Université Internationale de Casablanca

LAUREATE INTERNATIONAL UNIVERSITIES

Test sur un paramètre d'un modèle

Pr. BOUAMAINE A.

Plan

1. Test relatif à une moyenne
2. Test relatif à l'écart-type
3. Test relatif à une proportion

1. Test relatif à une moyenne

Soit une population possédant un caractère X.

On suppose que X a une distribution de Gauss de moyenne θ et d’écart type σ.

Test unilatéral

On suppose qu'on hésite entre deux valeurs θ0

et θ1 pour θ. (θ0 < θ1)

$$\begin{cases} H_0 & \theta=\theta_0 \\ H_1 & \theta=\theta_1 \end{cases}$$

Définition

- H0 est appelé hypothèse nulle et H1 est appelé hypothèse alternative.

Principe

- On extrait un échantillon au hasard et on étudie la conformité de notre hypothèse avec les résultats d’expériences.

Principe

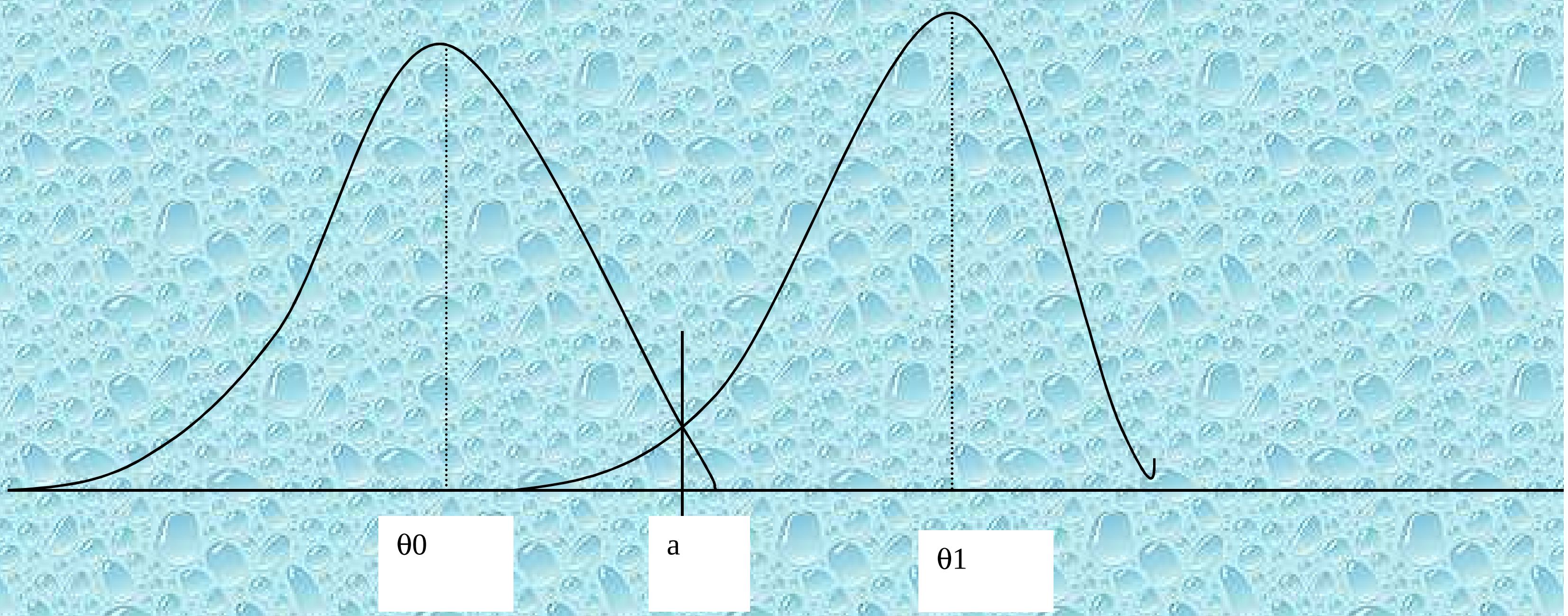
- Soit $\vec{x} = \left(x_1, x_{2, \ldots\ldots\ldots\ldots,}\ x_n\right)$ réalisation d'un échantillon aléatoire non exhaustif $\vec{X}$ du caractère X

Estimateur de la moyenne

- $\overline{X}$ est un estimateur non biais convergent de θ

- Sous H0, $L\left(\overline{X}\right) = N(\theta_0, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$

Principe



Cas 1 : Ecart-type connu

- Soit $$U = \frac{\overline{X} - \theta_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

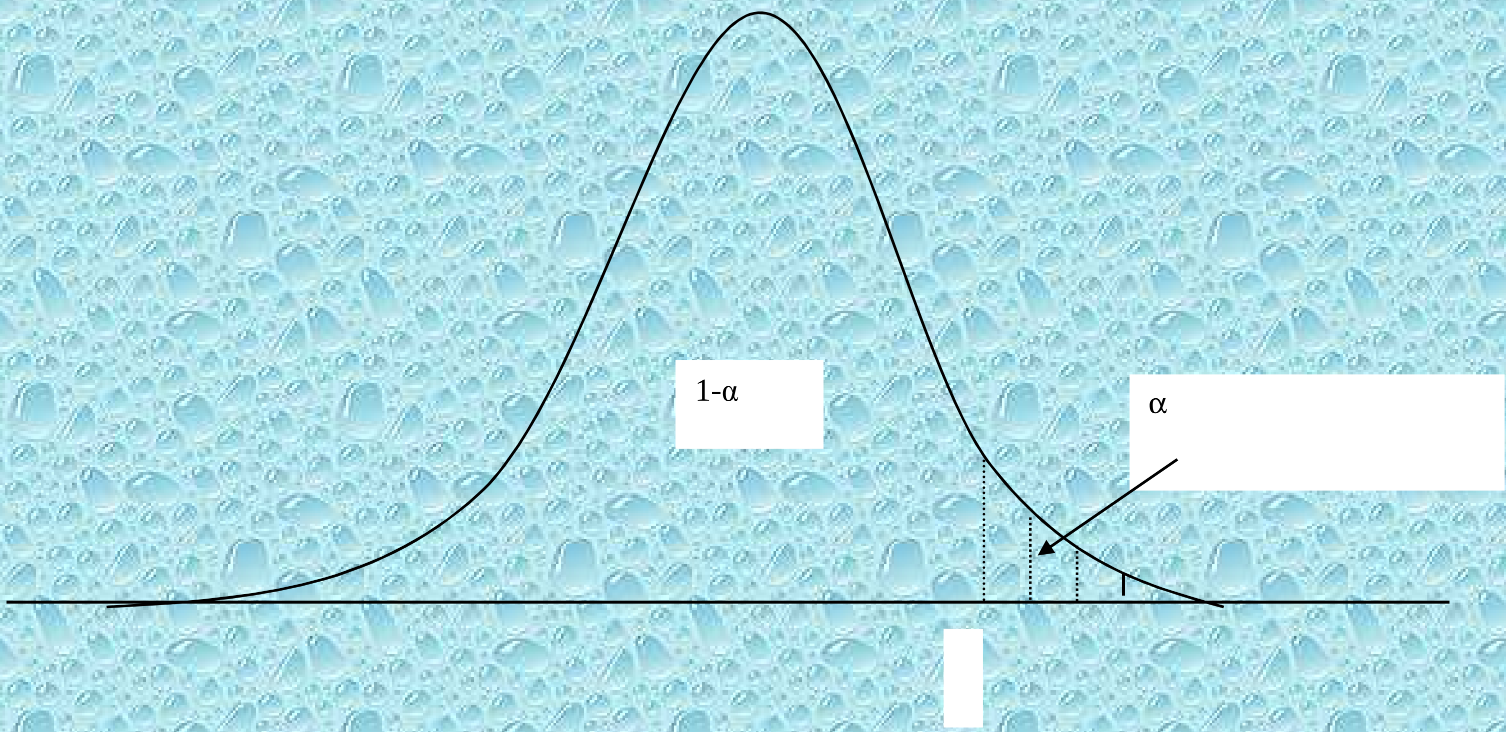
- Sous H0, L (U) = N (0, 1)

Propriété

On a :

$$L\left(\frac{\overline{X}-\theta_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)=N(0,1)$$

Zone d’acceptabilité et de rejet



On a :

$$P[\,U < u_{1-\alpha}\,] = P\left[\,\overline{X} < \theta_0 + u_{1-\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\,\right] = 1-\alpha$$

Règle de décision

$$\begin{cases} \text{Si} \quad \overline{x} < \theta_0 + u_{1-\alpha}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad \text{on accepte } H_0 \text{ au seuil } \alpha \\ \text{Si} \quad \overline{x} \geq \theta_0 + u_{1-\alpha}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad \text{on accpte } H_1 \text{ au seuil } \alpha \end{cases}$$

- n est la taille de l'échantillon
- σ est l'écart-type de la population supposée connu
- $\bar{x}$ est la moyenne de l'échantillon

- α seuil de confiance
- $u_{1-\alpha}$ Lu sur la table de Gauss centrée réduite

Vérité Décision	θ0	θ1
θ0	Bien	Erreur du 2ème espèce
θ1	Erreur du 1ère espèce	Bien

Erreur du premier espèce

P [" accepter θ1 lorsque θ0   est vrai "]

$$P\left[\frac{\overline{X}-\theta}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \geq u_{1-\alpha} \quad \text{lorsque}\ \theta_0\ \ \text{est}\ \ \text{vrai}\right] = \alpha$$

Erreur du deuxième espèce

P [" accepter θ0 lorsque θ1   est vrai   "] =

$$P\left[\frac{\overline{X}-\theta}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq u_{1-\alpha} \quad / \quad \theta = \theta_1 \right] = \beta$$

Puissance du test

P[" accepter $\theta 1$ lorsque $\theta 1$ est vrai "]

$=1-\beta$

Puissance du test

$\Pi =$ P[" accepter $\theta 1$ lorsque $\theta 1$ est vrai "]

$=1-\beta$

Puissance du test

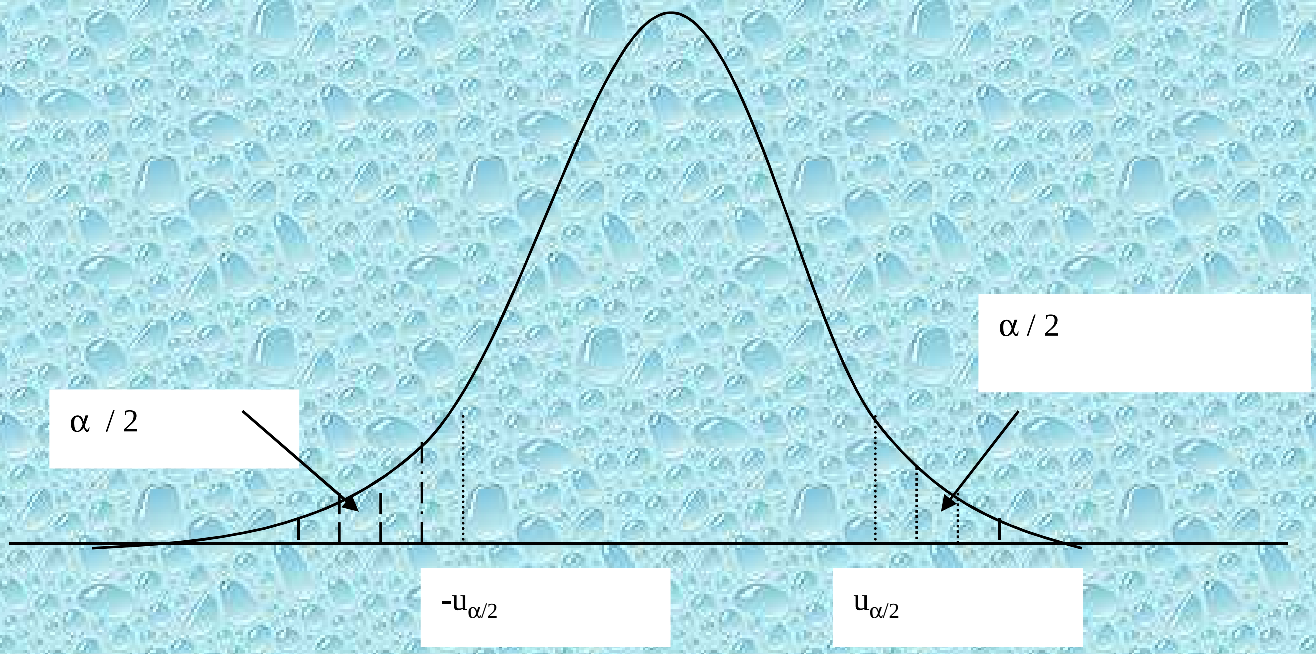
Soit $$\lambda = \frac{\theta_0 - \theta_1}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

On a : $$\Pi = 1 - \phi\left(\lambda + u_{1-\alpha}\right)$$

Φ : Fonction de répartition de la loi de gauss centrée réduite

Test bilatéral

$$\begin{cases} H_0 & \theta = \theta_0 \\ H_1 & \theta \neq \theta_0 \end{cases}$$



- α seuil de confiance
- $u_{\alpha/2}$ lu sur la table de N(0,1)

Règle de décision

$$\begin{cases} \text{Si} \quad \dfrac{\left|\bar{x}-\theta_0\right|}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}} < u_{\frac{\alpha}{2}} & \text{on accepte } H_0 \text{ au seuil } \alpha \\ \text{Sinon} & \text{on rejette } H_0 \text{ au seuil } \alpha \end{cases}$$

Puissance du test

$\Pi =$ P[" accepter $\theta 1$ lorsque $\theta 1$ est vrai "]

$=1-\beta$

Puissance du test

Π = P[" accepter $\theta 1$ lorsque $\theta 1$ est vrai "]

=1-β

Puissance du test

Soit $$\lambda = \frac{\theta_0 - \theta_1}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

On a :

$$\Pi = \phi\left(-\lambda - u_{\frac{\alpha}{2}} \right) = \phi\left(\lambda - u_{\frac{\alpha}{2}} \right)$$

Φ : Fonction de répartition de la loi de gauss centrée réduite

Cas 2 : écart-type inconnu

$$\begin{cases} H_0 & \theta = \theta_0 \\ H_1 & \theta \neq \theta_0 \end{cases}$$

Remarque

Comme σ est inconnu, il est raisonnable de

remplacer $\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

par un estimateur non biaisé :

Propriété

$$\frac{S}{\sqrt{n-1}}$$ est un estimateur non biaisé

convergent de $$\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Posons

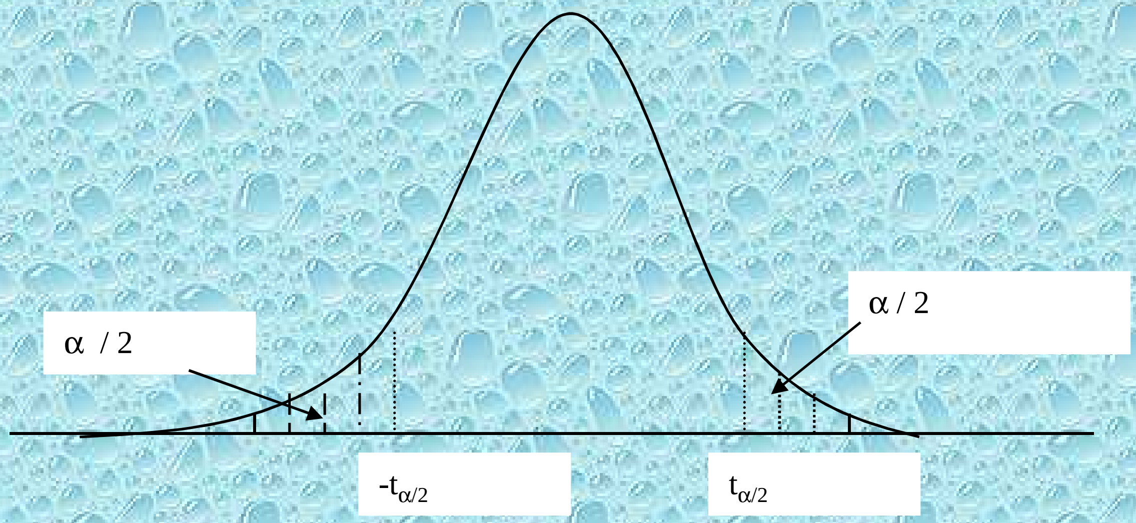
$$T_n = \frac{\overline{X} - \theta_0}{\frac{S}{\sqrt{n-1}}}$$

Propriété

T_n suit une loi de Student de degré

de libertés n-1

- Densité de probabilité de T_{n-1}



On a :

$$\mathrm{P}\left[\left|\overline{X}-\theta\right| < t_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n-1}}\right]=1-\alpha$$

Règle de décision

$$\begin{cases} \text{Si} \quad \dfrac{\left|\overline{x}-\theta_0\right|}{\dfrac{s}{\sqrt{n-1}}} < t_{\frac{\alpha}{2}} & \text{on accepte } H_0 \text{ au seuil } \alpha \\ \text{Si non} & \text{on rejette } H_0 \text{ au seuil } \alpha \end{cases}$$

Lexique

- n est la taille de l'échantillon
- s est l'écart-type de l'échantillon
- $\overline{x}$ est la moyenne de l'échantillon

Lexique

- α seuil de confiance

- $t_{\alpha/2}$ lu sur la table de Student de degré de liberté n-1

Approximation de la loi de Student

Pour n > 30, la loi de Student peut être par

une loi de Gauss centrée réduite

2. Test relatif à un écart type

Soit une population possédant un caractère X. On suppose que X a une distribution de Gauss de m et d’écart type σ.

Test bilatéral

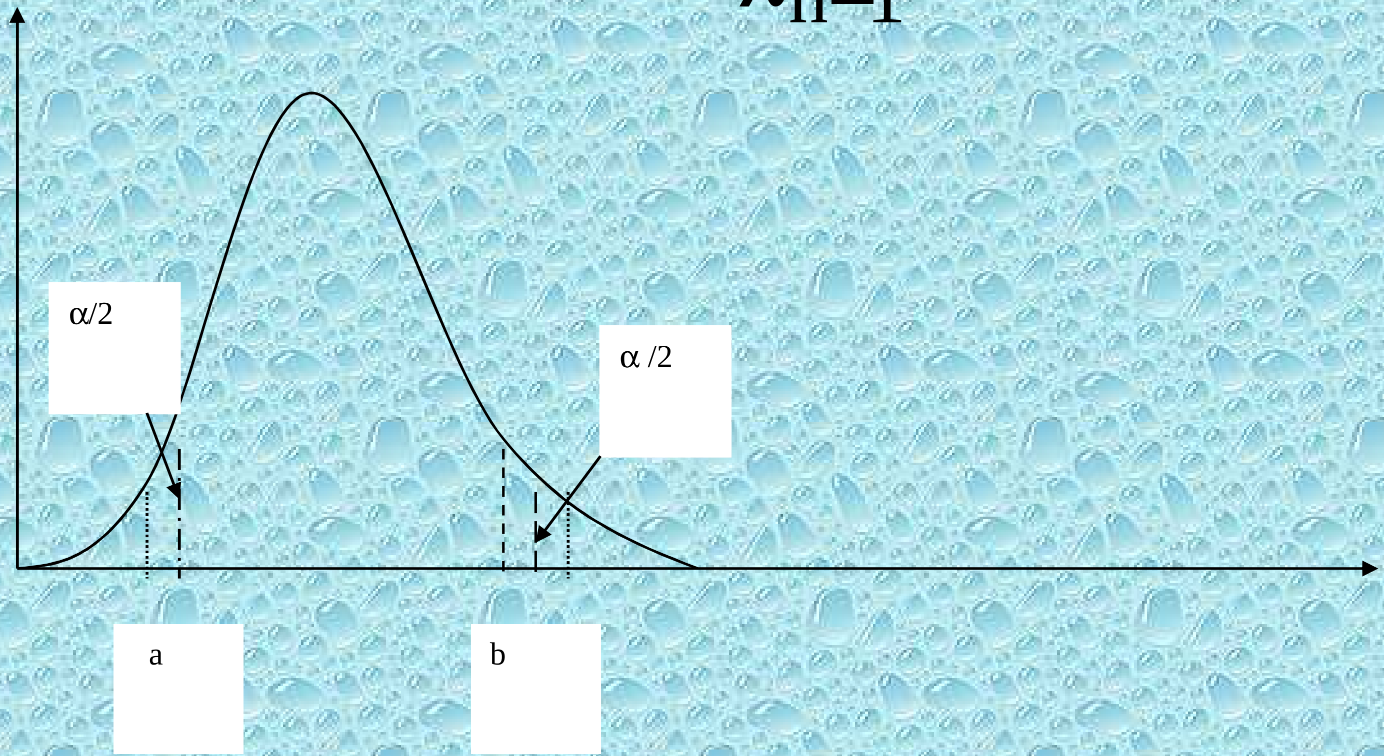
$$\begin{cases} H_0 & \sigma = \sigma_0 \\ H_1 & \sigma \neq \sigma_0 \end{cases}$$

Statistique

Soit $$T_n = \frac{n\,S^2}{\sigma_0^2}$$

Sous Ho, $$L\,(T_n) = \chi^2_{n-1}$$

- **Densité de probabilité de** χ^2_{n-1}



UIC

Zone d'acceptabilité

On a :

$$P\left[\ a < \frac{nS^2}{\sigma_0^2} < b\ \right] = 1 - \alpha$$

Règle de décision

$$\begin{cases} \text{Si} \quad s^2 \in \left]\dfrac{a\sigma_0^2}{n}, \dfrac{b\sigma_0^2}{n}\right[\quad \text{on accpte } H_0 \text{ au seuil } \alpha \\ \\ \text{Si non} \quad \text{on rejette } H_0 \text{ au seuil } \alpha \end{cases}$$

Lexique

- n : taille de l'échantillon
- α seuil de confiance
- s^2 : variance de l'échantillon
- a, b lus sur la table de khi-deux de degrés de liberté n-1

Approximation de la loi de khi-deux

- Pour n suffisamment grand,

$$L\left(\sqrt{2\chi^2_{n-1}}\right) = N\left(\sqrt{2n-1},1\right)$$

3. Test relatif à une proportion

- Soit p la proportion des individus d'une population ayant une propriété A donnée

Hypothèses

$$\begin{cases} H_0 & p = p_0 \\ H_1 & p \neq p_0 \end{cases}$$

Echantillonnage

- On extrait un échantillon au hasard non exhaustif de taille n , k individus de cet échantillon possèdent la propriété A.

Propriété

- k est une réalisation d'une var Kn .

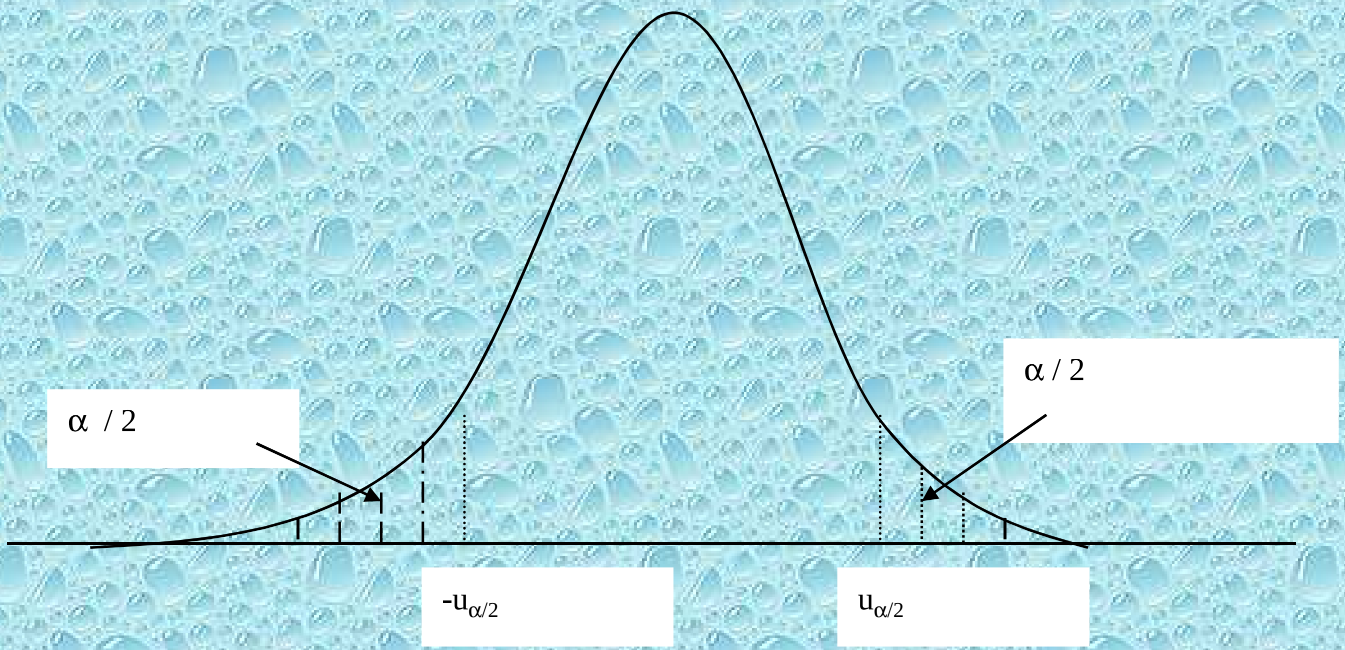
  On a : L (K) = B (n, p)

Statistique

- Posons : $$T_n = \frac{\frac{K}{n} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$$

- Sous Ho, L (Tn) = N (0, 1)

Densité de probabilité de N (0, 1)



Propriété

- On a :

$$P\left[\,|T_n| < u_{\alpha/2}\,\right] = 1 - \alpha$$

Zone d'acceptabilité

$$P\left[\left|T_n\right| < u_{\alpha/2}\right] = P\left[\frac{\left|\frac{K}{n} - p_0\right|}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} < u_{\frac{\alpha}{2}}\right] = 1-\alpha$$

Règle de décision

$$\begin{cases} \text{Si} \quad \dfrac{\left|\dfrac{k}{n} - p_0\right|}{\sqrt{\dfrac{p_0(1-p_0)}{n}}} < u_{\frac{\alpha}{2}} \quad \text{on accpte } H_0 \text{ au seuil } \alpha \\ \text{Sinon} \quad \text{on rejette } H_0 \text{ au seuil } \alpha \end{cases}$$

Lexique

- n : taille de l'échantillon
- k le nombre d'individus de l'échantillon ayant la propriété A
- α seuil de confiance
- p0 : paramètre à tester
- $u_{\alpha/2}$ Lu sur la table de Gauss centré-réduite