2. Variables aléatoires réelles

2.1. Application mesurable.

Soient (Ω,@) un espace de probabilité et (Ω', @') un espace mesurable. Soit f une application de Ω dans Ω'

On dit que f est une application mesurable ssi $\forall A' \in \Omega'$, $f^{-1}(A') \in \Omega$.

Soient P une propbabilité sur (Ω,@) et f une application mesurable de Ω dans Ω'.

Soit P_f :
$$@' \to [0, 1]$$
$$A' \to P_f(A') = P(f^{-1}(A'))$$

Propriété

P_f est une probabilité sur (Ω', @') appelée probabilité image de P par f

2. 2. Variable aléatoire réelle

On appelle variable aléatoire réelle v.a.r définie sur (Ω, **@**) toute application mesurable de (Ω, **@**) dans (IR, IB) .

2. 2. 1 Loi de probabilité

Soit X une v.a.r définie sur (Ω, **@**, ***P***) et $\mathbf{P}_X$ l'application de IB vers IR définie par :

$$\forall B \in IB, \quad \boldsymbol{P}_X(B) = \boldsymbol{P}(X^{-1}(B)) = \boldsymbol{P}(\{\omega : X(\omega) \in B\})$$

$\mathbf{P}_X$ est une probabilité appelée loi de probabilité de la variable aléatoire réelle X.

Notation : $\{\omega : X(\omega) \in B\} = [X \in B]$

2. 2. 2 Fonction de répartition

Soit (Ω, **@**, ***P***) un espace de probabilité et X une v.a.r définie sur (Ω, **@**,) de loi de probabilité $\mathbf{P}_X$. On appelle fonction de répartition de X, la fonction F définie par :

F :
$$IR \to [0, 1]$$
$$t \to F(t) = \mathbf{P}[X < t] = \mathbf{P}_X(]-\infty, t[)$$

Propriétés

- ✓ $t \in IR$, $0 \le F(t) \le 1$
- ✓ $\lim_{t\to-\infty} F(t) = 0$, $\lim_{t\to+\infty} F(t) = 1$
- ✓ Si a < b alors $F(b) - F(a) = \mathbf{P}_X(]a, b[)$
- ✓ F est croissante au sens large
- ✓ F est continue à gauche en tout point a de IR ; à droite, on a une discontinuité de saut $\mathbf{P}_X(\{a\})$

2. 3. Variables aléatoires réelles discrètes

2. 3. 1 définitions

Une variable aléatoire X est dite discrète ssi l'ensemble des réalisations possibles de X, X(Ω) est fini ou dénombrable.

$$X(\Omega) = \{x_i \,/\, i \in I \subset IN\}.$$

La loi de probabilité de X est déterminée par la donnée des nombres

$$\mathbf{P}[X=x_i] = \mathbf{P}(\{\omega \in \Omega \,/\, X(\omega) = x_i\}) = \mathbf{P}_X(\{x_i\})$$

On a : $\sum_{i\in I} P[X = x_i] = 1$

Exemple.
On lance trois fois une pièce, non truquée. Lorsqu'elle sort une pile on gagne 1 dh, une face 0 dh

Déterminer la loi de la variable X représentant le gain obtenu par le joueur.

2. 3. 2 Caravtèristiques d'une v.a.r discrète

Soit X une v. a. r. d définie par :

$$X(\Omega) = \{x_i \,/\, i \in I \subset IN\}.$$

$$P_i = P[X=x_i] = P_X(\{x_i\})$$

On a : $\sum_{i\in I} P[X = x_i] = 1$

<u>**Définitions**</u>

1. Si la série $\sum_i p_i |x_i|$ est convergente alors le nombre $E[X] = M_X = \sum_i p_i x_i$ est appelé moyenne de X ou espérance mathématique de X.

2. Soit $r \in IN^*$, si la série $\sum_i p_i |x_i|^n$ est convergente alors le nombre $M^n(X) = E[X^n] = \sum_i p_i x_i^n$ est appelé moment d'ordre n de X.

3. Soit $r \in IN^*$, si la série $\sum_i p_i |x_i - E(X)|^r$ est convergente alors le nombre $\mu_r(X) = E[(X-EX())^r]$ $= \sum_i p_i (x_i - E(X))^r$ est appelé moment centré d'ordre r de X.

4. Soit g une application mesurable, $E[g(X)] = \sum_i p_i g(x_i)$.

5. On appelle variance de X la quantité $Var(X) = \mu_2(X) = E[(X-E(X)^2]$. On appelle écart type de X la quantité $\sigma_x = \sqrt{var(X)}$.

6. Si E [X] =0 alors on dit que X est centrée. Si var(X) = 1 alors on dit que X est réduite.

Propriétés

- $\mu_1(X) = 0$
- $E[X+Y] = E[X] + E[Y]$
- $E[\alpha X] = \alpha E[X]$, $\alpha \in IR$
- $E[\alpha] = \alpha$, $Var[\alpha] = 0$
- $Var[\alpha X] = \alpha^2 Var[X]$
- $Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2$

Définition

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles discrètes.

$X(\Omega) = \{x_i / i \in I \subset IN\}$, $Y(\Omega) = \{y_j / j \in J \subset IN\}$.

X et Y sont indépendantes ssi $\forall (i, j) \in I \times J \quad P[X = x_i \text{ et } Y = y_j] = P[X = x_i]\, P[Y = y_j]$

Propriété

$$X \perp Y \Rightarrow Var[X+Y] = Var[X] + Var[Y]$$

Exercice
Soit X une var de loi de probabilité définie par :

xi	0	1	2	3
P [X = xi]	1/8	3/8	3/8	1/8

Determiner l'espance et l'écart-type de la v.a.r. X

2. 3. 3 Fonction génératrice

Soit X une variable aléatoire entière positive . On pose $p_n = P[X = n]$

Définition

On appelle fonction génératrice de X la série entière $G_X(t) = \sum_n p_n t^n$, $\forall t \in [0, 1]$

Remarque : $G_X(t) = E[t^X]$

Propriété
La loi d'une variable entière est parfaitement définie par sa fonction génératrice

$$P[X = n] = \frac{G_X^{(k)}(0)}{k!}.$$

Propriété

$$X \perp Y \Rightarrow G_{X+Y}(t) = G_X(t).G_Y(t).$$

Propriété

Soit X une variable aléatoire entière positive admettant une variance, on a :
- $E[X] = G'(1)$
- $Var[X] = G''(1) + G'(1) - (G'(1))^2$

Exercice.
Soit X la v.a.r. définie précedemment. Déterminer la fonction génératrice de X et en déduire son espérance mathématique et son écart-type.

2. 3 . 4 Inégalités de Bienaymé & Tchebychev et de Markov

a) Inégalité de Bienaymé & Tchebychev

Soit X une v. a. r. d'espérance $m = E[X]$ et de variance σ^2 alors

$$\forall t > 0, \quad P[\,|X - m| > t\,\sigma\,] \le \frac{1}{t^2}.$$

Conséquences

- $\forall t > 0, \quad P[\,|X - m| < t\,\sigma\,] \ge 1 - \dfrac{1}{t^2}$
- $\forall t > 0, \quad P[\,|X - m| > t\,] \le \dfrac{Var[X]}{t^2}.$
- $\forall t > 0, \quad P[\,|X| > t\,] \le \dfrac{E[|X|^2]}{t^2}$

b) Inégalité de Markov

Soit X une v. a. r. dont le moment d'odre α existe. On a :

$$\forall t > 0, \quad P[\,|X| > t\,] \le \frac{E[|X|^\alpha]}{t^\alpha}.$$

2. 3. 5 Fonction caractéristique

<u>Définition:</u>

Soit X une v. a. r. d définie par : $X(\Omega) = \{x_j / j \in J \subset IN\}$ et $p_j = \mathbf{P}[X = x_j]$
On appelle fonction caractéristique de la X, la fonction φ_X définie de IR dans C par :

$$\varphi_X(t) = E[e^{itX}] = \sum_{j \in J} p_j e^{itx_j}$$

Propriétés

- $|\varphi(x)| \le 1$ et $\varphi(0) = 1$
- si $E[X^n]$ existe pour $n \in IN^*$ alors φ_X est n fois dérivable et $M^n(X) = \dfrac{\varphi^n(0)}{i^n}$
- $Y = aX + b \Rightarrow \varphi_Y(t) = e^{itb}\varphi_X(at)$
- $X \perp Y \Rightarrow \varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t).\,\varphi_Y(t).$

Exercice.

Soit X la v.a.r. définie précedemment. Déterminer la fonction caractéristique de X et en déduire son espérance mathématique et son écart-type.

2. 4. Lois usuelles discrètes

2. 4. 1. Loi de Bernoulli de paramètre p

Soit $(\Omega, @, P)$ un espace mesurable, soit A un événement de @ et $p = P(A)$.

On considère la v. a. r. X définie sur Ω par :

$X(\omega) = 1$ si $\omega \in A$ et $X(\omega)=0$ si $\omega \in \overline{A}$

Loi de probabilité de X

x_i	1	0
$p_i = P[X = xi]$	p	q

Notation : $L(X) = \mathcal{B}_e(p)$

Propriété

- $E[X^n] = p$, $Var[X] = pq$
- $\varphi_X(t) = p\,e^{it} + q$

2. 4. 2 . loi Binomiale de paramètres n et p

Soit une expérience aléatoire à deux issues. S = 'Succès' et E = 'échec' avec $P(S) = p$, $P(E) = q$ 0

On répète d'une façon indépendante cette expérience n fois . Soit X le nombre de succès obtenus.
Ona :

$X(\Omega) = \{0, 1, \ldots\ldots, n\}$

$P[X = k] = C_n^k p^k q^{n-k}$. $\forall k \in X(\Omega)$

Notation : $L(X) = \mathcal{B}(n, p)$

Propriétés

- $E[X] = np$, $Var[X] = npq$
- $\varphi_X(t) = (p\,e^{it} + q)^n$
- Soient $X_1, X_2, \ldots X_n$ v.a.r indépendantes de lois de Bernouilli de paramtre p, on a : $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$
- Soient X v.a.r de loi $\mathcal{B}(n, p)$ et Y v.a.r de loi $\mathcal{B}(m, p)$

$X \perp Y \Rightarrow L(X + Y) = \mathcal{B}(n + m, p)$

Exercice.

On suppose que les expériences sont dépendantes. Que devient la loi de probabilité de X et ses caractéristiques.

2. 4. 3 . Loi de poisson de paramètre λ

Soient $\lambda > 0$ et X une v.a.r. définie par : $X(\Omega) = IN$.

$$P[X = k] = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad \forall k \in IN$$

Notation : $L(X) = \mathcal{P}(\lambda)$

Propriétés

- $E[X] = \lambda$, $Var[X] = \lambda$
- $\varphi_X(t) = \exp(\lambda e^{it} + 1)$
- Soient X v.a.r de loi $\mathcal{P}(\lambda)$ et Y v.a.r de loi $\mathcal{P}(\mu)$

$X \perp Y \Rightarrow L(X + Y) = \mathcal{P}(\lambda + \mu)$

2. 5. Variables aléatoires continues

Soit X variable aléatoire réelle de fonction de répartition F .

X est dite variable aléatoire absolument continue s'il existe une fonction posive f telle que :

$$\forall t \in IR \qquad F(t) = \int_{-\infty}^{t} f(t)dt$$

f est appelé densité de probabilité de la v.a.r X.

Conséquences

- En tout point de continuité t de la fonction f, on a : $F'(t) = f(t)$
- S'il existe une densité f, alors la fonction de réparttion est continue ($P[X = a] = 0$)

Propriétés

- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$
- $P[X > t] = \int_{t}^{+\infty} f(x)dx$
- $\forall A \in IB$ $P_X(A) = \int_A f(x)dx$
- $P_X([a, b]) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$

Propriété

Toute fonction réelle f vérifiant les conditions ci-dessous est une densité de probabilité d'une v.a.r X :

1. $\forall x \in IR,\ f(x) \geq 0$
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$
3. f continue sur IR sauf en un nombre fini de points.

Définition

Soit X une v.a.r. absolument cntinue de densité f . On dit que X a une espérance mathématique ssi $\int_{-\infty}^{+\infty} |x|\, f(x)dx$ est finie. Dans ce cas m = $E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$

Propriété

Soit g une application mesurable, on a : $E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx$

Définition

Soit X une v.a.r. absolument cntinue de densité f . On dit que X a une variance ssi $\int_{-\infty}^{+\infty} (x-m)^2 f(x)dx$ est finie. Dans ce cas $Var[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-m)^2 f(x)dx$

Exercice.

Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} ax(1-x) & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

i) Déterminer a pourque f soit la densité de probabilité d'une v.a.r X
ii) Calculer l'epérance mathématique de X et sa variance

Fonction caractéristique

Soit X une v.a.r. absolument cntinue de densité f . On appelle fonction caractéristique de la X, la fonction φ_X définie de IR dans C par :

$$\varphi_X(t) = E[e^{itX}] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f(x)dx$$

Remarque.

Toutes les propriétés de l'espérance mathématique ; de la variance et de la fonction caractéristique vues dans le cas discret sont encore valables dans le cas continue.

2. 6 . Lois usuelles absolument continues

2. 6 .1 Loi uniforme sur un intervalle [a,b]

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a,b] \\ 0 & \text{si } x \notin [a,b] \end{cases}$$

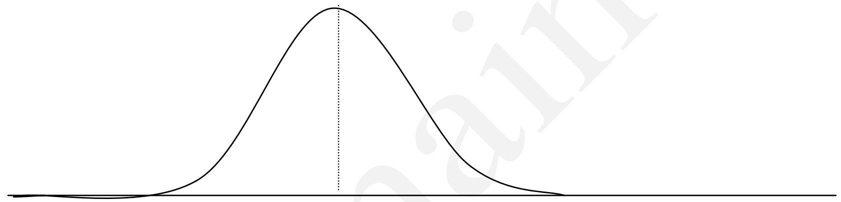
Notation : $\mathcal{L}(X) = U(a, b)$

Propriétés

- $E[X] = \dfrac{a+b}{2}$; $Var[X] = \dfrac{b^2-a^2}{12}$
- $\varphi_X(t) = \dfrac{1}{b-a} \dfrac{e^{itb}-e^{ita}}{it}$

2.6 . 2 Loi normale centrée réduite (Loi de Gauss)

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \quad \forall x \in IR$$



0

Propriétés

- $E[X] = 0$; $var[X] = 1$
- $\varphi_X(t) = e^{-\frac{1}{2}t^2}$

Notation : $\mathcal{L}(X) = \mathcal{N}(0, 1)$

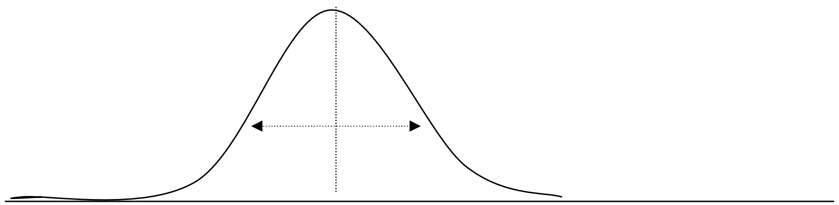
Propriété

Soit ϕ la fonction de répartition d'une variable de loi N (0, 1).

On a : $\phi(-x) = 1 - \phi(x)$

2.6.3. Loi Normale de paramètres m et σ

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2} \quad \forall x \in IR$$



m

Notation : $\mathcal{L}(X) = \mathcal{N}(m, \sigma^2)$

Propriétés

- $E[X] = m$; $Var[X] = \sigma^2$
- $\varphi_X(t) = e^{imt - \frac{1}{2}t^2}$

Propriété

Soient X v.a.r de loi $\mathcal{N}(m_1, \sigma_1^2)$ et Y v.a.r de loi $\mathcal{N}(m_2, \sigma_2^2)$

$$X \perp Y \Rightarrow \mathcal{L}(X+Y) = \mathcal{N}(m_1 + m_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$$

2.6.4. Loi gamma de paramètres α :

Rappels

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$$

On a :

- $\Gamma(\alpha+1) = \alpha.\Gamma(\alpha)$ et $\Gamma(n+1) = n!$ si $n \in IN$
- $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

Densité de probabilité :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Notation : $\mathcal{L}(X) = \Gamma(\alpha)$

Propriétés

- $E[X] = \alpha$; $Var[X] = \alpha$
- $\varphi(t) = \dfrac{1}{(1 - it)^{\alpha}}$

2.6.5 Loi exponentielle de paramètre λ

Densité de probabilité

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad \text{avec } \lambda > 0$$

Fonction de répartition

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Notation : $\mathcal{L}(X) = \mathcal{E}(\lambda)$

Propriétés

- $E[X] = \dfrac{1}{\lambda}$ et $Var[X] = \dfrac{1}{\lambda^2}$

2.6. 6. Loi gamma de paramètres α et b

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{b^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-bx} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad (\alpha > 0 \text{ et } b > 0)$$

Notation : $\mathcal{L}(X) = \Gamma(\alpha, b)$

Propriétés

- $E[X] = \dfrac{\alpha}{b}$; $Var[X] = \dfrac{\alpha}{b^2}$
- $\varphi(t) = \dfrac{1}{\left(1 - \frac{it}{b}\right)^{\alpha}}$

Propriété

- Soient X v.a.r de loi de probabilité $\Gamma(\alpha_1, b)$ et Y v.a.r de loi de probabilité $\Gamma(\alpha_2, b)$

$$X \perp Y \Rightarrow \mathcal{L}(X+Y) = \Gamma(\alpha_1 + \alpha_2, b)$$

Cas particuliers.

Cas 1 : Loi exponentielle

$\mathcal{E}(\lambda) = \Gamma(1, \lambda)$

Cas 2 : **Loi gamma de paramètres α :**

$\Gamma(\alpha) = \Gamma(\alpha, 1)$

Cas 3. Loi du khi-deux

On dit que X suit une loi du khi-deux de n degré de liberté ($n \in IN^*$) lorsque $\mathcal{L}(X) = \Gamma\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right)$

Notation : $\mathcal{L}(X) = \chi_n^2$

Propriétés

- $E[X] = n$; $Var[X] = 2n$
- $\varphi(t) = \dfrac{1}{(1-2it)^{n/2}}$

Propriété

$$\mathcal{L}(X) = \mathcal{N}(0,1) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}(X) = \chi^2_1$$

Propriété

- Soient X v.a.r de loi de probabilité χ^2_n et Y v.a.r de loi de probabilité χ^2_m

$$X \perp Y \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}(X+Y) = \chi^2_{n+m}$$