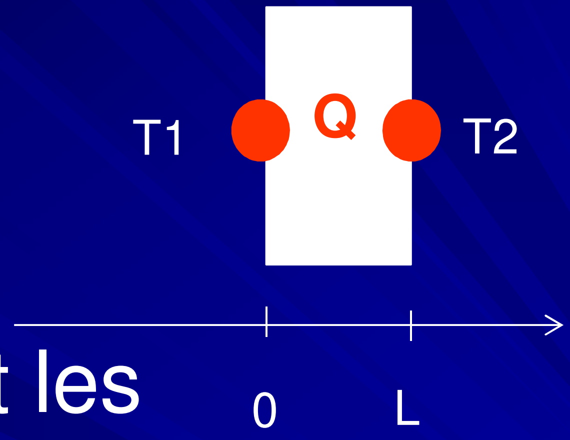
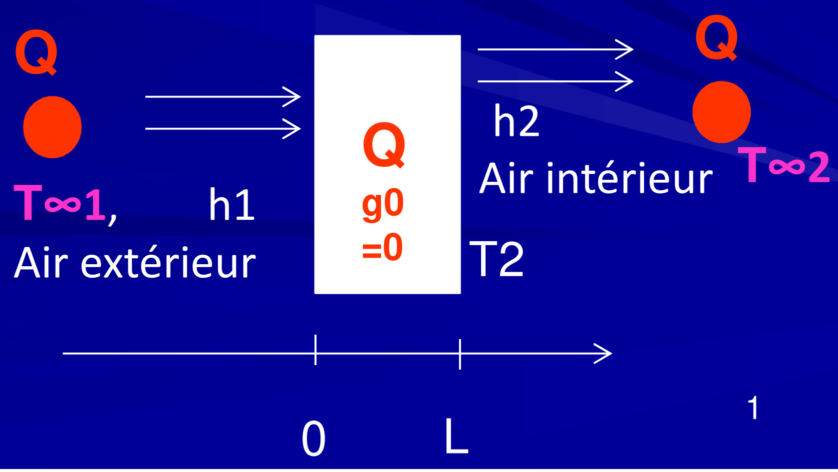
I- Mur plan

- **Rappel: pour un mur,** on a le taux de chaleur:

$$Q = \frac{T_1 - T_2}{\frac{L}{kA}}$$

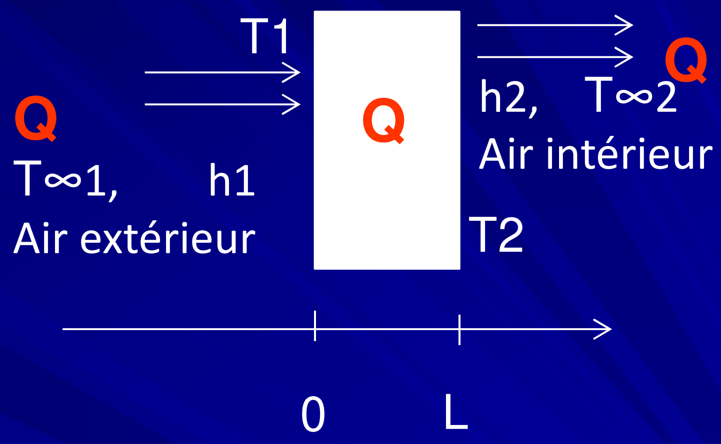


- Que se passe-t-il si on connait les **températures** des **fluides** de part et d'autre la paroi?



I- Mur plan

- **Cas1: mur soumis** à la **convection** et pas de génération **g0=0**



- **Le même flux** est **transféré** par **convection** puis par **conduction** puis par **convection**. Donc:

$$Q = h_1 A(T_{\infty 1} - T_1) = \frac{T_1 - T_2}{\frac{L}{kA}} = h_2 A(T_2 - T_{\infty 2})$$

convection **conduction** **convection**

I- Mur plan

- **Cas1: mur** soumis à la **convection** et pas de génération **g0=0**
- On obtient alors:

$$T_{\infty 1} - T_{\infty 2} = Q\left(\frac{1}{h_1 A} + \frac{L}{kA} + \frac{1}{h_2 A}\right)$$

ou

$$Q = \frac{T_{\infty 1} - T_{\infty 2}}{\frac{1}{h_1 A} + \frac{L}{kA} + \frac{1}{h_2 A}} = \frac{T_{\infty 1} - T_{\infty 2}}{R_{th}}$$

$$T_{\infty 1} - T_1 = \frac{Q}{h_1 A}$$ 1

$$T_1 - T_2 = \frac{QL}{kA}$$ 2

$$T_2 - T_{\infty 2} = \frac{Q}{h_2 A}$$ 3

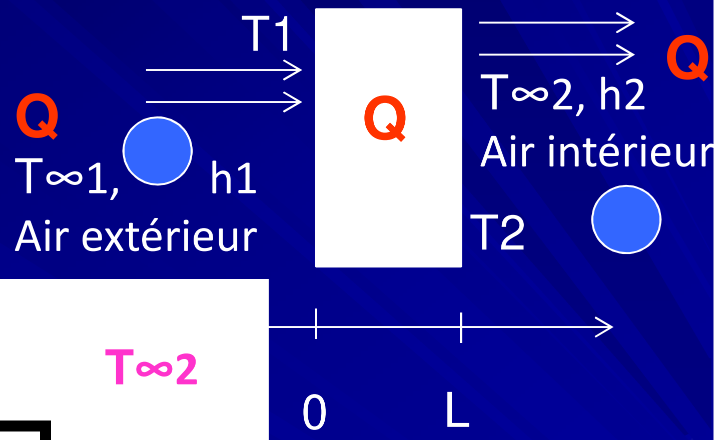
En faisant somme des équations

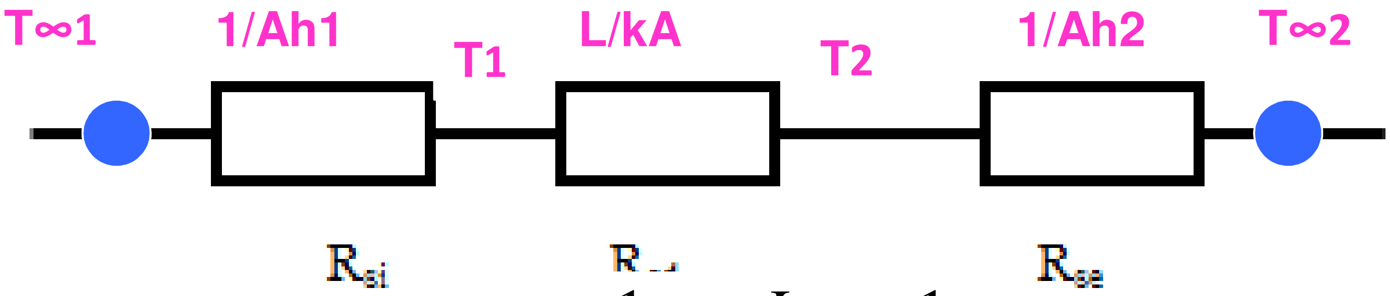
$$R_{eq} = \frac{1}{h_1 A} + \frac{L}{kA} + \frac{1}{h_2 A}$$

$$R_{eq} = R_{si} + R_{mur} + R_{se}$$

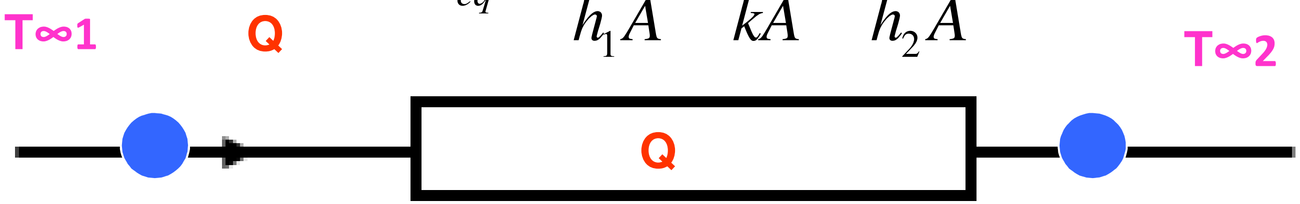
I- Mur plan

- **Rsi=1/Ah1:** résistance **superficielle** intérieure
- **Rse=1/Ah2:** résistance **superficielle** extérieure
- **Conclusion**





$$R_{eq} = \frac{1}{h_1 A} + \frac{L}{kA} + \frac{1}{h_2 A}$$



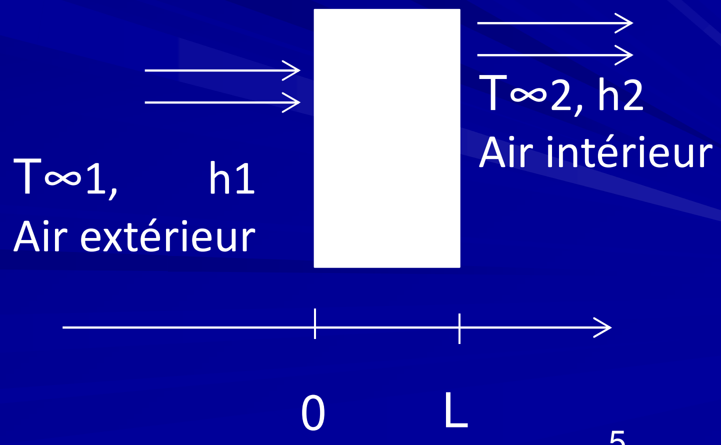
$$Q = \frac{T_{\infty 1} - T_{\infty 2}}{\frac{1}{h_1 A} + \frac{L}{kA} + \frac{1}{h_2 A}}$$

I- Mur plan

- **Coefficient global d'échange:**
- Le transfert entre **2 fluides** séparés par une **paroi** peut être exprimé en fonction d'un **coefficient de transfert global U**.
- On écrit:

$$Q = UA(T_{\infty 1} - T_{\infty 2})$$

- **Unité de U?**
- **U en W/m²/K**
- Expression de **U=?.**



I- Mur plan

- **Coefficient global d'échange:**
- **U=?**
- on vient d'établir l'expression: $$Q = \frac{T_{\infty 1} - T_{\infty 2}}{\frac{1}{h_1 A} + \frac{L}{kA} + \frac{1}{h_2 A}}$$
- Qu'on peut écrire:

$$Q = A \underbrace{\frac{1}{\frac{1}{h_1} + \frac{L}{k} + \frac{1}{h_2}}}_{=U} (T_{\infty 1} - T_{\infty 2})$$

- Donc $$U = \frac{1}{\frac{1}{h_1} + \frac{L}{k} + \frac{1}{h_2}}$$

- **U: coefficient de transfert global**

II- Cylindre – transfert radial

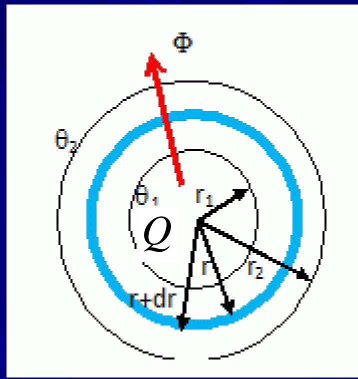
- **Rappel:**
- L'équation de la chaleur s'écrit:

$$\frac{1}{r^n}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^n\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{g_0}{k}=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

- Avec
  - **n=0** en coordonnées **cartésiennes**
  - **n=1** en coordonnées **cylindriques**
  - **n=2** en coordonnées **sphériques**

II- Cylindre – transfert radial

- L'équation de conduction **dans un cylindre** (transfert radial) est:



$$Q = -kA\frac{dT}{dr}$$

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right) + \frac{g_0}{k} = 0$$

- Donc:

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right) = -\frac{g_0}{k}r$$

- Par une première intégration:

$$r\frac{dT}{dr} = -\frac{g_0}{2k}r^2 + c_1$$

- Donc:

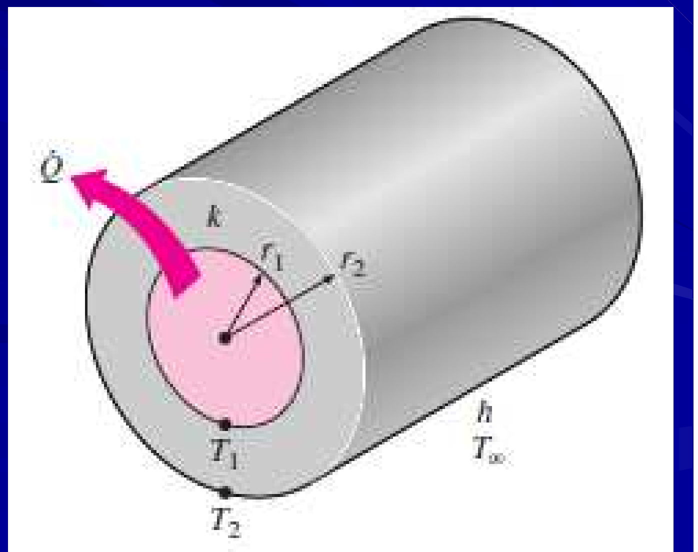
$$\frac{dT}{dr} = -\frac{g_0}{2k}r + \frac{c_1}{r}$$

- D'où pour **n'importe quel cylindre:**

$$T(r) = -\frac{g_0}{4k}r^2 + c_1 \ln r + c_2$$

II- Cylindre – transfert radial

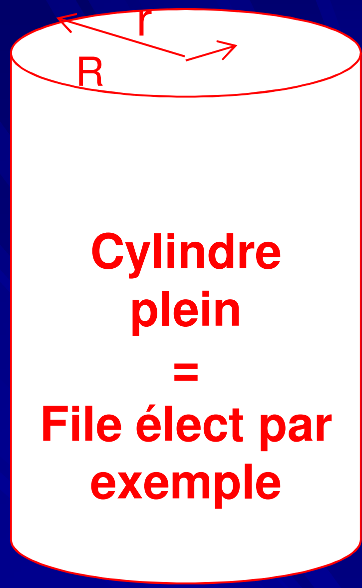
- **Conditions aux limites:**
- **Deux cas** se présentent:
  - **Cas1** de **cylindre plein**
  - **Cas2** de **cylindre creux**



II- Cylindre – transfert radial

- **Conditions aux limites:**
- **Cas1** de **cylindre plein**:
  - **CL1**: au centre du cylindre (r=0)
  - **CL2**: à la surface du cylindre: en r=R, T=T2

T2



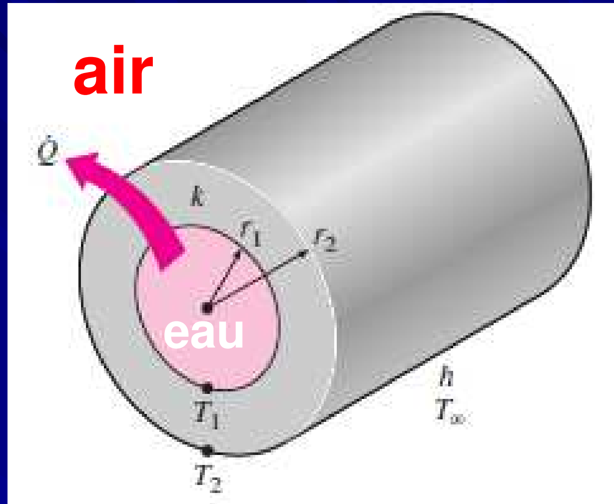
$$T(r) = -\frac{g_0}{4k} r^2 + c_1 \ln r + c_2$$

- En **r=0**, le terme **$c_1$lnr** tend vers **-∞** ⟶ **c1=0**
- D'où $$T(r) = -\frac{g_0}{4k} r^2 + c_2$$
- **c2?** est obtenu par **CL2** ⟶ $$T_2 = -\frac{g_0}{4k} R^2 + c_2$$

$$c_2 = T_2 + \frac{g_0}{4k} R^2$$

- **Donc** $$T(r) = \frac{g_0}{4k} R^2 \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] + T_2$$

II- Cylindre – transfert radial



- **Conditions aux limites:**
- **Cas2** de **cylindre creux**:
  - **CL1**: en r=r1; T=T1
  - **CL2**: en r=r2; T=T2
- On rappelle que la solution générale est:

$$T(r) = -\frac{g_0}{4k} r^2 + c_1 \ln r + c_2$$

- **Cas pratique: g0=0** $\Rightarrow$

$$T(r) = c_1 \ln r + c_2$$

- Selon les **CL: impose T1; T2** $\Rightarrow$

$$\begin{cases} en\ r = r_1; & T_1 = c_1 \ln r_1 + c_2 \\ en\ r = r_2; & T_2 = c_1 \ln r_2 + c_2 \end{cases}$$

II- Cylindre – transfert radial

- **Conditions aux limites:**
- **Cas2** de **cylindre creux**:
- **Cas pratique: g0=0**

$$\begin{cases} en\ r = r_1 ; T_1 = c_1 \ln r_1 + c_2 \\ en\ r = r_2 ; T_2 = c_1 \ln r_2 + c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = \dfrac{T_1 - T_2}{\ln \dfrac{r_1}{r_2}} \\ c_2 = T_1 - \dfrac{T_1 - T_2}{\ln \dfrac{r_1}{r_2}} \ln r_1 \end{cases}$$

- D'où

$$T(r) = \frac{T_1 - T_2}{\ln \dfrac{r_1}{r_2}} \ln r - \frac{T_1 - T_2}{\ln \dfrac{r_1}{r_2}} \ln r_1 + T_1$$

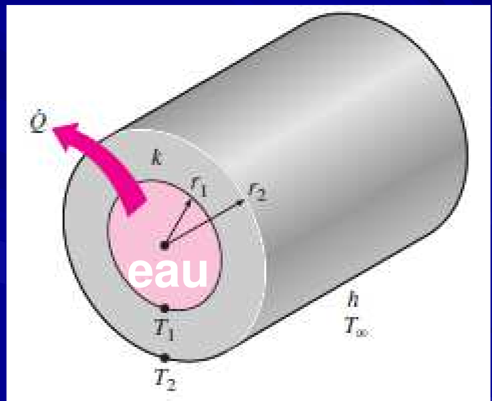
ou

$$T(r) = \frac{T_1 - T_2}{\ln \dfrac{r_1}{r_2}} \ln \frac{r}{r_1} + T_1$$

II- Cylindre – transfert radial

- **Le flux de chaleur?**
- Le **flux de chaleur** est obtenu à **partir** de **Fourier**: $\vec{q} = -k\ \overrightarrow{grad}\,T$ avec $T(r) = \dfrac{T_1 - T_2}{\ln \dfrac{r_1}{r_2}} \ln \dfrac{r}{r_1} + T_1$
- **Rappel**: le gradient d'une fonction en coordonnée cylindrique est:

$$\left[\frac{\partial}{\partial r}F(r,\theta,z),\ \frac{\frac{\partial}{\partial \theta}F(r,\theta,z)}{r},\ \frac{\partial}{\partial z}F(r,\theta,z)\right]$$



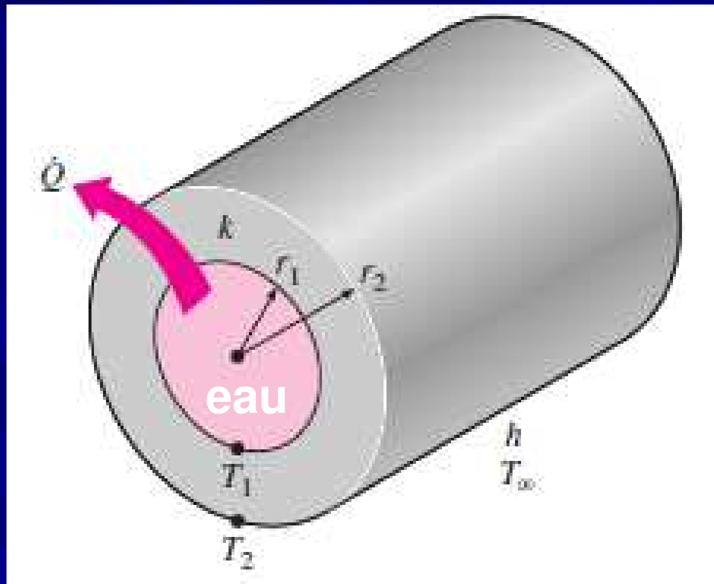
- Donc: $q = -k \dfrac{d}{dr}\left(\dfrac{T_1 - T_2}{\ln \dfrac{r_1}{r_2}} \ln \dfrac{r}{r_1} + T_1 \right) = -k\ \dfrac{T_1 - T_2}{\ln \dfrac{r_1}{r_2}} \dfrac{1}{r}$ ou $q = k\ \dfrac{T_1 - T_2}{\ln \dfrac{r_2}{r_1}} \dfrac{1}{r}$

Varie avec r

II- Cylindre – transfert radial

- **Le taux de chaleur?**

$$Q = qA = k\frac{T_1 - T_2}{\ln\frac{r_2}{r_1}}\frac{1}{r}(2\pi\, r\, L)$$



- Soit alors:

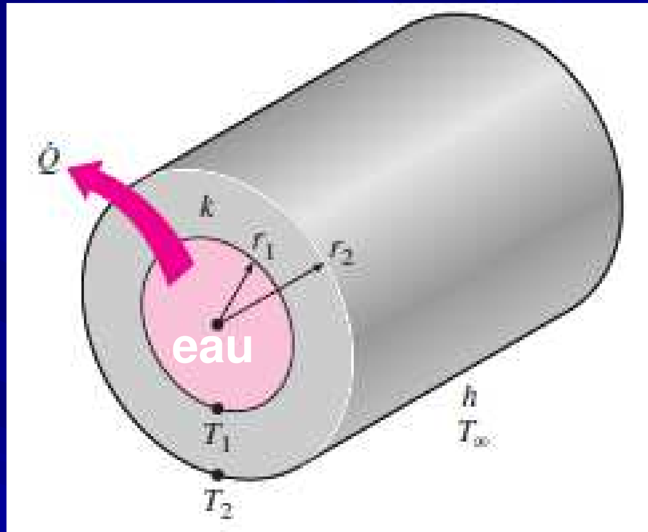
$$Q = 2\pi\, k\, L\frac{T_1 - T_2}{\ln\frac{r_2}{r_1}}$$

Taux de chaleur est constant

II- Cylindre – transfert radial

- **Résistance thermique du cylindre**
- La résistance thermique est définie comme Rth tel que:

$$R_{th} = \frac{T_1 - T_2}{Q}$$



- Or

$$Q = \frac{2\pi k L (T_1 - T_2)}{\ln \frac{r_2}{r_1}} = \frac{(T_1 - T_2)}{\frac{\ln \frac{r_2}{r_1}}{2\pi k L}}$$

- Donc la **résistance thermique** est:

$$R_{th} = \frac{\ln \frac{r_2}{r_1}}{2\pi\, k\, L}$$

III- sphère – transfert radial

- En **unidirectionnelle** et en **stationnaire** on obtient:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial T}{\partial r})+\frac{g_0}{k}=0$$

- Par **intégration**:

$$d(r^2\frac{dT}{dr})=-\frac{g_0}{k}r^2dr$$

$$r^2\frac{dT}{dr}=-\frac{g_0}{3k}r^3+c_1$$

$$\frac{dT}{dr}=-\frac{g_0}{3k}r+\frac{c_1}{r^2}$$

$$T(r)=-\frac{g_0}{6k}r^2-\frac{c_1}{r}+c_2$$

- **CL** $\longrightarrow$ **c1 et c2**

III- sphère – transfert radial

- **Deux cas:**
  - **Cas1**: sphère **pleine**
  - **Cas2**: sphère **creuse**. **Cas pratique g0=0.**

III- sphère – transfert radial

- **Cas1**: sphère **pleine**:
  - **CL1:** En **r=0**, **T reste finie**
  - **CL2:** On impose une température **au centre** ou à la surface: **r=0; T=T0**

$$T(r) = -\frac{g_0}{6k}r^2 - \frac{c_1}{r} + c_2$$

- **CL1**: → c1 doit être nul **c1=0**.

$$T(r) = -\frac{g_0}{6k}r^2 + c_2$$

- **CL2** ⟶ $c_2 = T_0$

- **D'où** $$T(r) = -\frac{g_0}{6k}r^2 + T_0$$

III- sphère – transfert radial

- **Cas2**: sphère **creuse**. **Cas pratique g0=0**

$$T(r) = -\cancel{\frac{g_0}{6k}r^2} - \frac{c_1}{r} + c_2 \Rightarrow T(r) = -\frac{c_1}{r} + c_2$$

– **CL**

- **CL1**: en r=r1; T=T1
- **CL2**: en r=r2; T=T2

$$\Rightarrow \begin{cases} en\ r = r_1 ; T_1 = -\dfrac{c_1}{r_1} + c_2 \\ en\ r = r_2 ; T_2 = -\dfrac{c_1}{r_2} + c_2 \end{cases}$$

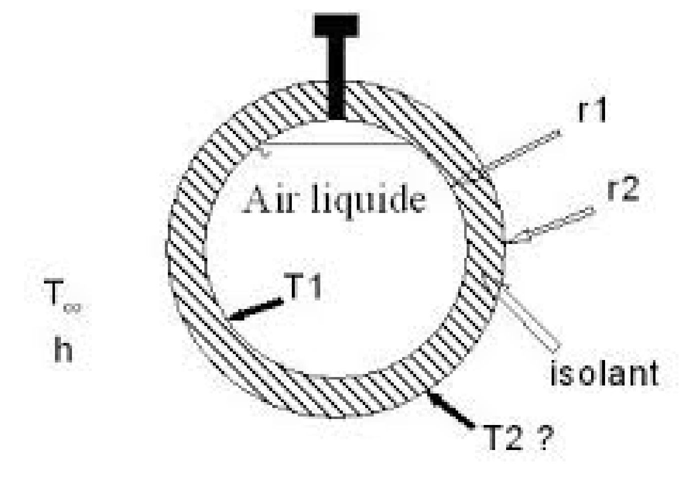
III- sphère – transfert radial

- **Cas2**: sphère **creuse**. **Cas pratique g0=0**
- On obtient le **profile** de température:

$$T(r) = \frac{r_1}{r}\frac{r_2 - r}{r_2 - r_1}T_1 + \frac{r_2}{r}\frac{r - r_1}{r_2 - r_1}T_2$$

- Le **taux de chaleur**?

$$Q = -kA\frac{dT}{dr} = -k4\pi r^2\frac{dT}{dr}$$



- On montre que:

$$Q = \frac{4\pi\, k\, r_1 r_2}{r_2 - r_1}(T_1 - T_2)$$

III- sphère – transfert radial

- **La résistance thermique?**
- Or

$$Q = \frac{4\pi k\, r_1 r_2}{r_2 - r_1}(T_1 - T_2)$$

- La **résistance** est définie comme:

$$Rth = \frac{T_1 - T_2}{Q}$$

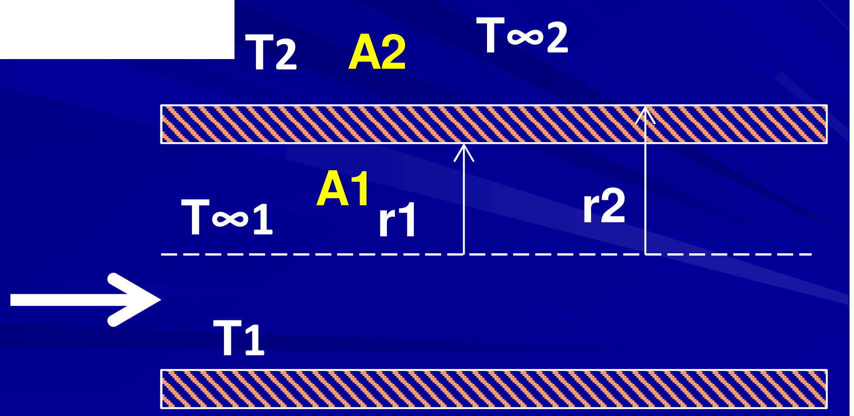
- Soit alors:

$$Rth = \frac{r_2 - r_1}{4\pi k\, r_1 r_2}$$

Application de Rth au cylindre

- **Coefficient global d'échange**
- Puisque la surface est variable, on définit **deux coefficients** globaux d'échanges: U1 par rapport à A1 et U2 par rapport à A2 tels

$$\begin{cases} Q = U_1 A_1 (T_{\infty 1} - T_{\infty 2}) \\ Q = U_2 A_2 (T_{\infty 1} - T_{\infty 2}) \end{cases} \Rightarrow U_1 A_1 = U_2 A_2$$



Cylindre creux

- **U1** et **U2?**

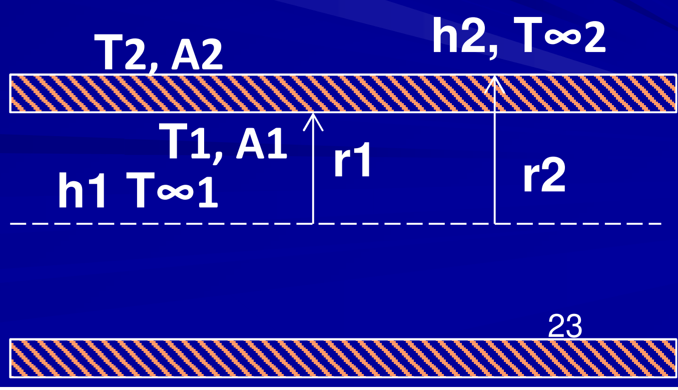
Application de Rth au cylindre

- **Coefficient global d'échange**
- Le taux de chaleur échangé entre les deux fluides de part et d'autre la paroi du cylindre est:

$$Q = h_1 A_1 \left(T_{\infty 1} - T_1\right) = \frac{T_1 - T_2}{\dfrac{\ln(\frac{r_2}{r_1})}{2\pi kL}} = h_2 A_2 \left(T_2 - T_{\infty 2}\right)$$

Convection conduction Convection

$$Q = \frac{T_{\infty 1} - T_1}{1/(h_1 A_1)} = \frac{T_1 - T_2}{\dfrac{\ln(\frac{r_2}{r_1})}{2\pi kL}} = \frac{T_2 - T_{\infty 2}}{1/(h_2 A_2)}$$



Application de Rth au cylindre

Coefficient global d'échange

$$Q = \frac{T_{\infty 1} - T_1}{1/h_1 2\pi r_1 L} = \frac{T_1 - T_2}{\dfrac{\ln(\frac{r_2}{r_1})}{2\pi kL}} = \frac{T_2 - T_{\infty 2}}{1/h_2 2\pi r_2 L}$$

If

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_n}{b_n} = c$$

then

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n} = c$$

For example,

$$\frac{1}{4} = \frac{2}{8} = \frac{5}{20} = 0.25$$

and

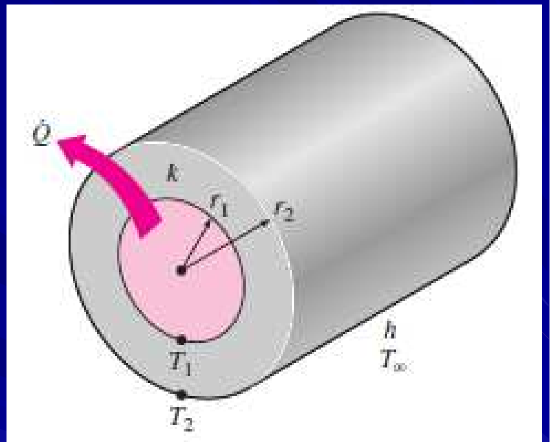
$$\frac{1 + 2 + 5}{4 + 8 + 20} = 0.25$$

$$Q = \frac{T_{\infty 1} - T_{\infty 2}}{\dfrac{1}{h_1 2\pi r_1 L} + \dfrac{\ln(\frac{r_2}{r_1})}{2\pi kL} + \dfrac{1}{h_2 2\pi r_2 L}}$$

Application de Rth au cylindre

- **Coefficient global d'échange**
- Étant donné que **les normes** des tables sont fournies par rapport au diamètre extérieur, on utilise le **U2:**

$$Q = U_2 A_2 (T_{\infty 1} - T_{\infty 2})$$



- **D'autre part,**

$$Q = \frac{T_{\infty 1} - T_{\infty 2}}{\frac{1}{h_1 2\pi r_1 L} + \frac{\ln(\frac{r_2}{r_1})}{2\pi k L} + \frac{1}{h_2 2\pi r_2 L}}$$

$$Q = 2\pi r_2 L \frac{T_{\infty 1} - T_{\infty 2}}{\frac{r_2}{r_1}\frac{1}{h_1} + \frac{r_2}{k}\ln(\frac{r_2}{r_1}) + \frac{1}{h_2}}$$

Application de Rth au cylindre

- **Coefficient global d'échange**
- On a

$$Q = U_2 A_2 (T_{\infty 1} - T_{\infty 2})$$

$$Q = 2\pi L r_2 \frac{T_{\infty 1} - T_{\infty 2}}{\frac{r_2}{r_1}\frac{1}{h_1} + \frac{r_2}{k}\ln(\frac{r_2}{r_1}) + \frac{1}{h_2}}$$

- Donc le **U2 s'identifie à**

$$U_2 = \frac{1}{\frac{r_2}{r_1}\frac{1}{h_1} + \frac{r_2}{k}\ln(\frac{r_2}{r_1}) + \frac{1}{h_2}}$$

Exercice: retrouver U1

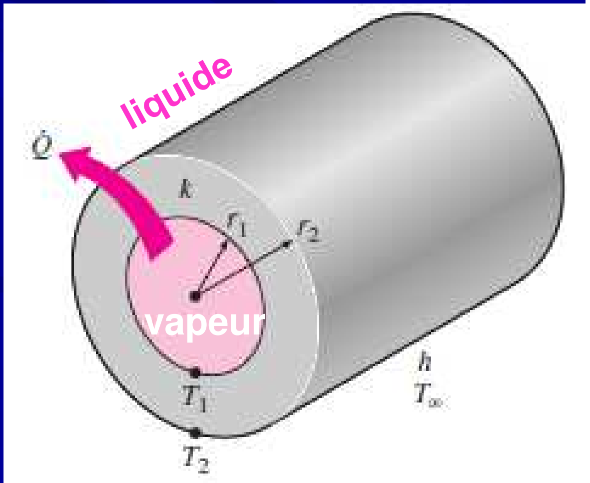
$$U_1 = \frac{1}{\frac{1}{h_1} + \frac{r_1}{k}\ln(\frac{r_2}{r_1}) + \frac{r_1}{r_2}\frac{1}{h_2}}$$

Application de Rth au cylindre

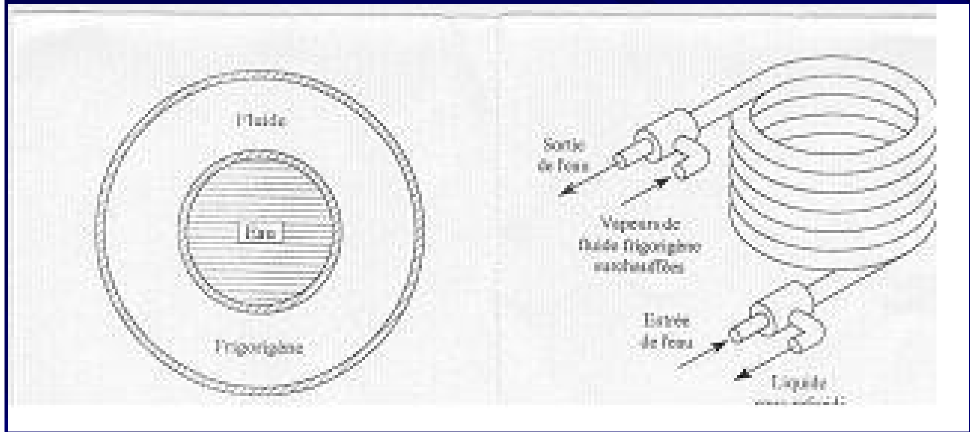
- **Coefficient global d'échange**
- On $$U_2 = \frac{1}{\frac{r_2}{r_1}\frac{1}{h_1} + \frac{r_2}{k}\ln(\frac{r_2}{r_1}) + \frac{1}{h_2}}$$

- **Cas** d'un **échangeur**: **l'épaisseur est faible** (**r2 ≈ r1**) et **grande conductivité k**

$$U_2 \approx \frac{1}{\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2}}$$



Exemple d’échangeur



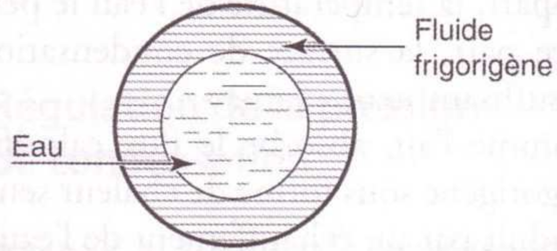


Figure 7.28 – Tubes concentriques.

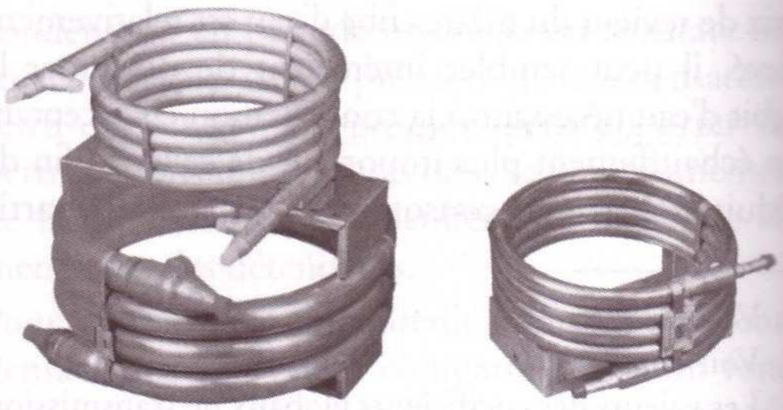


Figure 7.29 – Condenseurs coaxiaux.

Exemple d'échangeur