Université Internationale de Casablanca
LAUREATE INTERNATIONAL UNIVERSITIES

Tronc commun cycle d'ingénieurs

Cours de Mécanique des fluides

Professeur BENHADOU

Année universitaire 2017/2018

Plan du cour

Prérequis

- Physique générale:
  - Mécanique du point
  - Mécanique du solide rigide.
- Mathématique:
  - Equations différentielles ordinaires
  - Equations aux dérivées partielles
- Mécanique des milieux continus:
  - Milieu continu
  - Equations de conservation

Acquis du cours

A la fin de ce cours l'étudiant doit être capable de:

- Décrire les propriétés physiques de fluides
- Déterminer la nature du régime d'écoulement
- Enoncer les principaux nombres sans dimension
- Calculer la pression au sein d'un fluide
- Enoncer les principes de conservation
- Savoir utiliser les méthodes de résolution des équations du mouvement

Introduction à la mécanique des fluides

A- Concepts de base
B- Caractéristiques physiques

Mécanique des fluides

La mécanique des fluides étudie le comportement des fluides :

- au repos : *hydrostatique*
- en mouvement : *hydrodynamique*

La mécanique des fluides est la base du *dimensionnement des conduites* de fluides et des *mécanismes de transfert* des fluides.

Fluide

Un ***fluide*** est constitué de ***molécules mobiles*** entre elles. Il n'a ***pas de forme*** propre (prend celle du récipient).

On distingue ***deux types*** de fluides :

les liquides

- Les molécules occupent un volume indépendant de celui du récipient.
- Sont incompressibles

les gaz :

- Les molécules occupent tout l'espace de leur enceinte.
- Sont compressible et expansibles (PV = nRT)

Un fluide

- pas de forme propre
- s'écoule si on lui applique une force
- prend la forme du récipient
- Les molécules interagissent (peu pour les gaz)
- Gardent une certaine mobilité les unes par rapport aux autres.
- Pas d'ordre comme dans un solide (ordre local pour les liquides)

Quelques fluides

Monophasiques

eau, air, huile, métaux fondus, ...

Multiphasiques

- aérosols : brouillard, essence dans carburateur, fumée
- émulsions : lait, vinaigrette, anisette, shampoing...
- liquides à bulles : sodas, surface de l'océan, distillation, fluides de refroidissement, mousses

« Complexes »

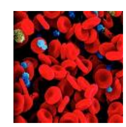
- magma, plasmas, ferrofluides
- polymères, cristaux liquides
- milieux granulaires (sable, poudres)

Quelques fluides

Ferrofluides

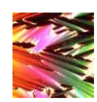
Lait

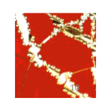
Liquide à bulles



Sang

Cristaux liquides





Description macroscopique d'un fluide

Microscopique : ce qu'on ne voit pas directement

- Atomes ou molécules + ou - libres les uns / aux autres
- Liquide = fort encombrement / interactions forte
- Gaz = faible encombrement / interactions quasi nulles

Macroscopique : à notre échelle

- un fluide apparaît comme un ***milieu continu***
- il exerce/subit des forces sur/par notre environnement

On cherche à représenter ce que l'on voit par des variables et des équations continues / à x,y,z.

On veut donc « supprimer » les inhomogénéités microscopiques

=> homogénéisation

Si possible un modèle valable pour gaz ET liquides

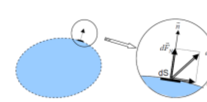
Fluide : réel et parfait

Fluide réel :

Glissement des molécules les unes sur les autres

Frottement

Viscosité



Ecoulement avec dégagement de la chaleur

Fluide parfait:

Il n'y a pas de frottements moléculaires

Viscosité = 0

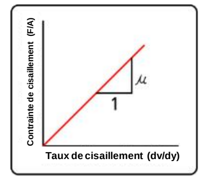
Écoulement sans perte d'énergie

Fluide Newtonien et non Newtonien

- Les fluides ***« Newtoniens »*** ont une ***viscosité constante*** ou qui ne ***peut varier*** qu'en fonction de la ***température***.
  Exemples: l'eau, l'air et la plupart des gaz
- Les fluides ***« non Newtoniens »*** qui ont la particularité d'avoir leur ***viscosité*** qui varie en fonction de la ***vitesse*** et des ***contraintes*** qu'ils subissent lors de ***l'écoulement***.
  Exemples: le sang, les gels, les boues, les pâtes, les suspensions, les émulsions...

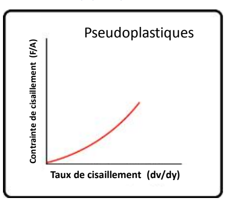
Fluides Newtoniens

- Fluide Newtonien:
  - Viscosité constante
  - Ne dépend pas du taux de cisaillement

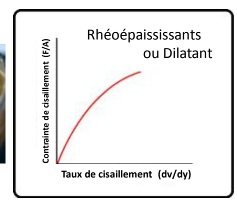



Fluides non-Newtoniens

- Fluide présentant une viscosité variable en f(x) du taux de cisaillement appliqué.

Fluides non-Newtoniens

Gaz parfait

- L'équation d'état :

$$P.V = n.R.T$$

- P : pression en Pa
- V: volume en m^3
- n: nombre de moles
- R : constante des GP = 8,315 J. $mol^{-1}.K^{-1}$
- T : température en °K

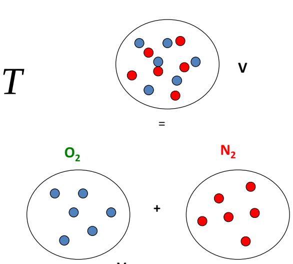
Mélange de gaz parfait

- Pression partielle :

$$P_i .V = n_i .R.T$$

- Pression totale :

$$P = \sum_i P_i$$



Gaz réels

- Équation de Van Der Waals

$$(P+n^2\frac{a}{V^2})(V-nb)=n.R.T$$

a/V2 tient compte des forces d'interaction (pression interne)

b (covolume) volume moléculaire non négligeable seul V-nb est disponible

Constantes de van der Waals

GAZ	a [$m^6.Pa.mol^{-2}$]	b.10^{-3} [$m^3.mol^{-1}$]
H_2	0.0244	0.02661
O_2	0.136	0.03183
N_2	0.139	0.03913
CH_4	0.225	0.04278

Phénomènes de surface

Propriétés particulière du liquide avec sa surface en contact avec une autre phase :

- **Liquide – liquide :** tension interfaciale (émulsions)
- **Liquide – solide :** mouillement
  (capillarité - phénomène de flottation)
- **Liquide – gaz :** tension superficielle

=>Contradiction des lois de la pesanteur

Caractéristiques physiques

- Masse volumique ρ
- Poids volumique ϖ
- Densité d
- Viscosité

Masse volumique

La masse volumique est une grandeur physique caractérisant la masse d'un matériau par unité de volume.

$$\rho = \frac{m}{v}$$

ρ : Masse volumique en (kg/m^3),
m: masse en (kg),
v :volume en (m^3)

Masse volumique

ρ (x,y,z,t) en kg/m^3

Eau	1000 kg/m^3
Mercure	13540 kg/m^3
Air (20°C, 1 bar)	1.3 kg /m^3

A priori non uniforme dans l'espace

Varie avec la température (même pour un liquide) : **dilatabilité**
Varie avec la pression (peu pour un liquide) : **compressibilité**

Une approximation bien utile :
$\rho = \rho_0$ **constant** par rapport à t et x, y, z

le fluide incompressible

$$M(t) = \iiint_V \rho \, dV = \rho V$$ Masse de fluide dans V

Quelques masse volumique

Fluide	Masse volumique (kg/m3)
Eau	1000
Essence	750
Huile d'olive	$0{,}918.\ 10^3$
Mercure	$13{,}546.\ 10^3$
Benzène	0,880. 103
Air	$0{,}001205.\ 10^3$
Hydrogène	$0{,}000085.\ 10^3$
Méthane	$0{,}000717.\ 10^3$

25

Poids volumique

- Le poids volumique est le poids par unité de volume d'un matériau.

$$\varpi = \frac{m.g}{v} = \rho.\, g$$

ϖ : Poids volumique en N/ m^3.
m : masse en kg.
g : accélération de la pesanteur en m/s^2
V : volume en m^3.

26

Densité

- La densité exprime le rapport de la masse d'un objet à celle qu'aurait le même volume constitué d'eau.
- Pour un gaz, c'est le rapport de la masse à celle qu'aurait le même volume d'air.

$$d = \frac{\text{masse volumique du fluide}}{\text{masse volumique d'un fluide de référence}} = \frac{\rho}{\rho\ réf}$$

27

Viscosité

- La viscosité est une grandeur qui caractérise les ***frottements internes*** du fluide, autrement dit sa ***capacité à s'écouler***.
- C'est la résistance d'un fluide à son écoulement lorsqu'il est soumis à l'application d'une force.

28

Viscosité

- Lorsqu'un fluide entre en mouvement:
  - Augmentation de la friction interne
  - Agit en opposition à l'écoulement

29

Propriétés physiques des fluides

- Viscosité dynamique (μ)
  - Résistance d'un fluide à l'écoulement
    - N-sec/ m^2 ou Pa*s
    - Formule → $\boxed{\tau = \mu \frac{du}{dy}}$
- Viscosité cinématique (ν)
  - Viscosité dynamique par unité de densité
    - m^2/sec
    - Formule → $\boxed{\upsilon = \frac{\mu}{\rho}}$

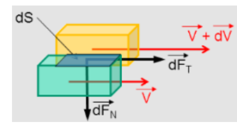
30

Viscosité dynamique

- La viscosité dynamique exprime la proportionnalité entre la ***force qu'il faut exercer*** sur une plaque lorsqu'elle est plongée dans un courant et ***la variation de vitesse*** des veines de fluide entre les 2 faces de la plaque.
- Elle caractérise la ***résistance à l'écoulement*** laminaire d'un fluide incompressible.

Viscosité dynamique

Considérons deux couches de fluide adjacentes distantes de **Δ**z. La force de frottement F qui s'exerce à la surface de séparation de ces deux couches s'oppose au glissement d'une couche sur l'autre. Elle est proportionnelle à la différence de vitesse des couches soit **Δ**v, à leur surface S et inversement proportionnelle à **Δ**z :



Viscosité dynamique

Le facteur de proportionnalité μ est le coefficient de viscosité dynamique du fluide.

$$F = \mu . S . \frac{\Delta v}{\Delta z}$$

F : force de glissement entre les couches en (N),
μ : Viscosité dynamique en (kg/m.s),
S : surface de contact entre deux couches en (m2),
Δv : Écart de vitesse entre deux couches en (m/s),
Δz: Distance entre deux couches en (m).

Viscosité dynamique

Dans le système international (SI), l'unité de la viscosité dynamique est le Pascal seconde (Pa.s) ou Poiseuille (Pl) : 1 Pa.s = 1 Pl = 1 kg/m.s

Viscosité dynamique

Fluide	μ (Pa·s)
eau (0 °C)	$1,787 \cdot 10^{-3}$
eau (20 °C)	$1,002 \cdot 10^{-3}$
eau (100 °C)	$0,2818 \cdot 10^{-3}$
Huile d'olive (20 °C)	$100 \cdot 10^{-3}$
glycérol (20 °C)	$1000 \cdot 10^{-3}$
Hydrogène (20 °C)	$0,86 \cdot 10^{-5}$
Oxygène (20 °C)	$1,95 \cdot 10^{-5}$

Viscosité cinématique

La viscosité cinématique représente la capacité de rétention des particules du fluide et quantifie sa capacité à s'écouler.

$$\upsilon = \frac{\mu}{\rho}$$

L'unité de la viscosité cinématique est le (m^2/s).
le Stokes (St) est utilisé comme unité de mesure de la viscosité cinématique. 1 St= 10^{-4} m^2/s.

Viscosité cinématique

Influence de la température :

Lorsque la température augmente, la viscosité d'un fluide décroît car sa densité diminue.

Différence entre viscosité dynamique et viscosité cinématique

La viscosité cinématique caractérise ***le temps d'écoulement*** d'un liquide. Par contre, la viscosité dynamique correspond à la réalité physique du ***comportement d'un fluide soumis à une sollicitation*** (effort).

Exercices

Statique des fluides

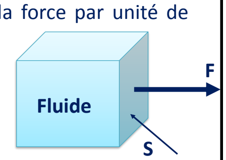
L'hydrostatique

- La ***statique des fluides*** s'occupe des conditions d'***équilibre*** des fluides au ***repos*** et ***l'interaction*** des ***fluides avec les surfaces*** et les corps solides immergés.

La pression

- La ***pression*** est définie comme une ***force*** dirigée vers l'extérieur qui ***s'exerce perpendiculairement*** à la ***surface de la paroi***.
- La pression est le rapport de la force par unité de surface.

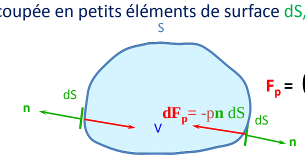
$$P = \frac{F}{S}$$



- Unité : Pa
- 1 Pa = 1 N/m^2 =1 J/m^3 = 1 kg/m. s^2

Force de pression

Expression générale : on considère un volume V fermé par une surface S découpée en petits éléments de surface dS, de normale sortante n



$$\mathbf{F_p} = \oiint_S \mathbf{dF_p}$$

$$\boxed{\mathbf{F_p} = \oiint_S -p\,\mathbf{n}\,dS}$$

A retenir

Remarque importante : en vertu du théorème de la normale $\oiint_{S_{fermée}} \mathbf{n}\,dS = \mathbf{0}$,

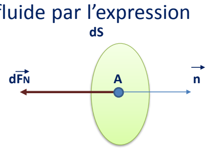
on peut ajouter ou soustraire une **constante** arbitraire à p :

$$\boxed{\mathbf{F_p} = \oiint_S -(p-p_0)\,\mathbf{n}\,dS}$$

Pression en point d'un fluide

- C'est l'intensité de la composante normale de la force qu'exerce le fluide sur l'unité de surface. Elle est définie en un point A d'un fluide par l'expression suivante :

$$P_A = \frac{\|\vec{dF_N}\|}{dS}$$



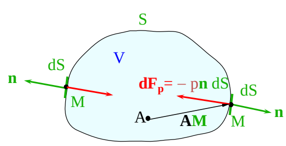
- PA : pression en A en Pa
- dS : Surface élémentaire de la facette de centre A en m^2,
- $\vec{n}$: Vecteur unitaire en A de la normale extérieure a la surface,
- $\vec{dF_N}$: Composante normale de la force élémentaire de pression qui s'exerce sur la surface en N.

Force de pression élémentaire

- Sur la surface de centre A, d'aire dS, orientée par sa normale extérieure $\vec{n}$, la force de pression élémentaire $\vec{dF}$ s'exprime par :

$$\vec{dF} = -P_A \cdot dS \cdot \vec{n}$$

Moment des forces de pression



Moment total en A de $\mathbf{F_p}$ = somme des moments élémentaires en A des $d\mathbf{F_p}$

$$M_A(\mathbf{F_p}) = \oiint_S \mathbf{AM} \wedge d\mathbf{F_p}$$

soit :

$$M_A(\mathbf{F_p}) = \oiint_S \mathbf{AM} \wedge -p\mathbf{n}\,dS$$

Le second théorème de la normale permet de retrancher une constante à p :

$$M_A(\mathbf{F_p}) = \oiint_S \mathbf{AM} \wedge -(p-p_0)\,\mathbf{n}\,dS$$

La pression est égale au quotient de la valeur F de la force pressante par l'aire S de la surface pressée.

Unités :

- Le pascal est l'unité du système international de la pression.

On le note Pa

1 Pa est la pression exercée par une force de 1 N sur une surface de 1 m^2

$$1Pa = \frac{1N}{1m^2}$$

Autres Unités :

Le bar :

1 bar est la pression exercée par une force de 1 daN sur une surface de 1 cm2

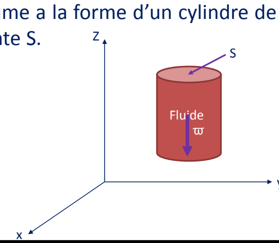
1 bar = 10^5 Pa

- L'atmosphère:

1 atm = 1,01325 × 10^5 Pa
(valeur de la pression atmosphérique normale).

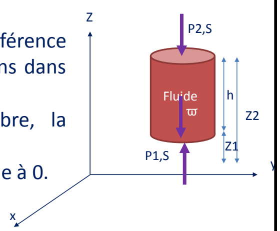
Equation fondamentale de l'hydrostatique

Considérons un élément de volume d'un fluide incompressible (liquide homogène de poids volumique ϖ). Cet élément de volume a la forme d'un cylindre de section transversale constante S.



Equation fondamentale de l'hydrostatique

Considérons 2 sections situées à des distances Z_1 et Z_2 par rapport à un plan de référence OY. P_1 et P_2 sont les pressions dans ces 2 sections.
Le fluide étant en équilibre, la somme des forces dans la direction verticale est égale à 0.



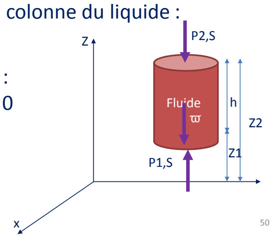
49

Equation fondamentale de l'hydrostatique

- Force due à P_1 : $F_1 = P_1 .S$
- Force due à P_2 : $F_2 = P_2 .S$
- Force due au poids de la colonne du liquide :
  $w = mg = \rho g S(Z_2 - Z_1)$

Le bilan des forces s'écrit :
$P_1 .S - P_2 .S - \rho g S (Z_2 - Z_1) = 0$
Donc:

$$P_1 - P_2 = \rho g(Z_2 - Z_1)$$



50

Equation fondamentale de l'hydrostatique

L'équation fondamentale de l'hydrostatique:

$$P_1 - P_2 = \rho g(Z_2 - Z_1)$$

Il existe autre forme de l'équation fondamentale de l'hydrostatique.

51

Equation fondamentale de l'hydrostatique

L'équation fondamentale de l'hydrostatique peut s'écrire d'une autre manière:

$$P_1 + \rho g Z_1 = P_2 + \rho g Z_2$$

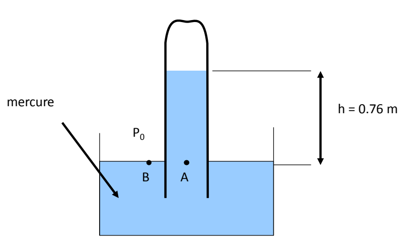
$$\frac{P_1}{\rho g} + Z_1 = \frac{P_2}{\rho g} + Z_2$$

Pour un point quelconque d'altitude Z, ou règne la pression p :

$$\frac{P}{\rho g} + Z = cte$$

52

Expérience de Torricelli : Mesure de la pression



$$h = \frac{P_0}{\rho . g} = \frac{10^5}{13{,}6x10^3 x10} = 0{,}76 \text{ m}$$

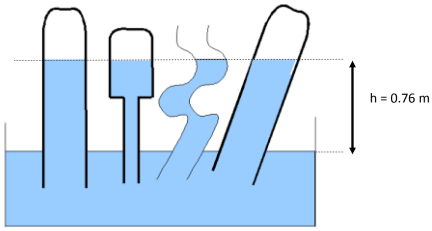
53

Expérience de Torricelli

- On remplit un tube de verre de mercure que l'on retourne dans un cuve de mercure, le mercure descend et se stabilise à une hauteur h.
- La pression au dessus de la colonne de mercure est négligeable (peu de vapeur de mercure).
- La pression du à la colonne de mercure en A s'équilibre avec la pression atmosphérique en B puisque ces 2 point sont à la même altitude.
- La même expérience avec l'eau donne une hauteur de 10,33 m.

54

Expérience de Torricelli



55

Application

56

Théorème de Pascal

Enoncé

Dans un fluide ***incompressible*** en équilibre, toute variation de pression en un point entraîne la ***même variation de pression*** en tout autre point.

57

Théorème de Pascal

Supposons qu'au point M_1 intervienne une variation de pression telle que celle-ci devienne $P_1 + \Delta P_1$. ΔP étant un nombre algébrique. Calculons la variation de pression ΔP_2 qui en résulte en M_2.

Appliquons la relation fondamentale de l'hydrostatique entre M_1 et M_2 pour le fluide

- à l'état initial: $P_1 - P_2 = \varpi (Z_2 - Z_1)$ (1)
- à l'état final :$(P1 + \Delta P1) - (P2 + \Delta P2) = \varpi (Z2 - Z1)$ (2)

En faisant la différence entre les équations (2) et (1) on obtient :

$$\Delta P_1 - \Delta P_2 = 0$$

D'où $$\Delta P_1 = \Delta P_2$$

58

Application du Théorème de Pascal: Tube en U

Considérons un tube en U rempli avec deux liquides non miscibles. Le principe de Pascal implique que les pressions mesurées aux points 1 et 2 du tube sont égales

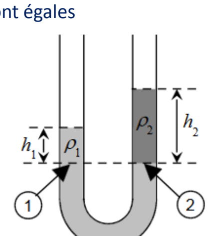
En équation, cela revient à écrire que :

$\rho_1 \cdot g \cdot h_1 + P_{surface\ 1} = \rho_2 \cdot g \cdot h_2 + P_{surface2}$

Ici, $P_{surface\ 1} = P_{surface\ 2} = P_{atmosphérique}$

Après simplification :

$\rho_1 \cdot h_1 = \rho_2 \cdot h_2$



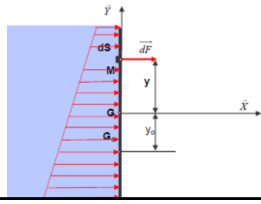
59

Application

60

Poussée d'un fluide sur une paroi verticale

Considérons une paroi verticale possédant un axe de symétrie $(G,\vec{Y})$. G est son centre de surface.
D'un coté de la paroi il y a un fluide de poids volumique ϖ , de l'autre coté, il y a de l'air à la pression atmosphérique P_{atm}.
On désigne par PG la pression au centre de surface G du coté fluide.



61

Poussée d'un fluide sur une paroi verticale

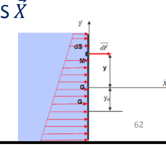
Eléments de réduction du torseur des forces de pression
Au point G: Pression P_G.
Cherchons la pression P_M au point M.
Appliquons la relation fondamentale de l'hydrostatique :

$$P_M - P_G = \varpi\ (Y_G - Y_M)$$

Dans le repère $(G, \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$ défini sur la figure : y_G=0 et y_M =y:

$$P_M = P_G - \varpi.y$$

la force de pression en M : $d\vec{F} = (P_G - \varpi.y)\ dS\ \vec{X}$



62

Poussée d'un fluide sur une paroi verticale

Eléments de réduction du torseur des forces de pression
Soit $\{\tau_{\text{poussée}}\}$ le torseur associé aux forces de pression :

$$\{\tau_{\text{poussée}}\}_G = \begin{cases} \vec{R} = \int_S d\vec{F} \\ \vec{M}G = \int_S \overrightarrow{GM} \wedge d\vec{F} \end{cases}$$

Résultante:
$\vec{R} = \int_S (P_G - \varpi.y)\ dS\ \vec{X} = \left[P_G \int_S dS - \varpi \int_S y\ dS\right]\vec{X}$
$\int dS\ = S\ \textit{est la surface de la paroi}$
$\int$ y.dS = y_G S = 0 Moment statique de la surface S par rapport à l'axe (G, Z), donc:

$$\vec{R} = P_G . S\ \vec{X}$$

63

Poussée d'un fluide sur une paroi verticale

Moment:

$$\vec{M}_G = \int \overrightarrow{GM} \wedge d\vec{F}$$

Dans le repère $(G, \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$:
$\overrightarrow{GM}$ = y. $\vec{Y}$ et $d\vec{F} = (P_G - \varpi.y)\ dS\ \vec{X}$ ➔ $\vec{M}_G = \left[y.\ \vec{Y} \wedge (PG - \varpi.y)\ dS\ \vec{X}\right]$
Sachant que Y ∧ X = −Z :
$\vec{M}_G = \left[PG \int y\ ds - \varpi \int y^2 ds\right] \overrightarrow{-Z}$ ➔
$\int y\ ds$ = y_G.S = 0 et $\int y^2 ds$ = $I_{(G,\vec{Z})}$ Moment quadratique de la surface S par rapport à l'axe $(G,\vec{Z})$ passant par le centre de surface G.

$$\vec{M}_G = \varpi\ I_{(G,\vec{Z})}\ \vec{Z}$$

64

Poussée d'un fluide sur une paroi verticale

Le torseur associé aux forces de pression :

$$\{\tau_{\text{poussée}}\} = \begin{cases} PG\ .S\ \vec{X} \\ \varpi\ I(G,\vec{Z})\ \vec{Z} \end{cases}$$

65

Poussée d'un fluide sur une paroi verticale

Centre de poussée

Déterminons le point G_0 où le moment résultant des forces de pression est nul.
En se basant sur l'hypothèse de symétrie, si ce point existe il appartient à l'axe $(G, \vec{Y})$ et il est tel que :
$\vec{M}_{G0} = \vec{M}_G + \overrightarrow{G_0G} \wedge \vec{R} = 0$.
Ecrivons alors que : $\vec{M}_G = \overrightarrow{G_0G} \wedge \vec{R}$
Avec les résultats précédents, on obtient :
$y_0.\ \vec{Y} \wedge P_G\ S\ \vec{X} = \varpi\ I(G,\vec{Z})\ \vec{Z}$

$$➔\ y_0 = \frac{\varpi\ I(G,\vec{Z})}{P_G\ S}$$

G_0 s'appelle le centre de poussée de la paroi. Il est toujours **au-dessous du centre de surface G**

66

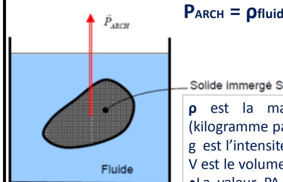
Application

Théorème d'Archimède

Enoncé

Tout corps plongé dans un fluide reçoit de la part de ce fluide une force (poussée) verticale, vers le haut dont l'intensité est égale au poids du volume de fluide déplacé.

P_{ARCH} = ρfluide. Vimm. g



ρ est la masse volumique du fluide en kg/m3 (kilogramme par mètre cube) ;
g est l'intensité de la pesanteur en m/s2
V est le volume du fluide déplacé en m3 (mètre cube) ;
•La valeur PA est en newton (N).

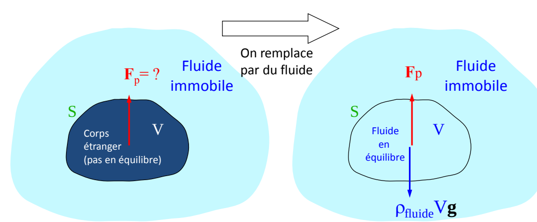
Poussée d'Archimède

Tout corps solide immergé dans un fluide en équilibre est soumis de la part de celui-ci à des forces de pression $d\vec{F}$ dont les actions mécaniques sont modélisables au centre de gravité du fluide déplacé par un glisseur dont la résultante est directement opposée au poids du fluide déplacé.

$$\{\tau\ E2 \rightarrow E1\}_G = \begin{cases} \vec{P} \\ \vec{0} \end{cases}$$

Force d'Archimède

- Rappel : Ce n'est rien d'autre que la résultante des forces de pression.
- On cherche en général la force exercée sur un corps étranger au fluide (solide ou bulle dans liquide, ballon d'hélium dans l'air...)



Le champ de pression est le même dans les deux cas, donc F_p aussi.
L'équilibre dans le deuxième cas montre que $F_p = -\rho_{fluide}V\mathbf{g}$

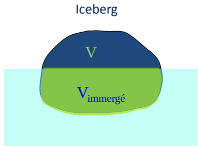
Et pourtant, il flotte...

On peut généraliser le raisonnement à un objet **partiellement immergé**.

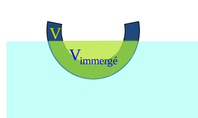
On retiendra : $F_p = -\rho_{fluide}V_{immergé}\,\mathbf{g}$

Dans ce cas **l'équilibre est possible** :

Iceberg



Bateau en alu



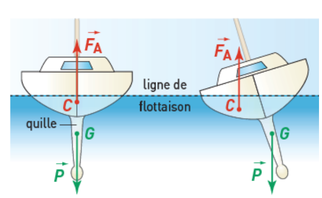
$\rho_{corps} + F_p = 0 \Rightarrow \rho_{corps}V = \rho_{fluide}V_{immergé}$

Le corps est moins dense :
$\rho_{fluide} > \rho_{corps}$
$V_{immergé} < V$

Le corps est pourtant plus dense :
$\rho_{corps} > \rho_{fluide}$
mais $V < V_{immergé}$

Condition d'équilibre d'un corps flottant

Le centre de poussée C est <u>au dessus</u> du centre de gravité G :
Si les deux points ne sont pas alignés, le couple de forces qui apparaît redressera le solide dans sa position verticale : l'équilibre est alors <u>stable</u>.



Récap

La statique des fluides est basée principalement sur :

a) La différence de pression entre deux points:

$$P1 - P2 = \rho g(Z2\text{-}Z1) = \varpi\,(Z2\text{-}Z1)$$

b) Toute variation de pression en un point engendre la même variation de pression en tout autre point d'après le théorème de Pascal.

c) Le torseur associé aux forces de pression d'un fluide sur une paroi plane verticale est : $\{\tau \text{ poussée}\} = \begin{cases} PG\,.S\,\vec{X} \\ \varpi\, I(G,\vec{Z})\,\vec{Z} \end{cases}$

d) La position du centre de poussée est $y0 = \dfrac{\varpi\, I(G,\vec{z})}{PG\, S}$

e) Tout corps plongé dans un fluide subit une force verticale, orientée vers le haut c'est la poussée d'Archimède et dont l'intensité est égale au poids du volume de fluide déplacé.

73

Exercices

74

Dynamique des fluides incompressibles parfaits

A- Equation de continuité (conservation de la masse),
B- Théorème de Bernoulli (conservation de l'énergie),
C- Théorème d'Euler (conservation de la quantité de mouvement)

75

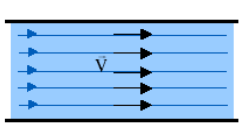
Ecoulement permanent

L'écoulement d'un fluide est dit ***permanent*** si le champ des ***vecteurs vitesse des particules*** fluides est ***constant dans le temps.***

76

Fluide parfait

Fluide Parfait



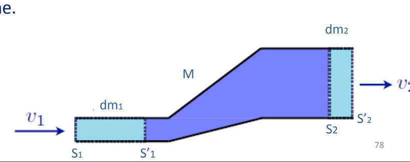
$v_{moy} = v_o$

77

Equation de continuité

On considère une pipe-line d'un fluide incompressible de masse volumique ρ animée d'un écoulement permanent.

- S_1 et S_2 sont la section d'entrée et la section de sortie du fluide à l'instant t,
- S'_1 et S'_2 sont les sections d'entrée et de sortie du fluide à l'instant t'=(t+dt),
- V1 et V2 les vecteurs vitesse d'écoulement à travers les sections S_1 et S_2 de la veine.



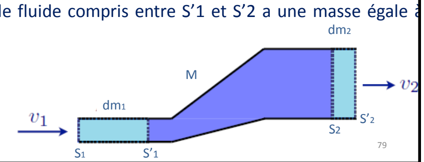
78

Equation de continuité

- dx1 et dx2 : les déplacements des sections S1 et S2 pendant l'intervalle de temps dt,
- dm1 : masse élémentaire entrante comprise entre les sections S1 et S'1,
- dm2 : masse élémentaire sortante comprise entre les sections S2 et S'2,
- M : masse comprise entre S1 et S2,
- dV1 : volume élémentaire entrant compris entre les sections S1 et S'1,
- dV2 : volume élémentaire sortant compris entre les sections S2 et S'2,

A l'instant t : le fluide compris entre S1 et S2 a une masse égale à (dm1+ M)

A l'instant t+dt : le fluide compris entre S'1 et S'2 a une masse égale à (M+ dm2).



Equation de continuité

Par conservation de la masse:

$dm_1 + M = M + dm_2 \rightarrow dm_1 = dm_2$

Donc $\rho_1 dV_1 = \rho_2 dV_2$ ou $\rho_1.S_1 dx_1 = \rho_2 S_2 dx_2$

En divisant par dt :

$\rho_1.S_1 \frac{dx1}{dt} = \rho_2 S_2 \frac{dx2}{dt}$

Puisque le fluide est incompressible : $\rho_1 = \rho_2 = \rho$

On aboutit à l'équation de continuité:

$$S_1 V_1 = S_2 V_2$$

Débit massique

Le débit massique est la masse de fluide par unité de temps qui traverse une section droite quelconque de la conduite.

C'est la limite du rapport $\frac{dm}{dt}$ quand dt tend vers 0.

$$Qm = \frac{dm}{dt}$$

Avec:

- dm : masse élémentaire en (kg) qui traverse la section pendant un intervalle de temps dt .
- dt : intervalle de temps en (s)

Débit massique

Nous avons:

$$Qm = \frac{dm}{dt} = \rho_1.S_1 \frac{dx1}{dt} = \rho_2 S_2 \frac{dx2}{dt}$$

avec :

$\frac{dx1}{dt} = V_1 = ||\vec{V}_1||$: Vitesse moyenne d'écoulement de la veine fluide à travers S_1,

$\frac{dx2}{dt} = V_2 = ||\vec{V}_2||$: Vitesse moyenne d'écoulement de la veine fluide à travers S_2

D'où:

$$Qm = \rho_1.S_1.V_1 = \rho_2 S_2.V_2$$

Pour une section droite quelconque et une vitesse moyenne :

$$\mathbf{Q_m = \rho.S.V}$$

Débit Volumique

Le débit volumique est le volume du fluide par unité de temps qui traverse une section droite quelconque de la conduite.

C'est la limite du rapport $\frac{dv}{dt}$ quand dt tend vers 0.

$$\mathbf{Q_v = \frac{dv}{dt}}$$

Avec

- d_v : Volume élémentaire, en (m^3), ayant traversé une surface S pendant un intervalle de temps dt,
- dt : Intervalle de temps en secondes (s),

Débit Volumique

Nous avons:

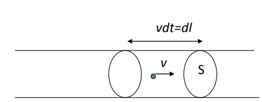
$$dv = \frac{dm}{\rho}$$

Donc

$$Qv = \frac{Qm}{\rho}$$

Alors

$$\mathbf{Qv = S.V}$$



Relation entre débit massique et débit volumique

La relation entre le débit massique et le débit volumique :

$$Q_m = \rho \, Q_v$$

Énergie dans un fluide

- **Énergie potentielle**

Capacité à effectuer un travail en f(x) de la position dans un plan de référence.

- **Énergie cinétique**

Capacité d'un fluide à effectuer un travail en f(x) de sa vélocité

- **Énergie de pression**

Capacité d'un fluide à effectuer un travail en vertu de sa pression

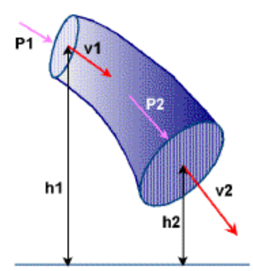
Théorème de Bernoulli

L'équation de Bernoulli est utilisé lorsque:

- L'écoulement est stationnaire
- La masse volumique du fluide ne change pas
- Le fluide est incompressible

Théorème de Bernoulli

- Bilan d'énergie
  - Travail de pression
  - Energie potentielle
  - Energie cinétique



Théorème de Bernoulli

Énergie potentielle

Énergie cinétique

$$\boxed{\frac{p_1}{\rho_1} + \frac{V_1^2}{2} + gz_1 = \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{V_2^2}{2} + gz_2 = \text{Constante}}$$

Énergie de pression

Théorème de Bernoulli: cas d'un écoulement avec échange de travail

$$\boxed{\frac{p_2 - p_1}{\rho} + \frac{V_2^2 - V_1^2}{2} + g(z_2 - z_1) = \frac{Pnet}{Qm}}$$

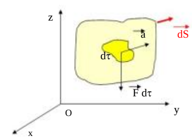
Application

Équation d'Euler

Définition

on ne considère que des fluides dont on peut négliger la viscosité; il n'y a pas de frottements entre les différentes couches de fluides; ces fluides sont dits parfaits.

Forme générale des équations d'Euler



Sur chaque élément de volume de fluide, on définit :

- ρ la masse volumique
- $\vec{F}$ la densité volumique de force
- $\vec{a}$ l'accélération par rapport au référentiel galiléen O, x, y, z

Équation d'Euler

Écriture de l'équation intégrale

Écrivons la relation fondamentale de la dynamique relativement au référentiel Galiléen O,x ,y,z :

$$\iiint \vec{F}\, d\tau + \iint_S -P\, d\vec{S} = \iiint \rho\, \vec{a}\, d\tau$$

En utilisant la formule du gradient :

$$\iint_S -P\, d\vec{S} = \iiint -\overrightarrow{grad} P\, d\tau$$

On obtient donc :

$$\iiint (\vec{F} - \overrightarrow{grad} P - \rho\, \vec{a})\, d\tau = 0$$

Équation d'Euler

Équation locale

La relation précédente est vraie quelque soit l'élément de volume choisi, on peut donc écrire :

$$\vec{F} - \overrightarrow{grad} P - \rho \vec{a} = \vec{0}$$

Cette équation représente la forme locale de l'équation d'Euler (vraie en Chaque point du fluide)

A partir du bilan des forces appliquées au fluide et des caractéristiques cinématiques de l'écoulement, c'est cette équation qui nous servira pour l'étude des écoulements.

Équation d'Euler

Autres expressions de l'équation d'Euler

Dans l'équation précédente, l'accélération du fluide s'écrit (cinématique des fluides)

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V}.\overrightarrow{grad})\vec{V} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \frac{1}{2}\overrightarrow{grad}\, V^2 + \overrightarrow{rot}\, \vec{V} \wedge \vec{V}$$

Dans cette expression :

$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t}$ est l'accélération locale (non permanence de l'écoulement)

$\frac{1}{2}\overrightarrow{grad}\, V^2 + \overrightarrow{rot}\, \vec{V} \wedge \vec{V}$ est l'accélération convective (non uniformité de l'écoulement)

Équation d'Euler

Remarque : une équation dynamique est insuffisante pour une étude complète d'un écoulement

Les caractéristiques de l'écoulement d'un fluide sont données par :

- la vitesse V
- la pression P
- la masse volumique ρ
- la température T

L'équation d'Euler doit donc être complétée par d'autres équations caractérisant le fluide, son mouvement et les conditions d'écoulement

Équation d'Euler

Éléments à ajouter

- Il faut donc ajouter :
  - l'équation de conservation de la masse

$$\mathrm{div}(\rho\vec{V})+\frac{\partial\rho}{\partial t}=\rho Q \text{ ;Q:débi tvolumique de production}$$

- l'équation d'état du fluide : f (P, ρ, T) = 0
- l'équation caractérisant le type de transformation subie par le fluide (incompressible, isotherme, adiabatique…)
- les conditions aux limites et les conditions initiales qui permettent de déterminer les constantes d'intégration.

Équation d'Euler

Exemples

Équation caractéristique du fluide

f (P, ρ, T) = 0

- liquide incompressible : $\rho = f(T)$
- liquide légèrement compressible : $\rho = \rho_0(T)\,(1 + \kappa P)$
- Gaz parfait : $P / \rho = r\,T$

Transformations subies

Dans le cas de transformations réversibles :

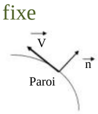
Pour les isothermes : ρ = cste (fluide incompressible) et P / ρ =cste (gaz parfait)
Pour les transformations adiabatiques : ρ = cste (fluide incompressible) et P / ρ^{γ} =cste (gaz parfait)

Équation d'Euler

Exemples

Conditions aux limites : elles sont définies par des parois fixes ou mobiles ou par des surfaces libres

Paroi fixe



L'équation de la paroi est donnée par : F(x, y, z) = 0
En fluide parfait la vitesse est nécessairement orthogonale à la paroi; cette normale est définie par le gradient de la fonction F (x, y, z); la condition aux limites s'écrit donc :

$$\sum_{i=1}^{3} v_i \frac{\partial F}{\partial x_i} = 0$$

Vi est la projection de la vitesse sur x, y ou z et le deuxième terme représente les coordonnées du gradient de F

Théorème d'Euler

Paroi mobile

On ajoute simplement à l'équation précédente le terme dépendant du temps, soit :

$$\sum_{i=1}^{3} v_i \frac{\partial F}{\partial x_i} + \frac{\partial F}{\partial t} = 0$$

Surface libre

P = cste

Théorème d'Euler

La ***résultante*** ($\sum \vec{F}$ext) des actions mécaniques extérieures exercées sur un fluide isolé (fluide contenu dans l'enveloppe limitée par S_1 et S_2) est ***égale à la variation de la quantité de mouvement*** du fluide qui entre en S_1 à une vitesse V_1 et sort par S_2 à une vitesse V_2 .

$$\sum \vec{F}\text{ext} = Q_m\,(V_2 - V_1)$$

Exercices

Dynamique des fluides incompressibles réels

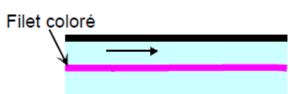
A- Régimes d'écoulement
B- Pertes de charges
C- Théorème de Bernoulli

Régimes d'écoulement Méthode de détermination

- Les expériences réalisées par l'ingénieur ***Reynolds*** en 1883.
- Ecoulement d'un liquide dans une conduite cylindrique rectiligne.
- Présence de 2 liquides dont un est sous forme d'un filet coloré.
- L'expérience a montré l'existence de deux régimes d'écoulement :
  - Régime laminaire, et
  - Régime turbulent.

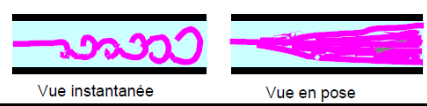
Régime laminaire

- Les filets fluides sont des lignes régulières, sensiblement parallèles entre elles.
- Le filet coloré reste net et régulier, parallèle à l'axe du tube.



Régime turbulent

- Le filet coloré oscille, vibre, se rompt.
- On distingue deux modes d'écoulements turbulent:
  - les écoulements turbulents lisses, et
  - les écoulements turbulents rugueux.



Nombre de Reynolds

- Le ***paramètre*** permettant de déterminer si l'écoulement est laminaire ou turbulent est un ***nombre sans dimension*** appelé nombre de ***Reynolds***.
- Noté: Re.

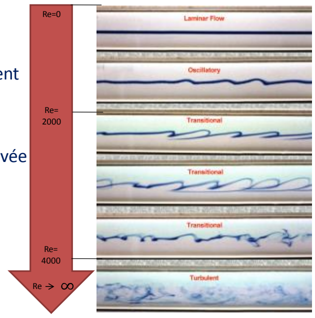
Nombre de Reynolds

$$Re = \frac{\rho V d}{\mu} = \frac{V d}{\upsilon}$$

V : Vitesse moyenne d'écoulement à travers la section considérée en (m/s)
- d : Diamètre de la conduite ou largeur de la veine fluide en (m).
- υ: Viscosité cinématique du fluide (m^2/s).

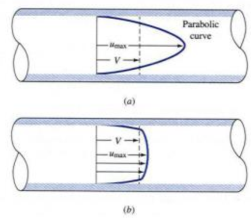
Nature des écoulements

- **Régime Laminaire**
  - –Faible vitesse d'écoulement
  - –Re < 2 000
- **Régime Turbulent**
  - Vitesse d'écoulement élevée
  - Re > 4 000
- **Régime Transitionnel**
  - Vitesse intermédiaire
  - 2 000 < Re < 4 000



109

Écoulement laminaire et turbulent



Écoulement laminaire
Le profil de vitesse complètement développé tend à prendre une forme parabolique. La friction est fonction du nombre de Reynolds.

Écoulement turbulent
Le profil de vitesse complètement développé est beaucoup plus aplati. La friction est fonction de la rugosité du tuyau.

110

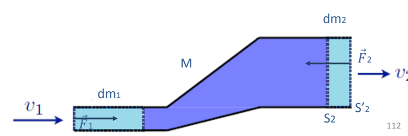
Récap nombre de Reynolds

- Si Re < 2000 l'écoulement est laminaire
- Si Re > 2000 l'écoulement est turbulent :
  - Lisse si 2000 < Re < 100000
  - Rugueux si Re > 100000

111

Equation de Bernoulli

$$\boxed{\frac{p_2-p_1}{\rho}+\frac{V_2^2-V_1^2}{2}+g(z_2-z_1)=\frac{\sum W d\tau}{dm}}$$



112

Pertes de charges

- On défini la perte de charge entre deux points (1) et (2) par:

$$J_{12} = \frac{\sum W_{d\tau}}{dm}$$

- C'est la perte d'énergie par frottement visqueux par unité de masse qui passe.

113

Pertes de charges

$$\boxed{\frac{p_2-p_1}{\rho}+\frac{V_2^2-V_1^2}{2}+g(z_2-z_1)=J_{12}}$$

114

Pertes de charges

- La perte de charge J_{12} peut être due à une perte de charge ***linéaire*** et une perte de ***charge singulière*** :

$$J_{12} = J_s + J_L$$

Pertes de charges singulières

Quand la conduite subit de ***brusque variation*** de ***section*** ou de ***direction***, il se produit des pertes de charges dites ***singulières***, elles sont généralement mesurable et font partie des caractéristiques de l'installation.

$$J_s = -K_s \frac{v^2}{2}$$

s : indice de l'accident de forme de la conduite.
Ks : Coefficient (sans unité) de pertes de charge. Il dépend de la nature et de la géométrie de l'accident de forme.
Les valeurs de Ks sont données par les constructeurs dans leurs catalogues.

Pertes de charges linéaires

- Les pertes de charges linéaires, sont des pertes de charge ***réparties*** régulièrement le ***long des conduites***.

Pertes de charges linéaires

- Les pertes de charge linéaires sont proportionnelles à la ***longueur L*** de la conduite, inversement proportionnelles à son ***diamètre d***, proportionnelle au carré de la ***vitesse débitante*** V du fluide.

$$J_L = -\lambda \frac{V^2}{2} \frac{L}{d}$$

- V : vitesse moyenne d'écoulement dans la conduite (m/s)
- L : longueur de la conduite (m)
- d : diamètre de la conduite (m)
- λ : coefficient de perte de charge linéaire. Il dépend du régime d'écoulement et notamment du nombre de Reynolds Re .

Pertes de charges linéaires

- Dans un écoulement laminaire : (Re < 2000)

$$\lambda = \frac{64}{Re} \text{ (Formule de Poiseuille)}$$

- Dans écoulement turbulent lisse : $2000 < Re < 10^5$

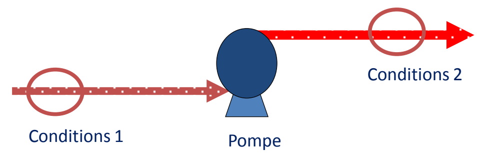
$$\lambda = 0{,}316\ Re^{-0{,}25} \text{ (Formule de Blasius)}$$

- Dans un écoulement turbulent rugueux : $Re > 10^5$

$$\lambda = 0{,}79.\sqrt{\frac{\varepsilon}{d}} \text{ (Formule de Blench)}$$

- ε : rugosité de la surface interne de la conduite (mm)
- d : diamètre intérieur de la conduite (mm)

Théorème de Bernoulli généralisé



Equation de Bernoulli
Cas d'une machine Hydraulique

$$\boxed{\frac{p_2 - p_1}{\rho} + \frac{V_2^2 - V_1^2}{2} + g(z_2 - z_1) = J_{12} + \frac{Pnet}{Qm}}$$

121

Exercices

122