R_g} = I_{A,S} \cdot \vec{\Omega}_{S/R_g}$  dans les cas particuliers suivants :

- si  $A$  appartenant à  $S$  est un **point fixe** dans  $R_g$ , alors  $\vec{V}_{A,S/R_g} = \vec{0}$  et le second terme est s'annule.
  - si  $\mathbf{A} = \mathbf{G}$ , c'est à dire si on cherche  $\vec{\sigma}_{G,S/R_g}$ , alors  $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{GG}$  et le second terme s'annule.
- Tout comme pour le calcul de  $\vec{\delta}_{A,S/R_g}$ , choisir un **point fixe** ou le **point G** conduit à des simplifications du calcul de  $\vec{\sigma}_{A,S/R_g}$ .

## 4 Exemple : micro-compresseur

Reprenons l'exemple du micro-compresseur. On souhaite déterminer les efforts transmis au bâti. Il s'agit pour cela de modéliser les actions mécaniques transmissibles par chacune des liaisons, de définir le mouvement du système et d'appliquer le PDF à chacune des pièces. Par soucis de progressivité, nous isolerons successivement les solides 3, 1 puis 2.

La figure 13 donne un schéma cinématique du mécanisme. Le vilebrequin (c'est à dire la manivelle de ce système "bielle-manivelle") est noté 1, la bielle est notée 2 et le piston est noté 3. Le bâti est noté 0. À chaque solide est associé un repère :

- $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  est associé au bâti 0,
  - $R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$ , associé au vilebrequin 1, est en rotation par rapport à  $R_0$  autour de  $(O, \vec{z}_0)$ ,
  - $R_3(B, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ , associé au piston 3, est en translation par rapport à  $R_0$  suivant  $\vec{y}_0$ ,
  - $R_2(B, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_0)$ , associé à la bielle 2, est en rotation par rapport à  $R_3$  autour de  $(B, \vec{z}_0)$ .
- On pose :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OA} &= R.\vec{x}_1 & \overrightarrow{BG}_3 &= d_3.\vec{y}_0 \\ \overrightarrow{AB} &= L.\vec{y}_2 & \overrightarrow{AG}_1 &= d_1.\vec{x}_1 \\ \overrightarrow{OB} &= \lambda(t).\vec{y}_0 & \overrightarrow{AG}_2 &= d_2.\vec{y}_2 \end{aligned}$$

Les matrices d'inertie des solides 1 et 2 sont :

$$I_{O,1} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & -E_1 \\ 0 & B_1 & 0 \\ -E_1 & 0 & C_1 \end{pmatrix}_{B_1} \quad I_{A,2} = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{pmatrix}_{B_2}$$

Les masses des trois solides sont notées  $m_1, m_2$  et  $m_3$ . Le poids est négligé.

*Isoler le solide 3 et exprimer le PFD sous forme torsorielle. Poser la forme des torseurs d'action mécanique, calculer le torseur dynamique et en déduire les 6 équations du PFD dans la base  $B_0$ .*

*Isoler le solide 1 et exprimer le PFD sous forme torsorielle. Poser la forme des torseurs d'action mécanique, calculer le torseur dynamique et en déduire les 6 équations du PFD dans la base  $B_0$ .*

*Isoler le solide 2 et exprimer le PFD sous forme torsorielle. Poser la forme des torseurs d'action mécanique, calculer le torseur dynamique et en déduire les 6 équations du PFD dans la base  $B_2$ .*

*Déduire des équations précédentes l'action globale transmise au bâti et montrer le caractère vibratoire de la sollicitation.*

## 5 Caractéristiques d'inertie des solides

Nous avons pu voir dans les deux précédents chapitres comment déterminer les torseurs cinétiques puis dynamiques sans faire d'intégration, par les relations :

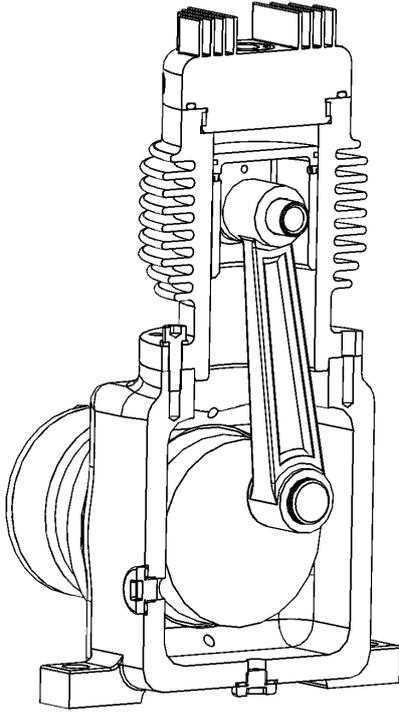


FIGURE 12 – Écorché.

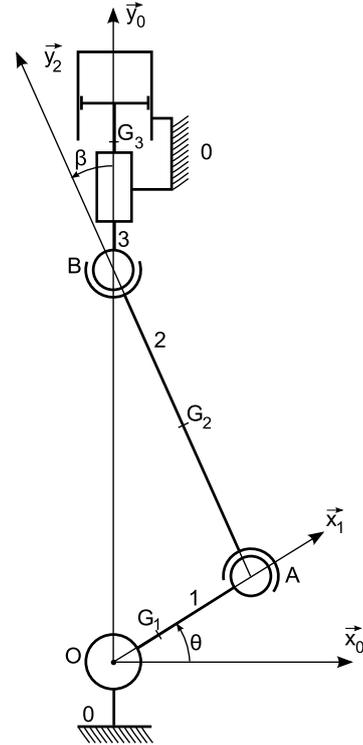


FIGURE 13 – Schéma cinématique du micro-compresseur.

$$\{C_{S/R_g}\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{\sigma}_{A,S/R_g} = I_{A,S} \cdot \vec{\Omega}_{S/R_g} + m \cdot \vec{AG} \wedge \vec{V}_{A,S/R_g} \\ m \cdot \vec{V}_{G,S/R_g} \end{array} \right\}$$

$$\{D_{S/R_g}\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{\delta}_{A,S/R_g} = \frac{d\vec{\sigma}_{A,S/R_g}}{dt} / R_g + \vec{V}_{A,A/R_g} \wedge m \cdot \vec{V}_{G,S/R_g} \\ m \cdot \vec{\Gamma}_{G,S/R_g} \end{array} \right\}$$

Les intégrations sur le solide résident dans les caractéristiques d'inertie  $m$  et  $I_{A,S}$ . Ces grandeurs ne dépendant que de la géométrie et de la répartition de masse du solide, elles sont calculées une fois pour toute.

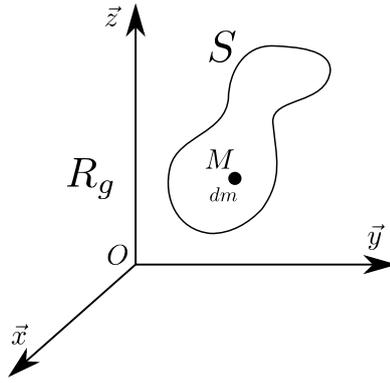
## 5.1 Masse et centre de gravité

On rappelle les définitions bien connues :

**Masse :** 
$$m = \int_S dm = \int_S \rho(M) \cdot dV$$

Remarquons que la masse volumique  $\rho(M)$  n'est pas nécessairement constante sur le solide et dépend *a priori* du point  $M$ .

**Centre de gravité G :** 
$$\vec{OG} = \frac{1}{m} \int_S \vec{OM} \cdot dm = \frac{1}{m} \int_S \vec{OM} \cdot \rho(M) \cdot dV$$


 FIGURE 14 – Solide de masse volumique  $\rho(M)$ .

## 5.2 Matrice d'inertie

La matrice d'inertie  $I_{A,S}$  est une matrice  $3 \times 3$  symétrique. Pour cette raison, elle est souvent écrite sous la forme :

$$I_{A,S} = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}_{R_S}$$

Les vecteurs de la base n'étant pas explicitement indiqués dans la matrice, il est nécessaire de spécifier le repère utilisé en bas à droite.  $I_{A,S}$  dépendant de la géométrie du solide  $S$ ,  $R_S$  est généralement un repère accroché au solide (ie fixe par rapport au solide).

Les termes de la diagonale  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont appelés les *moments d'inertie* tandis que les termes hors diagonale  $-D$ ,  $-E$  et  $-F$  sont appelés *produits d'inertie*. Le choix des signes devant  $-D$ ,  $-E$  et  $-F$  se justifiera par la suite.

Par définition,  $I_{A,S}$  est telle que pour tout vecteur  $\vec{\Omega}$ ,

$$I_{A,S} \cdot \vec{\Omega} = \int_S \overrightarrow{AM} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{AM}) \cdot dm$$

Pour calculer chacun des termes de la matrice, il suffit de les identifier pour des  $\vec{\Omega}$  particuliers (par exemple les vecteurs de base). Commençons par le cas où  $\vec{\Omega} = \vec{x}$ .

$$I_{A,S} \cdot \vec{\Omega} = \int_S \overrightarrow{AM} \wedge (\vec{x} \wedge \overrightarrow{AM}) \cdot dm$$

Posons le vecteur  $\overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{R_S}$  où  $x$ ,  $y$  et  $z$  sont des variables d'intégration dans  $R'_S(A, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ .

$$\begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}_{R_S} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{R_S} = \int_S \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{R_S} \wedge \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{R_S} \wedge \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{R_S} \right] \cdot dm$$

Une fois les produits effectués, il reste :

$$\begin{pmatrix} A \\ -F \\ -E \end{pmatrix}_{R_S} = \int_S \begin{pmatrix} y^2 + z^2 \\ -x \cdot y \\ -x \cdot z \end{pmatrix}_{R_S} \cdot dm$$

D'où les expressions de  $A$ ,  $F$  et  $E$  :

$$\begin{cases} A = \int_S (y^2 + z^2).dm \\ F = \int_S x.y.dm \\ E = \int_S x.z.dm \end{cases}$$

En répétant l'opération pour  $\vec{\Omega} = \vec{y}$  puis  $\vec{\Omega} = \vec{z}$ , on obtient les définitions de chaque terme de  $I_{A,S}$ .

$$I_{A,S} = \begin{pmatrix} A = \int_S (y^2 + z^2).dm & -F = - \int_S x.y.dm & -E = - \int_S x.z.dm \\ -F = - \int_S x.y.dm & B = \int_S (x^2 + z^2).dm & -D = - \int_S y.z.dm \\ -E = - \int_S x.z.dm & -D = - \int_S y.z.dm & C = \int_S (x^2 + y^2).dm \end{pmatrix}_{R_S}$$

### 5.3 Base principale d'inertie

La matrice d'inertie est symétrique définie positive. Elle peut donc être diagonalisée. Il existe une base  $B_0$  telle que dans cette base :

$$I_{A,S} = \begin{pmatrix} A_0 & 0 & 0 \\ 0 & B_0 & 0 \\ 0 & 0 & C_0 \end{pmatrix}_{B_0}$$

Les moments d'inertie  $A_0$ ,  $B_0$  et  $C_0$  sont appelés *moments principaux d'inertie* et la base  $B_0$  *base principale d'inertie*. Nous verrons par la suite que les symétries du solide permettent de faire apparaître les axes de la base principale d'inertie.

### 5.4 Calcul des termes de la matrice – Exemple

Le calcul des termes est un simple calcul mathématique d'intégration sur un volume. Nous proposons de traiter un exemple simple : un pavé de hauteur  $b$  à base carrée de côté  $a$  et de masse volumique constante  $\rho$ .

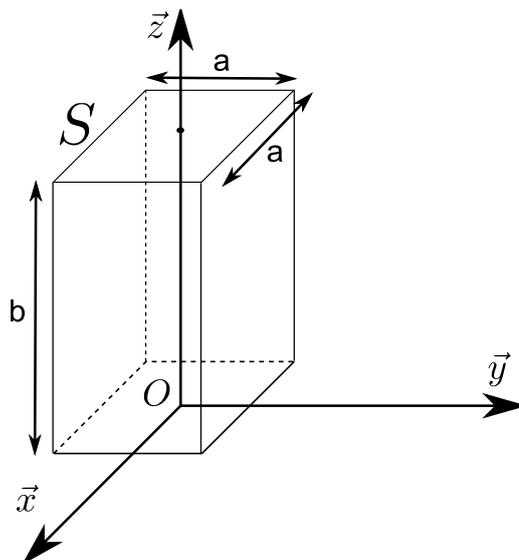


FIGURE 15 – Pavé à base carrée – Paramétrage.

On recherche la matrice d'inertie :  $I_{O,S} = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}_R$

La masse élémentaire s'écrit :  $dm = \rho.dV = \rho.dx.dy.dz$

**Termes diagonaux :**

$$A = \int_S (y^2 + z^2).dm = \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-a/2}^{a/2} \int_0^b (y^2 + z^2).\rho.dz.dy.dx$$

Après calcul de l'intégrale triple, on obtient :

$$A = \rho.a^2.b \left( \frac{a^2}{12} + \frac{b^2}{3} \right) = m. \left( \frac{a^2}{12} + \frac{b^2}{3} \right)$$

$A$  est le moment d'inertie autour de l'axe  $\vec{x}$ .  $A$  est toujours non nul sauf si  $a = b = 0$ , c'est à dire si le solide est réduit à une masse ponctuelle.  $A$  sera toujours non nul dès qu'il existe de la masse à une distance non nulle de l'axe  $(O, \vec{x})$ . En effet, la masse excentrée conduit, lors d'une rotation autour de  $(O, \vec{x})$  à une inertie en rotation.

De même,  $B$  sera non nul s'il existe de la masse excentrée de l'axe  $(O, \vec{y})$  et  $C$  sera non nul s'il existe de la masse excentrée de l'axe  $(O, \vec{z})$ .

**Termes hors diagonale :**

Le calcul de  $D$  conduit à une valeur nulle :

$$D = \int_S y.z.dm = \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-a/2}^{a/2} \int_0^b y.z.\rho.dz.dy.dx = \dots = 0$$

Ce résultat particulier apparaît lors de l'intégration en  $y$  et provient de la symétrie de  $S$  par rapport au plan  $(O, \vec{x}, \vec{z})$ . Nous pouvons prévoir ce résultat dès le début du calcul, en séparant l'intégration en deux intégrales sur  $S^+$  et  $S^-$ , les deux moitiés de solides de part et d'autre du plan de symétrie  $(O, \vec{x}, \vec{z})$ .

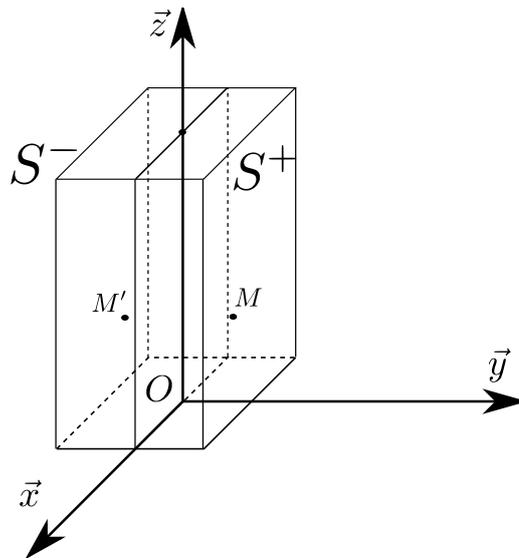


FIGURE 16 – Découpage de l'intégration sur  $S^+$  et  $S^-$ .

$$D = \int_{S^+} y.z.dm + \int_{S^-} y.z.dm$$

Or, à chaque point  $M(x, y, z)$  de  $S^+$ , il est possible d'associer un point  $M'(x, -y, z)$  car le solide est symétrique par rapport à  $(O, \vec{x}, \vec{z})$ .

On peut donc ré-écrire l'expression de  $D$  :

$$D = \int_{S^+} y.z.dm + \int_{S^+} -y.z.dm = 0$$

Remarquons que cette même symétrie par rapport au plan  $(O, \vec{x}, \vec{z})$  conduit à :

$$F = \int_S y.x.dm = \int_{S^+} y.x.dm + \int_{S^+} -y.x.dm = 0$$

D'une manière générale, tout plan de symétrie de la pièce (passant par le point de calcul de la matrice) conduit à deux produits d'inertie nuls dans la matrice. Par la symétrie de plan  $(O, \vec{x}, \vec{z})$ , les deux termes contenant  $y$  sont nuls.

En remarquant la seconde symétrie de  $S$  par rapport au plan  $(O, \vec{y}, \vec{z})$ , on peut déduire de la même manière :

$$E = \int_S x.z.dm = 0$$

Ainsi, si les plans de la base forment deux plans de symétrie du solide, alors les produits d'inertie sont tous nuls et la base est une base principale d'inertie.

## 5.5 Théorème de Huygens

Le théorème de Huygens propose une formule permettant de lier les matrices d'inerties en  $G$  (centre de gravité) et en un point  $A$  quelconque. C'est un changement de point pour la matrice.

$$I_{A,S} = I_{G,S} + I_A^H$$

où  $I_A^H$  est une matrice complémentaire telle que si  $\vec{GA} = (a, b, c)$ ,

$$I_A^H = m \cdot \begin{pmatrix} b^2 + c^2 & -ab & -ac \\ -ab & a^2 + c^2 & -bc \\ -ac & -bc & a^2 + b^2 \end{pmatrix}_R$$

Attention : cette relation ne permet pas de passer d'un point  $A$  quelconque à un point  $B$  quelconque. Il faut pour cela **passer par le point G** :  $I_{B,S} = I_{G,S} + I_B^H = I_{A,S} - I_A^H + I_B^H$

## 5.6 Matrices d'inertie de quelques géométries simples

Dans l'industrie, le calcul des éléments d'inertie n'est jamais fait à la main. Les logiciels de CAO comme SolidWorks permettent d'obtenir immédiatement les caractéristiques d'inertie d'un solide, quelle que soit la complexité de la géométrie.

Toutefois, il est parfois utile de savoir évaluer grossièrement la matrice d'inertie d'un solide, à partir d'un assemblage de géométries simples. C'est pourquoi nous allons donner les matrices d'inertie de quelques formes géométriques.

Le programme de CPGE précise qu'il ne doit pas y avoir d'évaluation sur un calcul de matrice d'inertie :

*Les calculs des éléments d'inertie (matrice d'inertie, centre d'inertie) ne donnent pas lieu à évaluation.*

*La relation entre la forme de la matrice d'inertie et la géométrie de la pièce est exigible.*

On trouve cependant parfois des questions simples à ce propos dans les sujets de concours, dans l'esprit de l'exemple du paragraphe 5.7.

5.6.1 Pavé

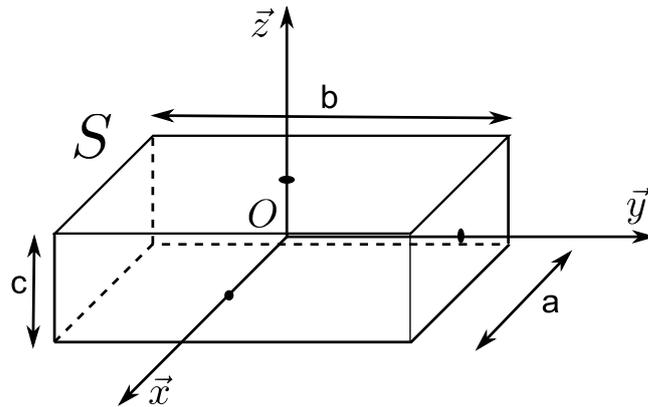


FIGURE 17 – Paramétrage du pavé.

La matrice d'inertie du pavé paramétré figure 17 vaut :

$$I_{O,S} = \begin{pmatrix} m \cdot \frac{b^2+c^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & m \cdot \frac{a^2+c^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & m \cdot \frac{a^2+b^2}{12} \end{pmatrix}_{R_S}$$

Remarquez qu'il est possible d'en déduire la matrice d'inertie d'une plaque rectangulaire en prenant  $c = 0$  par exemple. De même, on en déduit la matrice d'inertie d'une tige d'axe  $\vec{z}$  en prenant  $a = b = 0$ .

Le théorème de Huygens permet d'obtenir la matrice en tout autre point.

5.6.2 Cylindre

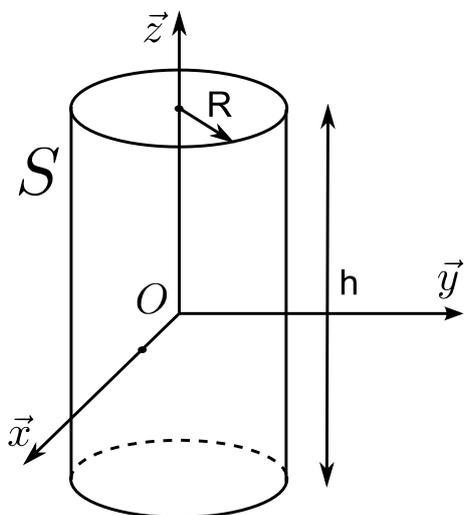


FIGURE 18 – Paramétrage du cylindre.

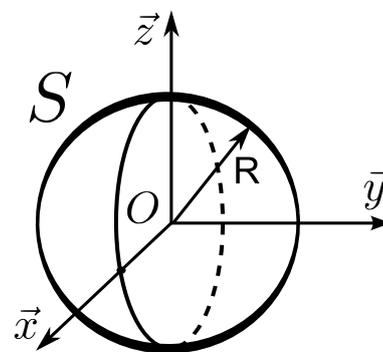


FIGURE 19 – Paramétrage de la sphère.

La matrice d'inertie du cylindre paramétré figure 18 vaut :

$$I_{O,S} = \begin{pmatrix} m \cdot \left( \frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{12} \right) & 0 & 0 \\ 0 & m \cdot \left( \frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{12} \right) & 0 \\ 0 & 0 & m \cdot \frac{R^2}{2} \end{pmatrix}_{R_S}$$

Remarquez qu'en prenant  $R = 0$ , on retrouve l'expression de la matrice d'inertie d'une tige.

Pour obtenir la matrice d'inertie d'un cylindre creux, il suffit de soustraire à la matrice d'inertie du cylindre plein, la matrice correspondant à la matière enlevée :

$$I_{O,\text{cylindre creux}} = I_{O,\text{cylindre plein}} - I_{O,\text{trou}}$$

### 5.6.3 Sphère

La matrice d'inertie de la sphère paramétrée figure 19 vaut :

$$I_{O,S} = \begin{pmatrix} 2 \cdot m \cdot \frac{R^2}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 2 \cdot m \cdot \frac{R^2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \cdot m \cdot \frac{R^2}{5} \end{pmatrix}_{R_S}$$

## 5.7 Exemple : matrice d'inertie du vilebrequin et de la bielle



FIGURE 20 - .

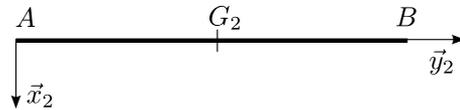


FIGURE 21 - .

En approximant la bielle à une tige de section très petite devant sa longueur, déterminer sa matrice d'inertie en A. Pour cela, calculez l'intégrale, puis vous vérifiez le résultat grâce au formulaire.

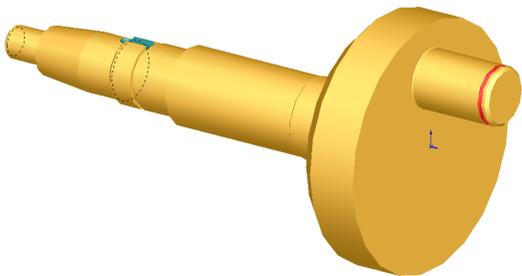


FIGURE 22 - .

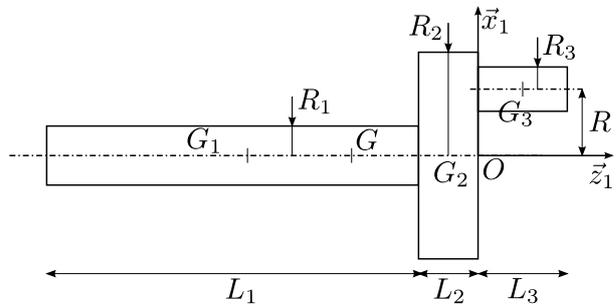


FIGURE 23 - .

En considérant la pièce 1 comme un assemblage de 3 cylindres, déterminez sa matrice d'inertie en O en utilisant le formulaire.

## 6 Puissances et théorème de l'énergie cinétique

L'approche énergétique d'un mécanisme permet de prendre un point de vue macroscopique, en observant les flux d'énergie.

L'énergie présente la bonne propriété de se conserver. Elle peut prendre plusieurs formes : mécanique, hydraulique, électrique... Elle permet d'aborder de façon simple la notion de rendement d'une machine.

Vous trouverez en annexe dans la partie C page 40 un développement complet sur l'approche énergétique en mécanique des solides. L'objectif de cette partie est d'aborder simplement les notions au programme de CPGE.

### 6.1 Puissance développée par une action mécanique

#### 6.1.1 Définition

On note  $P_{\Sigma/S,S/R}$  la puissance développée par l'action mécanique d'un système  $\Sigma$  sur le solide  $S$ ,  $\{\mathcal{T}_{\Sigma/S}\}$ , dans le mouvement du solide  $S$  par rapport au référentiel  $R$   $\{\mathcal{V}_{S/R}\}$ .

Cette puissance se calcule comme le comoment du torseur d'action mécanique par le torseur cinétique :

$$P_{\Sigma/S,S/R} = \{\mathcal{T}_{\Sigma/S}\} \otimes \{\mathcal{V}_{S/R}\}$$

La puissance est une grandeur scalaire exprimée en Watt (W).

Le comoment est un produit en croix : si on note les deux torseurs :

$$\{\mathcal{T}_{\Sigma/S}\} = \underset{A}{\left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_{\Sigma/S} \\ \vec{M}_{A,\Sigma/S} \end{array} \right\}} \quad \{\mathcal{V}_{S/R}\} = \underset{A}{\left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}_{S/R} \\ \vec{V}_{A,S/R} \end{array} \right\}}$$

Alors le comoment s'écrit :

$$P_{\Sigma/S,S/R} = \{\mathcal{T}_{\Sigma/S}\} \otimes \{\mathcal{V}_{S/R}\} = \underset{A}{\left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_{\Sigma/S} \\ \vec{M}_{A,\Sigma/S} \end{array} \right\}} \otimes \underset{A}{\left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}_{S/R} \\ \vec{V}_{A,S/R} \end{array} \right\}} = \vec{R}_{\Sigma/S} \cdot \vec{V}_{A,S/R} + \vec{M}_{A,\Sigma/S} \cdot \vec{\Omega}_{S/R}$$

Attention : pour réaliser ce produit en croix, il faut que les deux torseurs soient réduits au **même point**.

La puissance des actions mécaniques intervient dans l'expression du théorème de l'énergie cinétique.

#### 6.1.2 Exemple sur le micro-compresseur

L'action de l'air sous pression sur le piston peut être modélisée par un glisseur sous la forme :

$$\{\mathcal{T}_{\text{air}/3}\} = \underset{B}{\left\{ \begin{array}{c} -F_{\text{air}} \cdot \vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}}$$

Le mouvement du piston est une translation :

$$\{\mathcal{V}_{3/0}\} = \underset{B}{\left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ \lambda \cdot \vec{y}_0 \end{array} \right\}}$$

La puissance développée par l'action de l'air sur le piston, dans le mouvement du piston par rapport au bâti, vaut :

$$P_{air/3,3/0} = {}_B \left\{ \begin{array}{c} -F_{air} \cdot \vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\} \otimes {}_B \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ \dot{\lambda} \cdot \vec{y}_0 \end{array} \right\} = -F_{air} \cdot \vec{y}_0 \cdot \dot{\lambda} \cdot \vec{y}_0 + 0 = -F_{air} \cdot \dot{\lambda}$$

On retrouve un résultat bien connu en mécanique du point.

Considérons maintenant l'action du moteur sur le vilebrequin. Cette action peut être modélisée par un couple sous la forme :

$$\{ \mathcal{T}_{moteur/1} \} = {}_O \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ C_{mot} \cdot \vec{z}_0 \end{array} \right\}$$

Le mouvement du vilebrequin est une rotation :

$$\{ \mathcal{V}_{1/0} \} = {}_O \left\{ \begin{array}{c} \omega \cdot \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}$$

La puissance développée par l'action du moteur sur le vilebrequin, dans le mouvement du vilebrequin par rapport au bâti, vaut :

$$P_{moteur/1,1/0} = {}_O \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ C_{mot} \cdot \vec{z}_0 \end{array} \right\} \otimes {}_O \left\{ \begin{array}{c} \omega \cdot \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\} = C_{mot} \cdot \omega$$

### 6.1.3 Puissance des inter-efforts

La puissance des inter-efforts  $P_{1/2,2/1}$  entre un solide 1 et un solide 2 est définie par :

$$P_{1/2,2/1} = \{ \mathcal{T}_{1/2} \} \otimes \{ \mathcal{V}_{2/1} \}$$

Cette puissance représente la *puissance dissipée par la liaison* entre les deux solides.

Cette puissance sera utilisée pour calculer la puissance des efforts intérieurs dans le théorème de l'énergie cinétique.

**Puissance dissipée par une liaison parfaite** Considérons le cas d'une liaison pivot d'axe  $(A, \vec{z})$  entre deux solides 1 et 2 :

$$\{ \mathcal{T}_{1/2} \} = {}_A \left\{ \begin{array}{c} X\vec{x} + Y\vec{y} + Z\vec{z} \\ L\vec{x} + M\vec{y} \end{array} \right\} \quad \{ \mathcal{V}_{2/1} \} = {}_A \left\{ \begin{array}{c} \omega \vec{z} \\ \vec{0} \end{array} \right\}$$

La puissance dissipée par la liaison est donc nulle :

$$P_{1/2,2/1} = \{ \mathcal{T}_{1/2} \} \otimes \{ \mathcal{V}_{2/1} \} = {}_A \left\{ \begin{array}{c} X\vec{x} + Y\vec{y} + Z\vec{z} \\ L\vec{x} + M\vec{y} \end{array} \right\} \otimes {}_A \left\{ \begin{array}{c} \omega \vec{z} \\ \vec{0} \end{array} \right\} = 0$$

Il s'agit de la définition d'une liaison parfaite : une liaison dont la puissance dissipée est nulle. Ceci explique la dualité entre les torseurs cinématique et statique des liaisons parfaites !

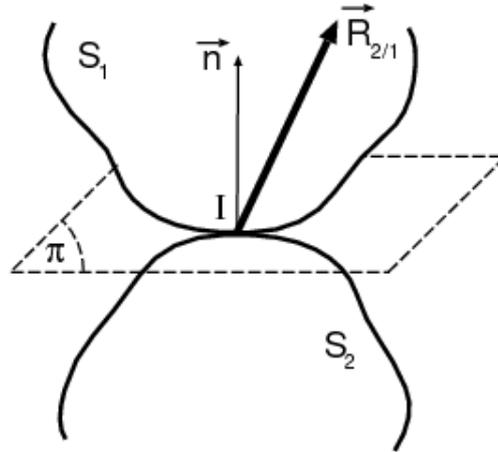


FIGURE 24 – Cas d’une liaison ponctuelle non parfaite.

**Puissance dissipée par une liaison non parfaite** On considère le cas d’une liaison ponctuelle de centre  $A$  et de normale  $\vec{z}$  entre deux solides 1 et 2 (figure 24). Cette liaison, non parfaite, est modélisée à l’aide des lois de Coulomb.

Le torseur des efforts transmissibles peut alors s’écrire sous la forme :

$$\{\mathcal{T}_{1/2}\} = \underset{A}{\left\{ \begin{array}{c} X\vec{x} + Y\vec{y} + Z\vec{z} \\ \vec{0} \end{array} \right\}}$$

où  $Z$  est la composante normale et  $X$  et  $Y$  les composantes de frottement.

Le mouvement est caractérisé par le torseur cinématique :

$$\{\mathcal{V}_{2/1}\} = \underset{A}{\left\{ \begin{array}{c} \alpha\vec{x} + \beta\vec{y} + \gamma\vec{z} \\ U\vec{x} + V\vec{y} \end{array} \right\}}$$

On en déduit la puissance des inter-efforts dans la liaison :

$$P_{1/2,2/1} = \underset{A}{\left\{ \begin{array}{c} X\vec{x} + Y\vec{y} + Z\vec{z} \\ \vec{0} \end{array} \right\}} \otimes \underset{A}{\left\{ \begin{array}{c} \alpha\vec{x} + \beta\vec{y} + \gamma\vec{z} \\ U\vec{x} + V\vec{y} \end{array} \right\}} = U.X + V.Y$$

Sachant que les lois de coulomb imposent en phase de glissement que l’action mécanique de 1/2 s’oppose au vecteur de vitesse relative de 2/1,  $U$  et  $X$  sont nécessairement de signes opposés, ainsi que  $V$  et  $Y$ . Le résultat est donc toujours *négatif* : **le phénomène de frottement ne peut que dissiper de l’énergie.**

## 6.2 Théorème de l’énergie cinétique

Le théorème de l’énergie cinétique se déduit du PFD. Il n’apporte donc *aucune information supplémentaire*. Son intérêt est qu’il permet d’aborder un mécanisme complexe de façon globale et de déterminer les équations du mouvement plus facilement que par le PFD.

### 6.2.1 Énergie cinétique

L’énergie cinétique représente l’énergie qu’un système stocke par la mise en mouvement de sa masse.

Ainsi il faut dépenser de l'énergie pour mettre en mouvement une voiture et cette énergie est ensuite stockée par la voiture sous forme d'énergie cinétique. Si la voiture percute un arbre, le problème majeur est de dissiper cette énergie cinétique... ainsi que celle des passagers. La dissipation se fait par déformation et rupture des pièces. Mais revenons à l'énergie cinétique.

L'énergie cinétique  $T_{S/R}$  se calcule comme le comoment du torseur cinétique et du torseur cinématique :

$$T_{S/R} = \frac{1}{2} \cdot \{ \mathcal{C}_{S/R} \} \otimes \{ \mathcal{V}_{S/R} \} = \frac{1}{2} \cdot \underset{A}{\left\{ \begin{array}{c} m \cdot \vec{V}_{G,S/R} \\ \vec{\sigma}_{A,S/R} \end{array} \right\}} \otimes \underset{A}{\left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}_{S/R} \\ \vec{V}_{A,S/R} \end{array} \right\}}$$

Remarquons qu'en considérant un solide en translation ( $\vec{\Omega}_{S/R} = \vec{0}$ ) et en réduisant les torseurs en  $G$  ( $\vec{\sigma}_{G,S/R} = I_{G,S} \cdot \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$ ), on obtient immédiatement l'expression valable pour le point matériel :  $T_{S/R} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \vec{V}_{G,S/R}^2$ .

L'énergie cinétique est une quantité scalaire exprimée en Joules ( $J$ ).

### 6.2.2 Du PFD au théorème de l'énergie cinétique

Le Théorème de l'énergie cinétique est une "projection" du PDF sur la direction du mouvement. Il s'agit d'une unique équation scalaire. Il y a donc beaucoup *moins d'information* que dans le PDF.

Soit un système  $\Sigma$  constitué de  $n$  solides  $S_i$  ( $i = 1 \dots n$ ). Le PFD s'écrit pour chaque solide :

$$\{ \mathcal{D}_{S_i/R_g} \} = \{ \mathcal{T}_{\bar{S}_i/S_i} \}$$

En "projetant" ces équations sur  $\{ \mathcal{V}_{S_i/R_g} \}$  on obtient l'équation scalaire :

$$\{ \mathcal{D}_{S_i/R_g} \} \otimes \{ \mathcal{V}_{S_i/R_g} \} = \{ \mathcal{T}_{\bar{S}_i/S_i} \} \otimes \{ \mathcal{V}_{S_i/R_g} \}$$

Puis en sommant ces  $n$  équations :

$$\sum_{i=1}^n \{ \mathcal{D}_{S_i/R_g} \} \otimes \{ \mathcal{V}_{S_i/R_g} \} = \sum_i \{ \mathcal{T}_{\bar{S}_i/S_i} \} \otimes \{ \mathcal{V}_{S_i/R_g} \}$$

Le terme de gauche est appelé *puissance des quantités d'accélération* :  $P_{acc,\Sigma/R_g}$ . On peut montrer que ce terme est égal à la dérivée de l'énergie cinétique (voir paragraphe C.5, page 43) :  $P_{acc,\Sigma/R_g} = \frac{dT_{\Sigma/R_g}}{dt}$ .

Le terme de droite peut être décomposé en deux catégories d'actions mécaniques : les actions de l'extérieur à  $\Sigma$  sur  $S_i$  et les actions des autres solides de  $\Sigma$  sur  $S_i$ .

$$\frac{dT_{\Sigma/R_g}}{dt} = \sum_{i=1}^n \{ \mathcal{T}_{\bar{\Sigma}/S_i} \} \otimes \{ \mathcal{V}_{S_i/R_g} \} + \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \{ \mathcal{T}_{S_j/S_i} \} \otimes \{ \mathcal{V}_{S_i/R_g} \}$$

On reconnaît dans le premier terme la somme des puissances développées par les actions extérieures  $P_{ext/R_g}$  tandis que dans le second terme les éléments de la somme s'additionnent deux à deux pour former des puissances d'inter-efforts entre solides :

$$\frac{dT_{\Sigma/R_g}}{dt} = \sum_{i=1}^n P_{\bar{\Sigma}/S_i, S_i/R_g} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{i-1} P_{S_i/S_j, S_j/S_i}$$

La somme des puissances d'inter-efforts est appelée la puissance intérieure  $P_{int}$ . Le théorème de l'énergie cinétique s'exprime alors sous la forme :

$$\boxed{\frac{dT_{\Sigma/R_g}}{dt} = P_{ext/R_g} + P_{int}}$$

On remarque que dans le cas où les liaisons entre les solides  $S_i$  sont parfaites,  $P_{int}$  est nul. C'est l'intérêt principal du théorème de l'énergie cinétique : *une équation liant directement les efforts extérieurs au mouvement du système*, en évitant toutes les inconnues de liaison.

Ces inconnues de liaisons ont disparu lors de la "projection" du PFD sur la direction du mouvement. Lorsque les liaisons sont parfaites, les inconnues de liaison ne travaillent pas dans le mouvement autorisé par la liaison.

### 6.2.3 Théorème de l'énergie cinétique

Le théorème de l'énergie cinétique s'exprime de façon générale pour tout système matériel  $\Sigma$  sous la forme :

$$\boxed{\frac{dT_{\Sigma/R_g}}{dt} = P_{ext/R_g} + P_{int}}$$

où  $P_{ext/R_g}$  est la puissance développée par les efforts extérieurs et  $P_{int}$  la puissance développée par les efforts intérieurs.

Dans le cadre d'un système de solides rigides, les puissances extérieures et intérieures s'écrivent :

$$\left| \begin{array}{l} P_{ext/R_g} = \sum_{i=1}^n P_{\Sigma/S_i, S_i/R_g} \\ P_{int} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{i-1} P_{S_i/S_j, S_j/S_i} \end{array} \right.$$

Le théorème de l'énergie cinétique peut aussi s'écrire sous forme intégrée entre deux instants  $t_1$  et  $t_2$  :

$$\Delta T_{\Sigma/R_g} = W_{ext/R_g} + W_{int}$$

où  $W_{ext/R_g}$  et  $W_{int}$  sont les travaux extérieurs et intérieurs. Cette forme est utile essentiellement lorsque les puissances intérieures sont nulles (liaisons parfaites) et que le système est soumis uniquement à des forces dérivant d'un potentiel. Le théorème fournit alors des relations simples sur l'état du système aux temps initial  $t_1$  et final  $t_2$ .

### 6.2.4 Application au micro-compresseur

## 7 Notions d'équilibrage

### 7.1 Pourquoi et comment équilibrer les machines

L'équilibrage des solides en rotation est incontournable dans toutes les machines modernes. Il permet de réduire au mieux les vibrations générées par les effets dynamiques au sein de la machine. Une machine mal équilibrée vibre, ce qui :

- génère du bruit,
- dégrade le confort ou la précision de la machine,
- use prématurément les liaisons.

Dès la conception, les géométries sont choisies afin d'assurer un équilibrage optimal. Cependant, lorsque les masses ou les vitesses de rotation sont importantes, les tolérances de fabrication ne permettent pas d'atteindre la précision d'équilibrage requise. Il faut alors équilibrer la machine sur site, lorsqu'elle est prête à fonctionner. Certaines machines nécessitent même un nouvel équilibrage à chaque maintenance.



FIGURE 25 – Équilibreuse de roue de voitures.

L'exemple classique est celui de la roue de voiture. Lors d'un changement de pneumatique, la roue est démontée et un nouveau pneu est monté sur la jante du véhicule. Les tolérances de fabrication des pneus et les incertitudes liées au montage sur la jante ne permettent pas d'obtenir une roue suffisamment équilibrée. Le garagiste réalise donc un équilibrage par deux masselottes serties sur le bord de la jante. Une machine spécifique (fig 25) met la roue en rotation, mesure les défauts d'équilibrage et en déduit la position et la masse des masselottes à ajouter (fig 26).



FIGURE 26 – Mise en place au marteau d'une masselotte sur la jante.



FIGURE 27 – Rotor arrière de l'hélicoptère, tournant à  $2000 \text{ tr/min}$ .



FIGURE 28 – Montage des masselottes sur le rotor en quatre points.



FIGURE 29 – Masselottes de masses calibrées pour l'équilibrage.

Un autre exemple est celui de l'hélicoptère. Les pales du rotor principal tournent à des vitesses de l'ordre de  $400 \text{ tr/min}$  tandis que le rotor anti-couple tourne à des vitesses de l'ordre de  $2000 \text{ tr/min}$ . Les photographies 27 à 29 montrent le rotor anti-couple et ses masselottes d'équilibrages. L'équilibrage est plus complexe car il doit être réalisé pour toutes les

incidences des pales. Il faut donc, contrairement aux roues de voitures 4 masselottes (deux sur chaque pale). L'équilibrage est réalisé en plaçant un accéléromètre sur la liaison pivot guidant le rotor, couplé à un tachymètre optique synchronisé sur l'accéléromètre.



FIGURE 30 – Moteur Arriel 1 de 750 CV.

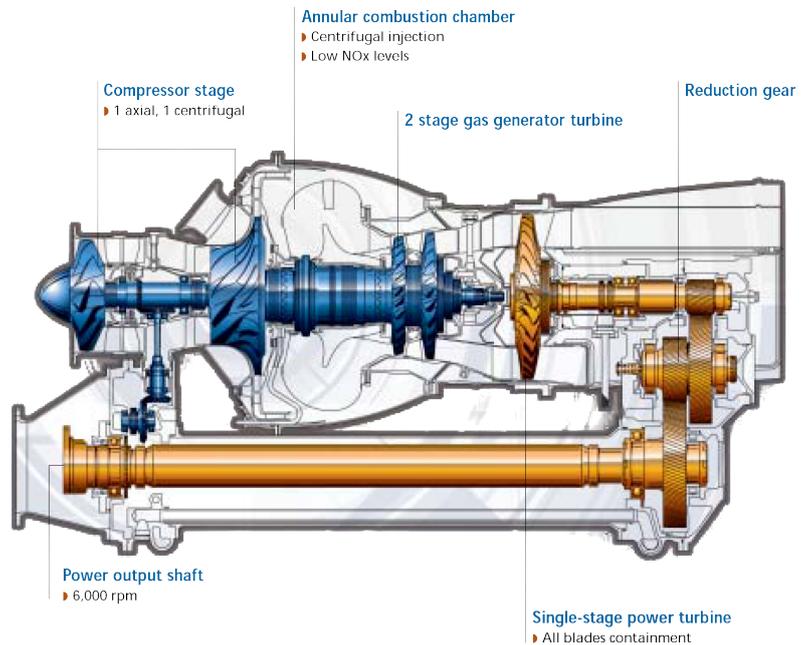


FIGURE 31 – Vue en coupe du moteur.

Un dernier exemple est celui des turbo-réacteurs, turbines et autres machines tournantes. Ce sont par exemple les turbo-propulseurs des avions de ligne, les turbines des centrales électriques ou encore les turbines des barrages. Ces machines présentent un arbre supportant les aubages, tournant généralement à grande vitesse. Un mauvais équilibrage transmet des vibrations qui peuvent endommager l'avion ou même le moteur lui-même, sachant qu'il fonctionne sous de fortes sollicitations et hautes températures, avec des jeux en bout d'aubes très réduits.

Les figures 30 et 31 montrent le turbomoteur Arriel 1 (TurboMéca), monté sur les hélicoptères et développant 750 CV.



FIGURE 32 – Banc d'équilibrage du laboratoire de SI.

Au laboratoire de SI, un banc d'équilibrage (figure 32) permet d'étudier les différents défauts d'équilibrage et leur correction. Il s'agit d'un rotor monté sur lames souples. Des

accéléromètres sont fixés à la liaison pivot et enregistrent le mouvement de l'axe de rotation. La situation est très proche de la mesure faite sur l'hélicoptère.

## 7.2 Résolution du problème d'équilibrage

Un solide 1 en rotation autour d'un axe fixe  $(O, \vec{x})$  par rapport à un bâti fixe 0 est dit *équilibré* si il ne transmet aucun effort tournant au bâti à travers la liaison pivot lorsqu'il est mis en rotation.

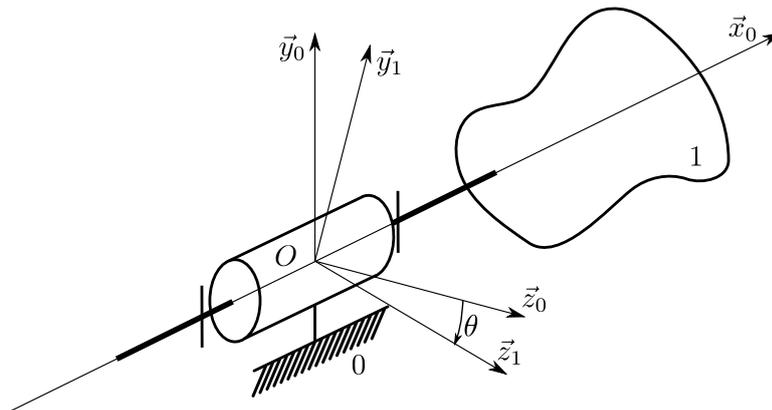


FIGURE 33 – Cas général d'un solide quelconque en rotation autour d'un axe fixe.

Considérons un solide 1 quelconque et déterminons les efforts dynamiques transmis au bâti, afin d'obtenir ensuite les conditions d'équilibrage.

Soit  $\vec{\Omega}_{1/0} = \omega \cdot \vec{x}$  la vitesse de rotation de 1/0 et  $G$  le centre de gravité tel que  $\vec{OG} = X \cdot \vec{x}_1 + Y \cdot \vec{y}_1$ . On note la matrice d'inertie :

$$I_{O,1} = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}_{R_S}$$

### 7.2.1 Effort transmis par la liaison pivot

On isole le solide 1, le Principe Fondamental de la Dynamique s'écrit (en négligeant le poids) :

$$\{\mathcal{D}_{1/0}\} = \{\mathcal{T}_{0/1}\}$$

**Calcul du torseur dynamique :**

Le torseur cinématique s'écrit

$$\{\mathcal{V}_{1/0}\} = \underset{O}{\left\{ \begin{array}{c} \omega \cdot \vec{x} \\ \vec{0} \end{array} \right\}}$$

On en déduit les éléments du torseur cinétique :

$$\left| \begin{array}{l} \vec{V}_{G,1/0} = \vec{0} + \omega \cdot \vec{x}_1 \wedge (X \cdot \vec{x}_1 + Y \cdot \vec{y}_1) = \omega \cdot Y \cdot \vec{z}_1 \\ \vec{\sigma}_{O,1/0} = I_{O,1} \cdot \vec{\omega}_{1/0} + \vec{0} = \omega \cdot (A \cdot \vec{x}_1 - F \cdot \vec{y}_1 - E \cdot \vec{z}_1) \end{array} \right.$$

$$\{\mathcal{C}_{1/0}\} = \underset{O}{\left\{ \begin{array}{c} m.\vec{V}_{G,1/0} \\ \vec{\sigma}_{O,1/0} \end{array} \right\}} = \underset{O}{\left\{ \begin{array}{c} m.\omega.Y.\vec{z}_1 \\ \omega.(A.\vec{x}_1 - F.\vec{y}_1 - E.\vec{z}_1) \end{array} \right\}}$$

On en déduit les éléments du torseur dynamique :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\Gamma}_{G,1/0} = \frac{d}{dt}/R_0 (\omega.Y.\vec{z}_1) = -\omega^2.Y.\vec{y}_1 \\ \delta_{O,1/0} = \frac{d\sigma_{O,1/0}}{dt}/R_0 + \vec{0} = \omega^2.(-F.\vec{z}_1 + E.\vec{y}_1) \end{array} \right.$$

$$\{\mathcal{D}_{1/0}\} = \underset{O}{\left\{ \begin{array}{c} m.\vec{\Gamma}_{G,1/0} \\ \vec{\delta}_{O,1/0} \end{array} \right\}} = \underset{O}{\left\{ \begin{array}{c} -m.\omega^2.Y.\vec{y}_1 \\ \omega^2.(-F.\vec{z}_1 + E.\vec{y}_1) \end{array} \right\}}$$

D'après le PFD, on en déduit l'action du bâti sur 1 :

$$\{\mathcal{T}_{0/1}\} = \underset{O}{\left\{ \begin{array}{c} -m.\omega^2.Y.\vec{y}_1 \\ \omega^2.(-F.\vec{z}_1 + E.\vec{y}_1) \end{array} \right\}}$$

Ce sont des efforts et moments *tournant* avec le solide 1. Bien que la norme des actions mécaniques reste constante, la direction tourne à la vitesse du solide 1, ce qui génère des vibrations transmises au bâti.

### 7.2.2 Équilibrage statique

Un solide est *équilibré statiquement* si la *résultante* des actions mécaniques de 1/0 ne possède aucune composante tournante. Ici,

$$\vec{R}_{1/0} = \omega^2.Y.\vec{y}_1$$

Cette condition est réalisée si  $Y = 0$ , c'est à dire si **G est sur l'axe de rotation** ( $O, \vec{x}$ ).

Un solide équilibré statiquement ne présente plus de balourd, qui est généralement la source principale de vibration.

Le mot *statique* est utilisé car si l'axe de rotation est horizontal et si  $G$  n'est pas situé sur l'axe de rotation, alors le poids impose une position d'équilibre à l'arrêt. Au contraire, un solide équilibré statiquement reste immobile quelle que soit la position angulaire du solide.

Les figures 34 et 36 montrent deux géométries de solides équilibrés ou pas statiquement.

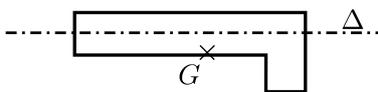


FIGURE 34 – Solide non équilibré statiquement.

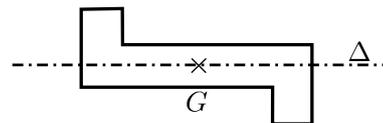


FIGURE 35 – Solide équilibré statiquement.

### 7.2.3 Équilibrage dynamique

Un solide est *équilibré dynamiquement* lorsque le *torseur d'action mécanique* de 1/0 ne possède aucune composante tournante (résultante et moment).

$$\left\{ \mathcal{T}_{1/0} \right\} = \underset{O}{\left\{ \begin{array}{l} \omega^2 \cdot Y \cdot \vec{y}_1 \\ \omega^2 \cdot (F \cdot \vec{z}_1 - E \cdot \vec{y}_1) \end{array} \right\}}$$

Cette condition est réalisée ssi **G est sur l'axe de rotation** et  $\mathbf{E} = \mathbf{F} = \mathbf{0}$ , c'est à dire si les produits d'inertie de la colonne  $\vec{x}$  (axe de rotation) sont nuls. L'axe  $(O, \vec{x})$  est alors un axe principal d'inertie.

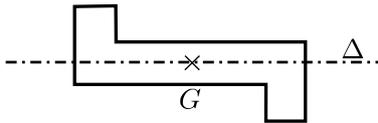


FIGURE 36 – Solide équilibré statiquement mais pas dynamiquement.

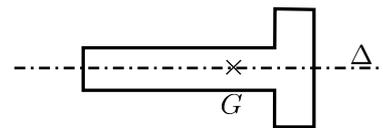


FIGURE 37 – Solide équilibré dynamiquement.

Les figures 36 et 37 montrent deux solides, l'un équilibré statiquement mais pas dynamiquement, et l'autre équilibré dynamiquement. En effet, la mise en rotation du solide figure 36 va générer deux "forces centrifuges" au niveau de chacune des masses excentrées, ce qui va conduire à un moment tournant avec le solide.

## A Synthèse de l'essentiel à savoir en dynamique au concours

### A.1 Méthode

#### A.1.1 Principe Fondamental de la Dynamique

Le principe fondamental de la dynamique permet d'établir le lien entre les efforts s'exerçant sur un système de solides et son mouvement.

Il répond à deux types de problèmes :

- Le mouvement est connu et on recherche les efforts moteurs et/ou les actions de liaison.
- Les efforts moteurs sont connus et on recherche le mouvement et/ou les actions de liaison. Dans ce cas, le PFD permet d'obtenir une équation différentielle qu'il faudra ensuite intégrer.

Démarche classique pour l'isolement d'un solide :

1. Isoler le système et exprimer le PFD sous forme torsielle.
2. Exprimer les différents torseurs statiques.
3. Exprimer les mouvements du solide par son torseur cinématique.
4. Déterminer le torseur cinétique.
5. Déterminer le torseur dynamique.
6. Choisir le point de réduction et réduire les torseurs.
7. En déduire les équations vectorielles du PFD
8. Choisir une base de projection et en déduire les équations scalaires du PFD

L'étude dynamique se distingue de l'étude statique par les points 3, 4 et 5 uniquement. Dans le cas de l'isolement d'un système de solides, il faut déterminer les torseurs dynamiques de chacun des solides.

Remarques :

Comme en statique, la difficulté principale réside généralement dans *le choix d'une succession d'isollements* et dans *une sélection judicieuse des équations écrites*, permettant d'aboutir au résultat recherché avec un minimum de calcul.

Le choix d'une succession d'isolement peut avantageusement s'appuyer sur un graphe de structure sur lequel on a pris soin d'indiquer les inconnues recherchées et non recherchées ainsi que les données. L'objectif étant de choisir des isollements coupant les inconnues recherchées et les données, tout en coupant le moins d'inconnues non recherchées possible.

Le choix des équations (c'est à dire choisir l'équation de résultante projetée sur une direction particulière ou l'équation de moment en un point précis, projetée sur une direction particulière) permet encore d'éliminer les inconnues non recherchées. En se plaçant sur le degré de liberté d'une liaison par exemple, les inconnues de liaison n'apparaîtront pas. De même, ne pas déplacer un torseur statique permet de ne pas faire apparaître les inconnues de la résultante dans les équations de moment (d'où la règle conseillant de choisir le point du torseur ayant le plus d'inconnues).

Le choix des équations peut avantageusement s'appuyer sur un raisonnement énergétique : en imaginant le solide dans un *mouvement virtuel* correspondant à l'équation choisie, il est possible d'établir le bilan des efforts qui travaillent (et dont les inconnues apparaîtront dans l'équation) et des efforts qui ne travaillent pas (et dont les inconnues n'apparaîtront pas).

### A.1.2 Théorème de l'énergie cinétique

Le théorème de l'énergie cinétique permet d'obtenir une seule équation scalaire, issue de la projection du PFD sur le mouvement. Cette équation scalaire ne contient aucune inconnue de la part des liaisons parfaites internes, ce qui constitue sa force. Il est donc généralement utilisé pour :

- déterminer l'équation différentielle du mouvement lorsque les efforts moteurs sont connus.
- déterminer les efforts moteurs lorsque le mouvement est connu.
- déterminer la loi entrée-sortie lorsque le système est un transmetteur de puissance, d'un moteur vers un récepteur.

Bien entendu, il ne faut pas compter déterminer les inconnues de liaison à l'aide du théorème de l'énergie cinétique...

L'écriture du théorème de l'énergie cinétique pour un système de solides suit la démarche classique :

1. Définir le système isolé et écrire le théorème de l'énergie cinétique de façon générale,
2. Exprimer le mouvement de chacun des solides par un torseur cinématique,
3. Exprimer les torseurs d'actions mécaniques,
4. Déterminer les puissances extérieures et intérieures,
5. Déterminer les torseurs cinétiques,
6. Déterminer les énergies cinétiques de chaque solide,
7. Dériver l'énergie cinétique et traduire d'équation.

## A.2 Formules utiles en dynamique

**Torseur cinétique :**

$$\{ \mathcal{C}_{S/R_g} \} = \underset{A}{\left\{ \begin{array}{l} m \cdot \vec{V}_{G,S/R_g} \\ \vec{\sigma}_{A,S/R_g} \end{array} \right\}}$$

où  $m \cdot \vec{V}_{G,S/R_g}$  est la résultante cinétique et  $\vec{\sigma}_{A,S/R_g}$  le moment cinétique en A.

Le moment cinétique se calcul à partir du torseur cinématique :

$$\vec{\sigma}_{A,S/R_g} = I_{A,S} \cdot \vec{\Omega}_{S/R_g} + m \cdot \overrightarrow{AG} \wedge \vec{V}_{A,S/R_g}$$

Le second terme s'annule si A appartenant à S est un point fixe dans  $R_g$  ou si  $A = G$ , ce qui conduit à préférer ces points pour mener le calcul. Toutefois, lorsque la matrice est donnée en un point, elle impose généralement ce point de calcul car déplacer la matrice est fastidieux.

**Torseur dynamique :**

$$\{ \mathcal{D}_{S/R_g} \} = \underset{A}{\left\{ \begin{array}{l} m \cdot \vec{\Gamma}_{G,S/R_g} \\ \vec{\delta}_{A,S/R_g} \end{array} \right\}}$$

où  $m \cdot \vec{\Gamma}_{G,S/R_g}$  est la résultante dynamique et  $\vec{\delta}_{A,S/R_g}$  le moment dynamique en A.

Le moment dynamique se calcul à partir du torseur cinétique :

$$\vec{\delta}_{A,S/R_g} = \frac{d\vec{\sigma}_{A,S/R_g}}{dt} / R_g + \vec{V}_{A,A/R_g} \wedge m \cdot \vec{V}_{G,S/R_g}$$

Le second terme s'annule si le point géométrique A est un point fixe dans  $R_g$  ou si  $A = G$ , ce qui conduit à préférer ces points pour mener le calcul.

### A.3 Matrice d'inertie

La matrice d'inertie d'un solide  $S$  au point  $A$  s'écrit :

$$I_{A,S} = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}_{R_S}$$

où  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont les moments d'inertie autour des axes  $(A, \vec{x})$ ,  $(A, \vec{y})$  et  $(A, \vec{z})$ .  $-D$ ,  $-E$  et  $-F$  sont les produits d'inertie.

Lorsque le solide présente une symétrie par rapport à un plan contenant  $A$  et deux vecteurs de la base  $B_S$ , alors deux des produits d'inertie sont nuls : Par exemple si le plan de normale  $\vec{y}$  est plan de symétrie, les produits contenant  $y$ , c'est à dire  $F$  et  $D$ , sont nuls.

Le théorème de Huygens permet de changer de point la matrice :

$$I_{A,S} = I_{G,S} + I_A^H$$

où  $I_A^H$  est une matrice complémentaire telle que si  $\overrightarrow{GA} = (a, b, c)$ ,

$$I_A^H = m. \begin{pmatrix} b^2 + c^2 & -ab & -ac \\ -ab & a^2 + c^2 & -bc \\ -ac & -bc & a^2 + b^2 \end{pmatrix}_R$$

### A.4 Énergétique

Le théorème de l'énergie cinétique s'écrit :

$$\frac{dT_{\Sigma/R_g}}{dt} = P_{ext/R_g} + P_{int}$$

où  $P_{ext/R_g} = \sum_{i=1}^n P_{\Sigma/S_i, S_i/R_g}$  et  $P_{int} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{i-1} P_{S_i/S_j, S_j/S_i}$ .

La puissance développée par l'action de  $\Sigma/S$  dans le mouvement de  $S/R$  s'écrit :

$$P_{\Sigma/S, S/R} = \{ \mathcal{T}_{\Sigma/S} \} \otimes \{ \mathcal{V}_{S/R} \}$$

Pour le calcul de la puissance intérieure, lorsque les liaisons ne sont pas parfaites, on définit la puissances des inter-efforts :

$$P_{1/2, 2/1} = \{ \mathcal{T}_{1/2} \} \otimes \{ \mathcal{V}_{2/1} \}$$

## B Compléments de modélisation des actions mécaniques

Cette annexe vise à apporter quelques compléments au cours de modélisation vu en 1ère année et de structurer par un formalisme mathématique.

## B.1 Du local au global

La matière (liquide, solide ou gazeuse) est constituée d'atomes. Mais à l'échelle où la matière est considérée comme liquide, solide ou gazeuse, les atomes sont suffisamment petits pour modéliser la matière comme une répartition continue.

Les actions mécaniques s'appliquent sur cette matière continue. La plupart peuvent se modéliser mathématiquement sous la forme d'un champ de vecteur  $\vec{F}(M)$  volumique ou surfacique.

Dans le point de vue des solides rigides, l'expression du PFD nécessite de connaître les actions mécaniques s'exerçant globalement sur le système. Le calcul de l'action globale à partir de la répartition locale d'effort est une simple somme (ou intégration) des actions locales.

### B.1.1 Action mécanique volumique

Soit  $\Sigma$  un système matériel. Une action mécanique volumique  $\vec{f}(M)$  est un champ de vecteurs associé à une mesure  $d\mu$ , qui à tout point  $M$  de  $\Sigma$  associe une action mécanique  $\vec{f}(M).d\mu$  s'exerçant sur la mesure  $d\mu$  au voisinage de  $M$  (figure 38).

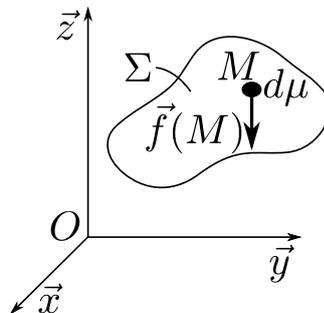


FIGURE 38 – Action volumique  $\vec{f}(M)$  s'exerçant sur un système matériel  $\Sigma$ .

**Exemple : la pesanteur** L'action volumique s'écrit  $\vec{f}_{poids} = \vec{g}$ , associée à  $dm$  l'élément de masse. L'action mécanique élémentaire s'exerçant sur  $dm$  s'écrit  $d\vec{P}_{poids} = \vec{g}.dm$ .

L'action globale du poids sur  $\Sigma$  peut s'écrire sous la forme d'un torseur :

$$\left\{ \mathcal{T}_{poids/\Sigma} \right\} = \underset{A}{\left\{ \begin{array}{l} \vec{P}_{poids} \\ \vec{M}_{A,poids} \end{array} \right\}}$$

Chacune des composantes du torseur est la somme des actions élémentaires :

$$\vec{P}_{poids} = \iiint_{\Sigma} -g.\vec{z}.dm \quad \text{et} \quad \vec{M}_{A,poids} = \iiint_{\Sigma} \overrightarrow{AM} \wedge -g.\vec{z}.dm$$

La masse  $m$  totale du solide s'écrit :  $m = \iiint_{\Sigma} dm$ , d'où l'expression de la résultante :  $\vec{P}_{poids} = -m.g.\vec{z}$ .

Soit  $G$  le centre de gravité de solide :  $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{m} \iiint_{\Sigma} \overrightarrow{AM}.dm$ . On en déduit l'expression du moment :

$$\vec{M}_{A,poids} = \iiint_{\Sigma} \overrightarrow{AM} \wedge -g.\vec{z}.dm = m.\overrightarrow{AG} \wedge -g.\vec{z}$$

On remarque que si  $A = G$ ,  $\vec{M}_{A,poids} = \vec{0}$ , d'où  $\{\mathcal{T}_{poids/\Sigma}\} = \begin{Bmatrix} -m.g.\vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$ . Ce tenseur est un glisseur de support  $(G, \vec{z})$ .

### B.1.2 Action mécanique surfacique

Soit  $\Sigma$  un système matériel. Une action mécanique surfacique  $\vec{F}(M)$  est un champ de vecteurs associé à une mesure  $d\mu$ , qui à tout point  $M$  de la surface  $\partial\Sigma$  de  $\Sigma$  associe une action mécanique  $\vec{F}(M).d\mu$  s'exerçant sur la mesure  $d\mu$  au voisinage de  $M$  (figure 39).

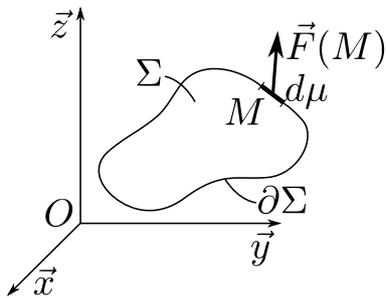


FIGURE 39 – Action surfacique  $\vec{F}(M)$  s'exerçant sur le bord d'un système matériel  $\partial\Sigma$ .

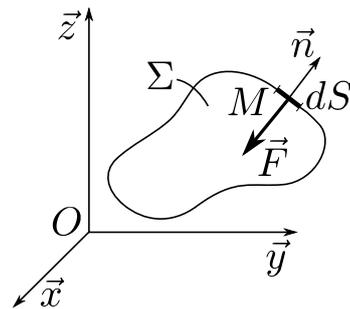


FIGURE 40 – Pression d'un fluide parfait sur le système matériel  $\Sigma$ .

**Exemple : pression d'un fluide parfait (ou au repos) sur un solide** L'action surfacique s'écrit  $\vec{F}_{pression}(M) = -p(M).\vec{n}$ , associée à l'élément de surface  $dS$ .  $p(M)$  est la pression du fluide en  $M$  et  $\vec{n}$  la normale à la surface en  $M$  (figure 40).

L'effort de pression élémentaire est alors  $\vec{dP}_{pression} = -p.\vec{n}.dS$ .

L'action globale se calcule par intégration, de façon similaire à l'action volumique.

## B.2 Du global au local

L'analyse d'un système de solides rigides permet généralement de calculer, à partir des actions mécaniques extérieures et de l'architecture du système, les actions mécaniques transmises par les liaisons internes.

Ce calcul présente deux intérêts :

- connaître les sollicitations subies par les solides, ce qui permet ensuite de réaliser un calcul de résistance des matériaux afin de vérifier la capacité de la pièce à résister aux sollicitations,
- connaître les actions mécaniques transmises par les liaisons pour dimensionner la solution technologique assurant cette liaison.

Le premier point sera vu en école d'ingénieurs. En ce qui concerne les liaisons, soit un constructeur vend un composant en dimensionnant lui même la solution (c'est le cas des roulements par exemple), soit c'est à vous de dimensionner la géométrie et les matériaux permettant de transmettre les efforts.

Dans ce cas, il est nécessaire de déterminer les actions locales à partir des actions globales. En effet, les liaisons se dégradent au niveau local, lorsque les conditions de pression de contact et/ou de vitesse de glissement sont trop sévères.

Mais s'il n'y a qu'une action globale correspondant à une répartition local donnée, il existe une infinité d'action local correspondant à une action globale donnée ! Cette opération n'est donc possible qu'en imposant une forme particulière à la répartition locale, paramétrée par un nombre limité de paramètres (généralement 1 ou 2, au grand maximum 6 si les conditions s'écrivent sur les 6 dimensions du torseur d'action mécanique).

**Exemple : contact cylindre-cylindre** On considère une liaison par contact entre deux solides : un cylindre plein et un cylindre creux de même rayon  $R$ . La longueur du contact vaut  $L$  (figure 41).

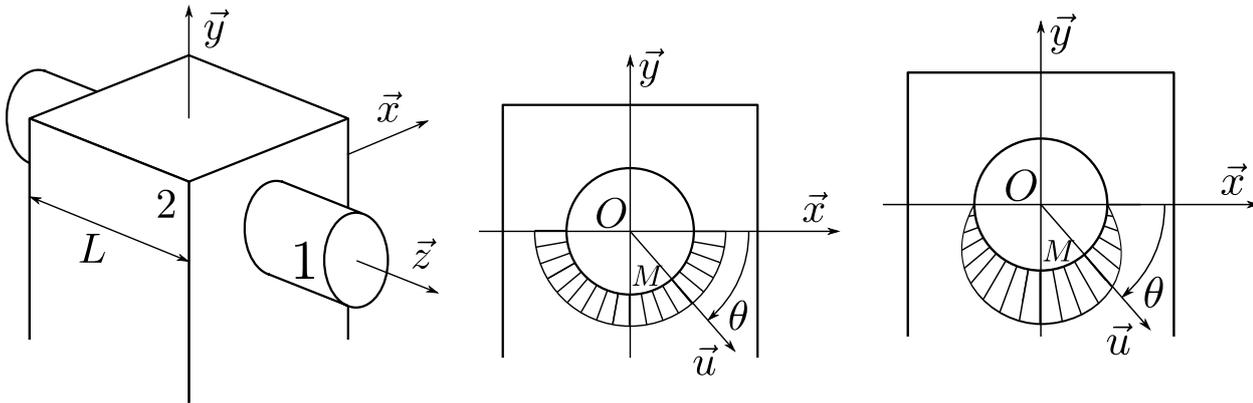


FIGURE 41 – Contact cylindre-cylindre avec hypothèse de répartition uniforme.

FIGURE 42 – Contact cylindre-cylindre avec hypothèse de répartition en cosinus.

On suppose que la liaison transmet une action mécanique sous forme d'un glisseur vertical passant par le centre  $O$  de la liaison :

$$\{ \mathcal{T}_{1/0} \} = \underset{O}{\left\{ \begin{array}{c} -F \cdot \vec{z} \\ \vec{0} \end{array} \right\}}$$

On recherche la pression maximale au contact entre les deux solides en fonction de  $F$  afin de déterminer l'effort maximal que la liaison puisse supporter : la pression de contact ne doit pas dépasser 200 bar pour ne pas endommager les surfaces.

**Hypothèse 1 : répartition de pression normale uniforme, sans frottement**

L'action surfacique  $\vec{F}_{2/1}(M)$  en un point  $M$  de la surface s'exprime en fonction de la pression de contact  $p(\theta)$  et de la normale  $\vec{u}$  au contact (pas de frottement donc pas d'action tangentielle). La pression de contact est supposée uniforme (figure 41) :

$$\vec{F}_{2/1}(M) = \vec{F}_{2/1}(\theta) = p(\theta) \cdot \vec{u} \quad \text{où} \begin{cases} p(\theta) = 0 \text{ sur } [0, \pi] \\ p(\theta) = p_0 \text{ sur } [\pi, 2\pi] \end{cases}$$

L'action mécanique globale de 2 sur 1 est la somme des actions mécaniques locales sur la surface de contact, notée  $\gamma$  :

$$\{ \mathcal{T}_{2/1} \} = \underset{O}{\left\{ \begin{array}{c} \int_{\gamma} \vec{F}_{2/1}(\theta) dS \\ \int_{\gamma} \vec{OM} \wedge \vec{F}_{2/1}(\theta) dS \end{array} \right\}}$$

Intégration de la résultante :

$$\int_{\gamma} \vec{F}_{2/1}(\theta) dS = \int_{-L/2}^{L/2} \int_{\pi}^{2\pi} p_0 \cdot \vec{u} \cdot R \cdot d\theta \cdot dz = \int_{\pi}^{2\pi} R \cdot L \cdot p_0 \cdot (\cos \theta \cdot \vec{x} + \sin \theta \cdot \vec{y}) \cdot d\theta$$

$$F_{2/1}(\theta) dS = R \cdot L \cdot p_0 \cdot [-\cos \theta]_{\pi}^{2\pi} \cdot \vec{y} = -2 \cdot R \cdot L \cdot p_0 \cdot \vec{y}$$

Intégration du moment en  $O$  :

$$\int_{\gamma} \vec{OM} \wedge \vec{F}_{2/1}(\theta) dS = \int_{-L/2}^{L/2} \int_{\pi}^{2\pi} (R \cdot \vec{u} + z \cdot \vec{z}) \wedge p_0 \cdot \vec{u} \cdot R \cdot d\theta \cdot dz = \int_{-L/2}^{L/2} \int_{\pi}^{2\pi} R \cdot p_0 \cdot z \cdot \vec{v} \cdot R \cdot d\theta \cdot dz$$

$$\int_{\gamma} \vec{OM} \wedge \vec{F}_{2/1}(\theta) dS = R^2 \cdot p_0 \int_{-L/2}^{L/2} z \cdot dz \int_{\pi}^{2\pi} \vec{v} \cdot d\theta = \vec{0}$$

On déduit le torseur d'action mécanique globale :  $\left\{ \mathcal{T}_{2/1} \right\} = \begin{matrix} O \\ \left\{ \begin{matrix} -2 \cdot R \cdot L \cdot p_0 \cdot \vec{y} \\ \vec{0} \end{matrix} \right\} \end{matrix}$ .

En connaissant l'action mécanique globale  $F$  supportée par la liaison, il est possible de remonter à la pression surfacique :

$$F = -2 \cdot R \cdot L \cdot p_0 \implies p_0 = \frac{F}{-2 \cdot R \cdot L}$$

### Hypothèse 2 : répartition de pression normale en cosinus, sans frottement

(figure 42)

### Hypothèse 3 : Calcul du couple résistant en ajoutant le frottement

La répartition de pression normale est identique à celle du paragraphe *Hypothèse 1*. Une composante tangentielle se superpose, en s'opposant à la vitesse de glissement. Le mouvement relatif est caractérisé par le torseur cinématique, qui permet de déterminer la vitesse de glissement en un point  $M$  de la surface de contact :

$$\left\{ \mathcal{V}_{1/2} \right\} = \begin{matrix} O \\ \left\{ \begin{matrix} \omega \cdot \vec{z} \\ \vec{0} \end{matrix} \right\} \end{matrix} \implies \vec{V}_{M,1/2} = R \cdot \omega \cdot \vec{v}$$

d'où l'expression de la force surfacique en  $M$ , selon les lois de Coulomb :

$$\vec{F}_{2/1}(M) = p(\theta) \cdot \vec{u} + f \cdot p(\theta) \cdot \vec{v} \quad \text{où} \quad \begin{cases} p(\theta) = 0 \text{ sur } [0, \pi] \\ p(\theta) = p_0 \text{ sur } [\pi, 2\pi] \end{cases}$$

Le torseur d'action mécanique global s'écrit toujours :

$$\left\{ \mathcal{T}_{2/1} \right\} = \begin{matrix} O \\ \left\{ \begin{matrix} \int_{\gamma} \vec{F}_{2/1}(\theta) dS \\ \int_{\gamma} \vec{OM} \wedge \vec{F}_{2/1}(\theta) dS \end{matrix} \right\} \end{matrix}$$

Intégration de la résultante (en reprenant partiellement les résultats du paragraphe *Hypothèse 1*) :

$$\int_{\gamma} \vec{F}_{2/1}(\theta) dS = \int_{-L/2}^{L/2} \int_{\pi}^{2\pi} p_0 \cdot (\vec{u} + f \cdot \vec{v}) \cdot R \cdot d\theta \cdot dz$$

$$F_{2/1}(\theta)dS = -2.R.L.p_0.\vec{y} + \int_{-L/2}^{L/2} \int_{\pi}^{2\pi} p_0.f.(-\sin\theta.\vec{x} + \cos\theta.\vec{y}).R.d\theta.dz$$

$$\int_{\gamma} \vec{F}_{2/1}(\theta)dS = -2.R.L.p_0.\vec{y} + p_0.f.R. [\cos\theta]_{\pi}^{2\pi} = -2.R.L.p_0.(\vec{y} - f\vec{x})$$

Intégration du moment en  $O$  (en reprenant partiellement les résultats du paragraphe *Hypothèse 1*) :

$$\int_{\gamma} \vec{OM} \wedge \vec{F}_{2/1}(\theta)dS = \int_{-L/2}^{L/2} \int_{\pi}^{2\pi} (R.\vec{u} + z.\vec{z}) \wedge p_0.(\vec{u} + f.\vec{v}).R.d\theta.dz$$

$$\int_{\gamma} \vec{OM} \wedge \vec{F}_{2/1}(\theta)dS = \vec{0} + \int_{-L/2}^{L/2} \int_{\pi}^{2\pi} p_0.R.f.(R.\vec{z} - f.z.\vec{u}) = 2.\pi.R^2.p_0.f.\vec{z}$$

On déduit le torseur d'action mécanique globale :  $\left\{ \mathcal{T}_{2/1} \right\} = \begin{Bmatrix} -2.R.L.p_0.(\vec{y} - f\vec{x}) \\ 2.\pi.R^2.p_0.f.\vec{z} \end{Bmatrix}_O$ .

En connaissant l'action mécanique globale  $F$  supportée par la liaison, il est possible de remonter à la pression surfacique comme dans le paragraphe *hypothèse 1*, mais aussi de déterminer le couple de frottement  $C_f$  dans la liaison :

$$C_f = 2.\pi.R^2.p_0.f.\vec{z} = 2.\pi.R^2.\frac{F}{-2.R.L}.f.\vec{z}$$

## C Construction de la théorie en mécanique des solides

### C.1 Modélisation du mouvement et des efforts

La modélisation du mouvement (la cinématique) est le point de départ de l'étude des phénomènes mécaniques. Il s'agit de comprendre comment l'objet étudié se déplace ou se déforme, d'identifier les propriétés essentielles de ce mouvement pour le phénomène observé puis de proposer un objet mathématique susceptible de représenter le mouvement.

Prenons quelques exemples pour illustrer cette démarche :

**Mécanique du point :** on souhaite comprendre les lois qui régissent le mouvement d'une particule  $A$  très petite. L'aspect essentiel retenu dans le modèle est la trajectoire de cette particule. La grandeur instantanée permettant de caractériser le mouvement est la vitesse, représentée par un vecteur de dimension 3 :  $\vec{V}_{A/R}(t) = (V_x(t), V_y(t), V_z(t))$ .

La rotation de la particule sur elle-même n'est pas retenue dans le modèle et n'est pas représenté dans l'outil mathématique.

**Mécanique des fluides ou des solides déformables :** on souhaite comprendre les lois qui régissent le mouvement d'un fluide ou la déformation d'une pièce. On a alors affaire à une répartition continue de matière (les atomes sont à si petite échelle qu'un point de vue continu est adopté). Chaque particule de matière en  $M$  a un mouvement propre, sous la forme d'une vitesse  $\vec{V}(M)$ . L'outil mathématique approprié pour décrire le mouvement est donc un champ de vecteur  $\vec{V}(M)$ .

**Mécanique des solides rigides :** *l'étude des solides rigides se rapproche de celle des solides déformables, avec une propriété forte sur le champ de vecteur vitesse  $\vec{V}(M)$ , qui doit respecter la non déformation de la pièce. Nous avons vu en cinématique que cette propriété est celle du champ de torseur et que le mouvement peut alors être représenté par un torseur cinématique (dimension 6).*

**Mécanique des grains ou des matériaux magnétiques :** *l'étude des grains de sables ou des grains de céréales dans les sillos s'apparente à l'étude d'une matière continue fluide. Cependant, il s'avère que le frottement sur le bord des grains pousse les grains à tourner sur eux-même. Ce phénomène n'est pas négligeable et doit être pris en compte pour comprendre les effets de voute qui empêche l'écoulement du grain dans les sillos. Le champ de vitesse  $\vec{V}(M)$  doit donc être complété par un champ de vitesse de rotation  $\vec{\Omega}(M)$  pour représenter correctement le mouvement.*

*De même, l'étude des déformations des matériaux magnétiques, constitués de grains magnétiques ayant chacun leur propre orientation magnétique, nécessite de tenir compte de l'angle des grains. Là encore il faut ajouter un champ de vitesse de rotation.*

La modélisation des efforts est nettement plus compliquée à appréhender que la modélisation du mouvement. Le mouvement s'observe tandis que les actions mécaniques ne sont pas visibles. On ne peut qu'observer les conséquences des actions mécaniques (mouvement, déformation...), pas les actions elle-mêmes.

Les actions mécaniques sont ce que nous allons appeler des grandeurs *non mesurables* tandis que le mouvement est une *grandeur mesurable*.

## C.2 Notion de dualité

La notion de grandeurs mesurables et non mesurables est générale en physique. Voici quelques exemples de grandeurs mesurables et non mesurables associées :

Grandeur mesurable	Grandeur non mesurable duale
Intensité $I$	Tension $U$
Vitesse $\vec{V}$	Force $\vec{F}$
Débit $Q$	Pression $p$
Excitation magnétique $\vec{H}$	Champ magnétique $\vec{B}$

Les grandeurs mesurables sont généralement directement accessibles par les instruments de mesure tandis que les grandeurs non mesurables passent obligatoirement par un phénomène physique la couplant à une grandeur mesurable.

Cette affirmation reste toutefois simpliste vu la complexité des instruments modernes de mesure qui utilisent de multiples couplages. Prenons un exemple rudimentaire pour illustrer ce propos : le dynamomètre. Le déplacement est une grandeur directement interprétable car il s'agit d'un mouvement. La force mesurée par le dynamomètre est invisible : elle est mesurée par l'intermédiaire d'un ressort, qui couple la force à un écrasement mesurable. En connaissant la raideur du ressort, il est possible de déduire du déplacement la force invisible.

Remarquons tout de suite que le produit de toutes les grandeurs mesurables et non mesurables associées aboutit à *une puissance*. La puissance est une grandeur transversale en mécanique et en physique. Les approches scientifiques modernes s'appuient sur la puissance comme dénominateur commun pour la construction des théories modélisant les phénomènes.

On admet que tout phénomène physique :

- peut être observé par une grandeur physique, que l'on peut modéliser mathématiquement par un espace vectoriel. Notons  $V$  la grandeur.

– agit en fonction des flux de puissance mis en jeux par la grandeur mesurable. Notons  $P(V)$  cette puissance.

La puissance est, du point de vu mathématique, une forme linéaire. En choisissant un produit scalaire adapté, elle permet donc d’associer à la grandeur  $V$  mesurable une grandeur duale  $F$  telle que la puissance s’exprime comme le produit scalaire

$$P(V) = \langle F, V \rangle$$

La grandeur duale est donc dérivée de la grandeur mesurable. On explique alors facilement pourquoi la dimension des grandeurs associées est égale (dimension 1 pour  $(I, U)$ , dimension 3 pour  $(\vec{V}, \vec{U})$ , etc...) ainsi que la similitude dans leur forme (scalaires, champs vectoriels, tenseurs, etc...).

### C.3 Norme $L^2$ pour les champs vectoriels

Quand il s’agit d’étudier les répartitions continues de matière  $\Sigma$ , on utilise des champs vectoriels pour représenter les grandeurs observables  $\vec{V}(M)$  et duales  $\vec{F}(M)$ . Le produit scalaire adapté utilisé est la norme  $L^2$  :

$$\langle F, V \rangle = \iiint_{\Sigma} \vec{F}(M) \cdot \vec{V}(M) dV$$

### C.4 Champ dual d’un champ de tenseur

Le mouvement des solides rigides est caractérisé par un champ vectoriel  $\vec{V}(M)$  présentant la bonne propriété d’être un champ de tenseur (champ équiprojectif). Il est complètement défini par les données de vitesse de rotation et de vitesse en un point :

$$\{\mathcal{V}\} = \begin{matrix} \vec{\Omega} \\ \vec{V}(A) \end{matrix}$$

Ce champ vectoriel est de dimension 6. Le champ dual  $\vec{F}(M)$  est donc lui aussi de dimension 6 et doit pouvoir s’exprimer de façon simple.

Cherchons les propriétés du champ  $\vec{F}(M)$ , dual du champ  $\vec{V}(M)$  vis-à-vis de la norme  $L^2$ .

$$\begin{aligned} \langle F, V \rangle &= \iiint_{\Sigma} \vec{F}(M) \cdot \vec{V}(M) dV = \iiint_{\Sigma} \vec{F}(M) \cdot (\vec{V}(A) + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{AM}) dV \\ \langle F, V \rangle &= \iiint_{\Sigma} [\vec{F}(M) \cdot \vec{V}(A) + \vec{\Omega} \cdot (\overrightarrow{AM} \wedge \vec{F}(M))] dV \\ \langle F, V \rangle &= \vec{V}(A) \cdot \iiint_{\Sigma} \vec{F}(M) dV + \vec{\Omega} \cdot \iiint_{\Sigma} \overrightarrow{AM} \wedge \vec{F}(M) dV \end{aligned}$$

Montrons que le champ  $\vec{M}(A) = \iiint_{\Sigma} \overrightarrow{AM} \wedge \vec{F}(M) dV$  est un champ de tenseur :

$$\begin{aligned} \vec{M}(A) &= \iiint_{\Sigma} \overrightarrow{AM} \wedge \vec{F}(M) dV = \iiint_{\Sigma} \overrightarrow{AB} \wedge \vec{F}(M) dV + \iiint_{\Sigma} \overrightarrow{BM} \wedge \vec{F}(M) dV \\ \vec{M}(A) &= \overrightarrow{AB} \wedge \iiint_{\Sigma} \vec{F}(M) dV + \vec{M}(B) \end{aligned}$$

Il s'agit donc bien d'un champ de torseur de résultante  $\iiint_{\Sigma} \vec{F}(M)dV$

La grandeur duale associée au torseur cinématique est donc un torseur (le torseur statique) qui s'exprime en fonction de la répartition locale d'effort  $\vec{F}(M)$  sous la forme :

$$\{\mathcal{T}\} = \left\{ \begin{array}{l} \int_{\Sigma} \vec{F}(M)dV \\ \int_{\Sigma} \vec{AM} \wedge \vec{F}(M)dV \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R} \\ \vec{M}(A) \end{array} \right\}$$

Le produit scalaire définissant la puissance revient à un comoment de torseur :

$$\langle F, V \rangle = \{\mathcal{T}\} \otimes \{\mathcal{V}\} = \vec{\Omega} \cdot \vec{M}(A) + \vec{V}(A) \cdot \vec{R}$$

On peut donc conclure que, pour l'étude des solides rigides, il n'est pas nécessaire de connaître la répartition locale des actions mécaniques : les 6 informations du torseur statique sont suffisantes. Ce n'est pas le cas pour étudier la déformation du solide bien entendu.

### C.5 Différentes grandeurs duales associées aux solides rigides

Dans le cadre du mouvement des solides rigides, il est possible d'associer différentes grandeurs duales : les actions mécaniques, les quantités d'accélération et les quantités de mouvement.

#### Puissance d'une action mécanique volumique (ou surfacique)

$$P_{\vec{F}(M),S/R} = \iiint_{\Sigma} \vec{F}(M) \cdot \vec{V}_{M,S/R} dV = \{\mathcal{T}_{\vec{F}}\} \otimes \{\mathcal{V}_{S/R}\}$$

$$\text{avec } \{\mathcal{T}_{\vec{F}}\} = \left\{ \begin{array}{l} \int_{\Sigma} \vec{F}(M)dV \\ \int_{\Sigma} \vec{AM} \wedge \vec{F}(M)dV \end{array} \right\}$$

La puissance d'une action surfacique se traite de façon identique avec une intégrale surfacique plutôt que volumique.

#### Puissance des quantités d'accélération

$$P_{acc,S/R} = \iiint_{\Sigma} \vec{\Gamma}_{M,S/R} \cdot \vec{V}_{M,S/R} dm = \{\mathcal{D}_{S/R}\} \otimes \{\mathcal{V}_{S/R}\}$$

$$\text{avec } \{\mathcal{D}_{S/R}\} = \left\{ \begin{array}{l} \int_{\Sigma} \vec{\Gamma}_{M,S/R} dm \\ \int_{\Sigma} \vec{AM} \wedge \vec{\Gamma}_{M,S/R} dm \end{array} \right\}$$

La notion de puissance des accélérations permet de déduire naturellement la forme du torseur dynamique dont la définition avait été posée au début du chapitre.

#### Énergie cinétique et quantités de mouvement

$$2.T_{S/R} = \iiint_{\Sigma} \vec{V}_{M,S/R} \cdot \vec{V}_{M,S/R} dm = \{\mathcal{C}_{S/R}\} \otimes \{\mathcal{V}_{S/R}\}$$

$$\text{avec } \{\mathcal{C}_{S/R}\} = \left\{ \begin{array}{l} \int_{\Sigma} \vec{V}_{M,S/R} dm \\ \int_{\Sigma} \vec{AM} \wedge \vec{V}_{M,S/R} dm \end{array} \right\}$$

On retrouve cette fois la définition de l'énergie cinétique  $T_{S/R}$  à partir de son expression locale.

Notons que, sur les expressions intégrales, on retrouve aisément la propriété :

$$\frac{dT_{S/R}}{dt} = \frac{1}{2} \cdot \frac{d}{dt} \iiint_{\Sigma} \vec{V}_{M,S/R} \cdot \vec{V}_{M,S/R} dm = \iiint_{\Sigma} \vec{\Gamma}_{M,S/R} \cdot \vec{V}_{M,S/R} dm = P_{acc,S/R}$$

Intervertir l'intégration et la dérivée en temps ne pose pas de soucis dans le cadre d'un champ massique (voir paragraphe C.6).

## C.6 Complément : Théorème de transport et conservation de la masse

Le théorème de transport (admis) est une relation mathématique indiquant que pour tout champ (vectoriel ou scalaire)  $\vec{f}(M, t)$  défini sur un système matériel  $\Sigma$  en mouvement :

$$\frac{d}{dt/R} \iiint_{\Sigma} \vec{f}(M, t) \cdot dV = \iiint_{\Sigma} \left[ \frac{d\vec{f}}{dt/R} (M, t) + \vec{f} \cdot \text{div} \vec{V} \right] \cdot dV$$

**Application à la conservation de la masse :**  $\frac{d}{dt/R} \iiint_{\Sigma} \rho(M, t) \cdot dV = 0$

$$\Leftrightarrow \iiint_{\Sigma} \left[ \frac{d\rho}{dt/R} (M, t) + \rho \cdot \text{div} \vec{V} \right] \cdot dV = 0$$

Cette relation étant valable pour tout  $\Sigma$ , aussi petit soit-il, on en déduit la relation locale :

$$\frac{d\rho}{dt/R} (M, t) + \rho \cdot \text{div} \vec{V} = 0.$$

**Application aux champs massiques :** Soit  $\vec{g}(M, t)$  une fonction massique, alors le théorème de transport se simplifie grâce à la propriété de conservation de la masse :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt/R} \iiint_{\Sigma} \vec{g}(M, t) \cdot \rho(M) \cdot dV \\ = \iiint_{\Sigma} \left[ \frac{d\vec{g}}{dt/R} (M, t) \cdot \rho(M) + \vec{g}(M, t) \cdot \frac{d\rho(M)}{dt} + \vec{g}(M, t) \cdot \rho(M) \cdot \text{div} \vec{V} \right] \cdot dV \\ = \iiint_{\Sigma} \frac{d\vec{g}}{dt/R} (M, t) \cdot \rho(M) \cdot dV \end{aligned}$$

En posant  $dm = \rho(M) \cdot dV$ , on peut écrire cette relation sous la forme d'une intervention de la dérivée et de l'intégrale :

$$\frac{d}{dt/R} \iiint_{\Sigma} \vec{g}(M, t) \cdot dm = \iiint_{\Sigma} \frac{d\vec{g}}{dt/R} (M, t) \cdot dm$$

Cette propriété n'est toutefois valable que pour les fonctions massiques.