Equation de conduction de chaleur unidimensionnelle

- Si on suppose que la conductivité thermique **k** est égale à une valeur moyenne **constante**. Donc:

$$\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial x}\left(A\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{g_0}{k}=\frac{\rho c_p}{k}\frac{\partial T}{\partial t}$$

- On pose:

$$\alpha=\frac{k}{\rho c_p} \quad en \quad m^2/s$$

diffusivité thermique

- **D'où**

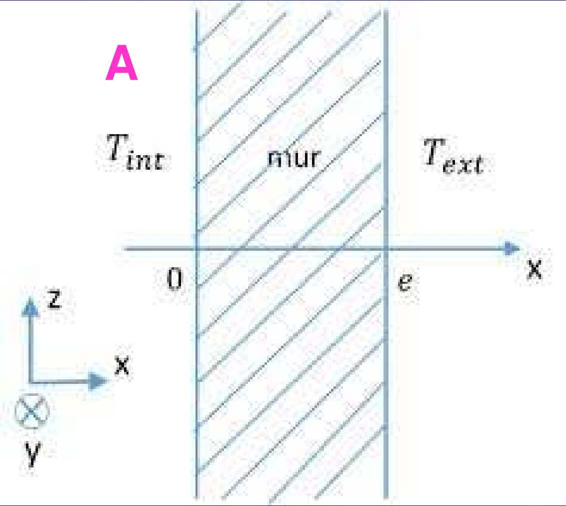
$$\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial x}\left(A\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{g_0}{k}=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

Équation de la chaleur en monodimensionnel

1- Equation en coordonnées cartésiennes

- **Cas de mur simple:**
- on a :

$$\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial x}(A\frac{\partial T}{\partial x})+\frac{g_0}{k}=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$



- Pour un **mur simple**, la surface **A** est **constante** donc:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{g_0}{k}=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

Equation de conduction de chaleur unidimensionnelle

- **Que signifie** cette diffusivité thermique **α?**

$$\alpha = \frac{k}{\rho\, c_p} \quad en \quad m^2/s$$

- **Avec:**
- **k:** représente la capacité du matériau à **conduire** la chaleur;
- **ρCp (J/m3/K)**: représente la quantité d'énergie que le matériau **stocke** par unité de volume.

$$\alpha = \frac{k}{\rho\, c_p} = \frac{chaleur\ conduite\ à\ travers\ le\ matériau}{chaleur\ stockée\ dans\ le\ matériaux}$$

Equation de conduction de chaleur unidimensionnelle

- **Par conséquent**,

$$\alpha = \frac{k}{\rho c_p} = \frac{chaleur\ conduite\ à\ travers\ le\ matériau}{chaleur\ stockée\ dans\ le\ matériaux}$$

Un matériau ayant:

Une grande conductivité thermique

Ou

Une faible capacité thermique

une **grande diffusivité** thermique.

la **propagation** de la chaleur dans le milieu est **rapide** (**l'agrent**, **l'or,** …)

Equation de conduction de chaleur unidimensionnelle

- **Par conséquent**,

$$\alpha = \frac{k}{\rho\, c_p} = \frac{chaleur\ conduite\ à\ travers\ le\ matériau}{chaleur\ stockée\ dans\ le\ matériaux}$$

Une **faible** valeur de **diffusivité** thermique

$$\Downarrow$$

la chaleur est **principalement absorbée** par le matériau et **qu'une petite quantité** de chaleur sera ensuite **conduite** (eau, bois**, …**)

Equation de conduction de chaleur unidimensionnelle

- Les **diffusivités thermiques** à 2[…]

de certains matéria[…] courants

Diffusivité thermique	
Argent	1
Or	2
Cuivre	3
Aluminium	4
Fer	5
Mercure	6
Marbre	7
Glace	8
Béton	9
Brique	10
Sol lourd	11
Verre	12
Laine de verre	13
Eau	14
Bœuf	15
Bois (chêne)	16

The thermal diffusivities of some materials at room temperature

Material		α, m²/s*
Silver	1	149×10^{-6}
Gold	2	127×10^{-6}
Copper	3	113×10^{-6}
Aluminum	4	97.5×10^{-6}
Iron	5	22.8×10^{-6}
Mercury (l)	6	4.7×10^{-6}
Marble	7	1.2×10^{-6}
Ice	8	1.2×10^{-6}
Concrete	9	0.75×10^{-6}
Brick	10	0.52×10^{-6}
Heavy soil (dry)	11	0.52×10^{-6}
Glass	12	0.34×10^{-6}
Glass wool	13	0.23×10^{-6}
Water (l)	14	0.14×10^{-6}
Beef	15	0.14×10^{-6}
Wood (oak)	16	0.13×10^{-6}

Diffusivité thermique de quelques matériaux

Nature du corps	Masse volumique	Chaleur massique	Conductivité thermique	Diffusivité thermique
Notation	ρ	c	λ	a
Unité	kg / m^3	J / (kg . K)	W / (m . K)	m^2 / s
Argent	10500	230	418	$1{,}71 \cdot 10^{-4}$
Cuivre	8940	380	389	$1{,}14 \cdot 10^{-4}$
Aluminium	2700	860	200	$0{,}86 \cdot 10^{-4}$
Acier	7850	490	46	$0{,}12 \cdot 10^{-4}$
Béton	2300	960	0,92	$0{,}42 \cdot 10^{-6}$
Verre	2530	840	1,20	$0{,}58 \cdot 10^{-6}$
Polystyrène	44		0,025	
Laine de verre	200	0,67	0,040	

Equation de conduction de chaleur unidimensionnelle

- Notez que la diffusivité thermique varie de 0,14 à 106 m2 / s pour l'eau à 174 106 m2 / s pour l'argent, ce qui représente une différence de plus de mille fois. Notez également que les diffusivités thermiques du boeuf et de l'eau sont les mêmes. Cela n'est pas surprenant, car la viande, ainsi que les fruits et légumes frais sont principalement constitués d'eau et possèdent donc les propriétés thermiques de l'eau.

The thermal diffusivities of some materials at room temperature

Material	α, m^2/s*
Silver	149×10^{-6}
Gold	127×10^{-6}
Copper	113×10^{-6}
Aluminum	97.5×10^{-6}
Iron	22.8×10^{-6}
Mercury (l)	4.7×10^{-6}
Marble	1.2×10^{-6}
Ice	1.2×10^{-6}
Concrete	0.75×10^{-6}
Brick	0.52×10^{-6}
Heavy soil (dry)	0.52×10^{-6}
Glass	0.34×10^{-6}
Glass wool	0.23×10^{-6}
Water (l)	0.14×10^{-6}
Beef	0.14×10^{-6}
Wood (oak)	0.13×10^{-6}

Conduction thermique

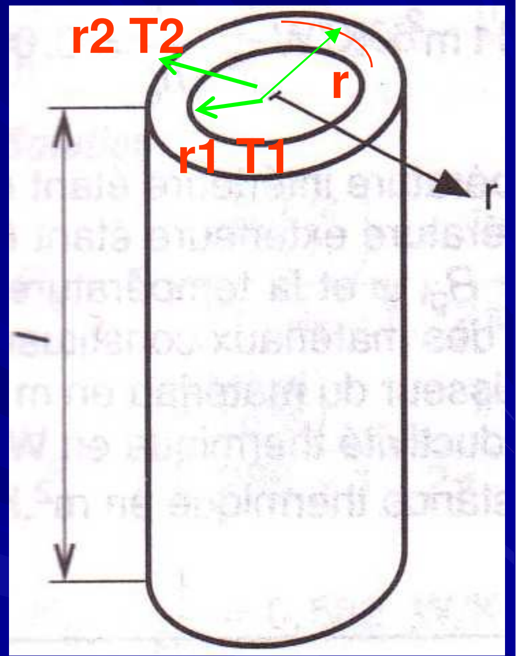
- **Méthode de détermination de la conductivité**

- **Conductivite Thermique**

2- Equation en coordonnées cylindriques: Transfert radial

- On $$\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial x}(A\frac{\partial T}{\partial x})+\frac{g_0}{k}=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

- Si les surfaces latérales sont à des températures différentes, le transfert sera de la surface latérale interne vers la surface latérale externe. Il est donc **selon r** donc **radial**.

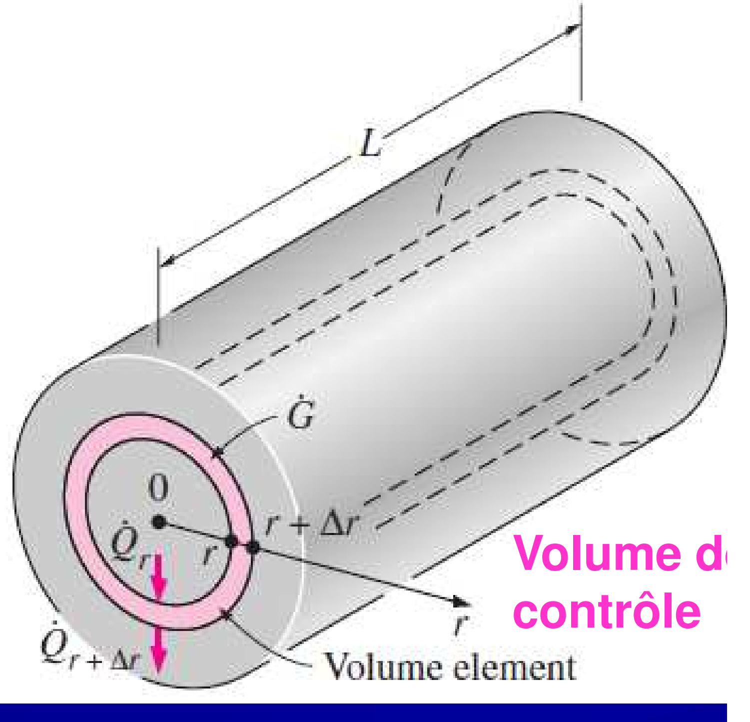


2- Equation en coordonnées cylindriques: Transfert radial

- **Exercice:** En appliquant $\mathbf{Q_e - Q_s + Q_{gén} = Q_{accu}}$, à l'élément de volume **$\Delta V = A\,\Delta r$** d'un cylindre, pendant un temps **Δt**, **trouver** l'équation de la chaleur dans ce cylindre:

$$Q(r) - Q(r+\Delta r) + G = \frac{\Delta E}{\Delta t}$$

Entrée W — **sortie** W — **gén** W — **Accum** W



$\Delta E\,?$

$G\,?$

2- Equation en coordonnées cylindriques: Transfert radial

- **La variation de l'énergie** dans le volume **A Δr** pendant un temps **Δt** peut être exprimée comme suit:

$$\Delta E_{\text{element}} =$$

- **La production de l'énergie** dans le volume **A Δr** peut être exprimée comme suit:

$$G = g_0 \Delta V = g_0 A \Delta r$$

- g_0: la production de puissance par unité de volume **(W/m3).**

2- Equation en coordonnées cylindriques: Transfert radial

- En remplaçant dans:

$$Q(r) - Q(r+\Delta r) + G = \frac{\Delta E}{\Delta t}$$

- **On obtient:**

$$Q(r) - Q(r+\Delta r) + g_0 A\Delta r = \rho c_p A\Delta r \frac{T_{t+\Delta t} - T_t}{\Delta t}$$

- **En divisant** les deux membres **par A Δr,** on obtient

$$-\frac{1}{A}\frac{Q(r+\Delta r) - Q(r)}{\Delta r} + g_0 = \rho c_p \frac{T_{t+\Delta t} - T_t}{\Delta t}$$

2- Equation en coordonnées cylindriques: Transfert radial

- En faisant tendre **Δr et Δt → 0** on obtient:

$$-\frac{1}{A}\frac{\partial Q}{\partial r}+g_0=\rho c_p\frac{\partial T}{\partial t}$$

- **Avec :** $$Q=-kA\frac{\partial T}{\partial r}$$ **loi de Fourier**

- On aura: $$-\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial r}(-kA\frac{\partial T}{\partial r})+g_0=\rho c_p\frac{\partial T}{\partial t}$$

- Donc: $$\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial r}(kA\frac{\partial T}{\partial r})+g_0=\rho c_p\frac{\partial T}{\partial t}$$

2- Equation en coordonnées cylindriques: Transfert radial

- Si on suppose que la conductivité thermique **k** est égale à une valeur moyenne **constante**.

Donc:

$$\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial r}(A\frac{\partial T}{\partial r})+\frac{g_0}{k}=\frac{\rho c_p}{k}\frac{\partial T}{\partial t}$$

- On obtient alors:

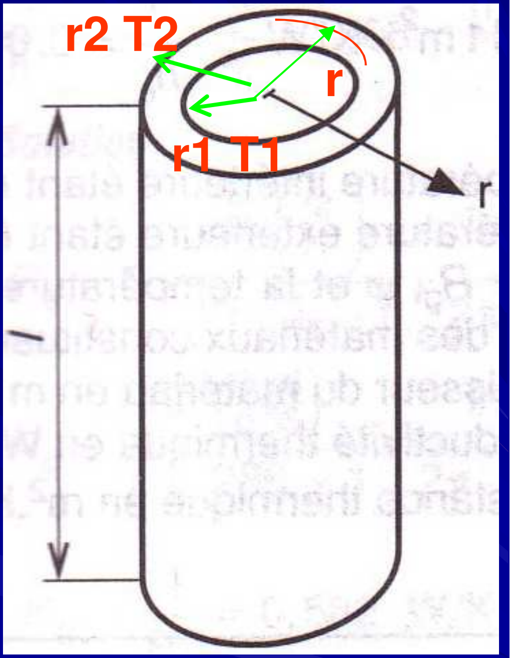
$$\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial r}(A\frac{\partial T}{\partial r})+\frac{g_0}{k}=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

Même forme d'équation qu'en c. cartésiennes

2- Equation en cylindrique: Transfert radial

- Or, pour un cylindre: **A=2πrL**
- **Soit alors**

$$\frac{1}{2\pi rL}\frac{\partial}{\partial r}(2\pi rL\frac{\partial T}{\partial r})+\frac{g_0}{k}=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$



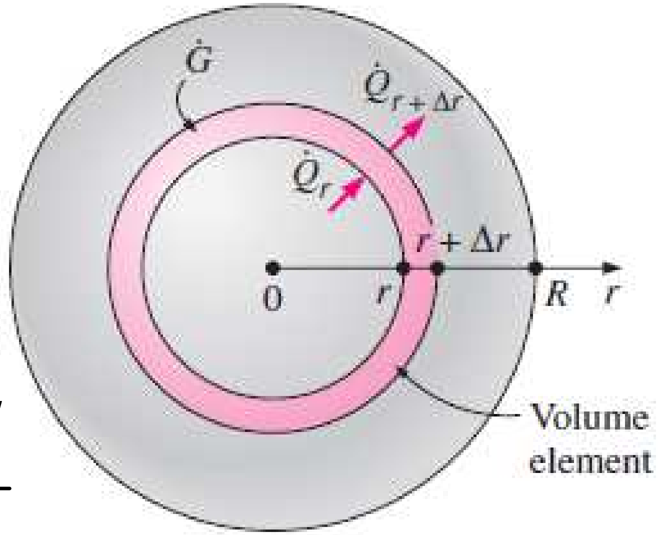
- **D'où**

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial T}{\partial r})+\frac{g_0}{k}=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

3- Equation en coordonnées sphériques: Transfert radial

- Pour une sphère **on retrouve aussi:**

$$\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial r}(A\frac{\partial T}{\partial r})+\frac{g_0}{k}=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$



- Or, pour une sphère: **A=4πr²**

$$\frac{1}{4\pi r^2}\frac{\partial}{\partial r}(4\pi r^2\frac{\partial T}{\partial r})+\frac{g_0}{k}=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

- **Soit alors**

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial T}{\partial r})+\frac{g_0}{k}=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

Equation en cylindrique: Transfert radial

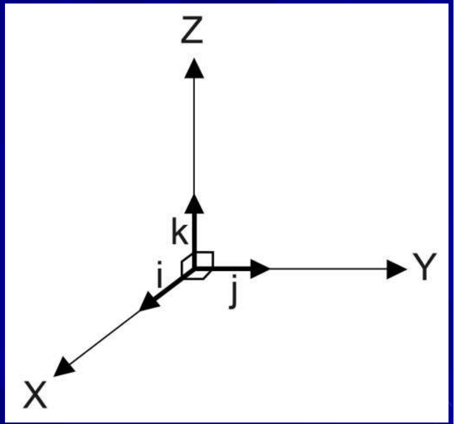
- **Remarque**
- Dans le **cas général et en monodimensionnel**:

$$\frac{1}{r^n}\frac{\partial}{\partial r}(r^n\frac{\partial T}{\partial r})+\frac{g_0}{k}=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

- Avec
  - **n=0** en coordonnées **cartésiennes**
  - **n=1** en coordonnées **cylindriques**
  - **n=2** en coordonnées **sphériques**

II- Equation tridimensionnelle de la chaleur

- **En coordonnées cartésiennes:**
- L'équation s'écrit en coordonnées **cartésiennes à 3D**:



$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}+\frac{g_0}{k}=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

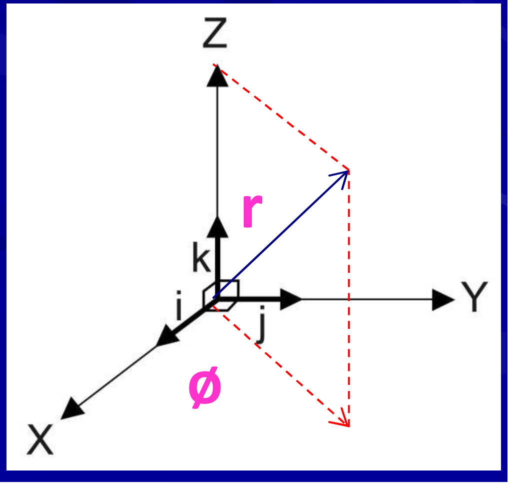
- Soit alors:

$$\Delta T+\frac{g_0}{k}=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

II- Equation tridimensionnelle de la chaleur

- **En coordonnées cylindriques:**
- obtenue en remplaçant le Laplacien cartésien en Laplacien cylindrique

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}+\frac{g_0}{k}=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$



II- Equation tridimensionnelle de la chaleur

- **En coordonnées sphériques:**
- obtenue en remplaçant le Laplacien cartésien en Laplacien sphérique

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial T}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial^2 T}{\partial\phi^2}+\frac{g_0}{k}=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$