ESPACE DE PROBABILITE

1. Vocabulaire Probabiliste

- Une expérience est dite aléatoire si on ne peut pas envisager par avance son résultat (e.a)
- Un évènement élémentaire ou épreuve associé à une expérience aléatoire tout résultat possible. On le note ω.
- Un espace fondamental ou univers associé à une e. a. est l'ensemble de toutes les résultats possibles: On le note par Ω.
- On appelle évènement, toute proposition logique relative au résultat de l'e. a.

Un évènement est réalisé ou non suivant que la proposition est vraie ou fausse une fois que l'e. a. est accomplie. Un évènement est représenté par un sous ensemble de Ω. On confond la notation de l'évènement est celle de sa représentation ensembliste.

Notation

$\mathbf{\Omega}$ **:** L'événement certain

ϕ **:** L'événement impossible

$\mathbf{A^C}$ ou $\overline{A}$ **:** L'événement contraire de A

$\mathbf{A \cap B}$: L'événement A et B

$\mathbf{A \cup B}$: L'événement A ou B

$\mathbf{A + B}$: L'événement A ou B lorsque $\mathbf{A} \cap B = \phi$. On dit que A et B sont incompatibles

$\mathbf{A \subset B}$: l'événement A implique l'événement B

Exemple.

e. a. : Jet d'un dé.

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

A : " le résultat est un nombre supérieur à 3 " $A = \{4, 5, 6\}$

B : " le résultat est un nombre pair " $B = \{2, 4, 6\}$

A^c : " le résultat est un nombre impair " $A^c = C_{\Omega}^{A} = \{1, 3, 5\}$

C : " avoir un nombre pair supérieur à 3 " $C = A \cap B = \{4, 6\}$

D : " avoir un nombre pair ou un nombre supérieur à 3 " $D = A \cup B = \{2, 4, 5, 6\}$

Définition.

Soient des événements $A_1, A_2, \ldots\ldots\ldots, A_{n, \ldots}$ associés à une même expérience aléatoire.

On dit que $(A_1, A_2, \ldots\ldots, A_{n, \ldots})$ est un système complet si les A_n forment une partition de Ω

Exemple.

(A, A^c) est système complet de Ω

Définitions.

Etant donné Ω, la famille @ des événements est une tribu ou σ-algèbre ssi :

i) $\Omega \in$ @.

ii) si $A \in$@ alors $A^C \in$@ .

iii) Si (A_n) est tune suite d'événements de @ alors $\left(\bigcup_n A_n\right) \in$ @

$(\Omega$, @) est appelé un espace de mesure.

Conséquences.

- $\phi \in @$
- Si $\forall n$, $A_n \in @$ alors $(\bigcap_n A_n) \in @$

Exemples.

- $@ = \{ \Omega, \phi \}$ est la plus petite tribu.
- Si Ω est fini, $\mathscr{P}(\Omega)$ L'ensemble des parties de Ω est une tribu.
- $@ = \{ A, A^C, \Omega, \phi\}$ avec $A \subset \Omega$ et $A \neq \phi$ est une tribu. @ est appelé la tribu engendrée par A.

Définition.

Etant donné une famille $\mathcal{F}$ de parties de Ω, l'intersection de toutes les tribus qui contiennent $\mathcal{F}$ est une tribu appelée Tribu engendrée par $\mathcal{F}$

Exemple : Tribu borélienne.

$@ = IR$, $\mathcal{F} = \{]-\infty, a] , a \in \mathrm{IR} \}$. La tribu engendrée par $\mathcal{F}$ est appelée tribu borélienne.

2. Probabilités

Soit (Ω, **@**) un espace mesurable. Une probabilité P sur cet espace est une application de **@** dans l'intervalle [0,1] vérifiant :

i) $P(\Omega) = 1$

ii) Pour toute suite (A_n) d'éléments de **@** deux à deux disjoints on a :

$$P(\bigcup_{n\in I} A_n) = \sum_{n\in I} P(A_n).$$ (I peut être fini ou infini dénombrable.)

Conséquences

1. $P(A^C) = 1 - P(A)$
2. $P(\phi) = 0$
3. $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$
4. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

   $P(A\cup B) \leq P(A) + P(B)$
5. Pour toute suite d'événements (A_n) monotone. Si $\lim A_n = A$ alors $\lim P(A_n) = P(A)$.

Définition : Le triplet (Ω, **@**, P) est appelé espace de probabilité.

<u>Cas particuliers</u>

Cas 1 : espace fondamental dénombrable

Soit $\Omega = \{ \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n, \ldots \}$ un espace fondamental dénombrable
La probabilité P est entièrement déterminée par la donnée des probabilités des événements élémentaires p_n défini par :

$$p_n = P(\{\omega_n\}) \quad 0 \leq p_n \leq 1 \qquad \sum_n p_n = 1$$

Cas 2 ; Probabilité uniforme

Définition : Soit Ω un espace fondamental fini. Une probabilité est dite uniforme si les probabilités des épreuves sont égales

Dans ce cas : Pour tout $A \in \mathscr{P}(\Omega)$: $$P(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$$

Exercice 1
Dans un jeu de 32 cartes, on tire une carte au hasard. Quel est la probabilité d'obtenir un as ?

Exercice 2
On joue avec deux dés numérotés. Déterminer la probabilité des évènements représentant la somme des points obtenus ?

3. Probabilité conditionnelle

Soit (Ω, **@**, P) un espace de probabilité et A un événement de @, tel que $P(A) \neq 0$.

$$\Pi : \begin{array}{ccc} @ & \to & [0,1] \\ B & \to & \Pi(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} \end{array}$$

Propriété : L'application Π est une loi de probabilité.
Définition : Π est appelé loi de probabilité conditionnelle à A et $\Pi(B)$ est appelé la probabilité de B conditionnée par A.

Notation : $\Pi(B) = P_A(B) = P\left({}^{B}\!/_{A} \right)$

Propriété 1 : Formule de l'intersection **:**

Soit $(A_i)_{1 \le i \le n}$ une suite d'événements, on suppose que $P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}) \neq 0$.

On a : $P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2/A_1) \ldots P(A_n / (A_{n-1} \cap \ldots A_2 \cap A_1))$

Propriété 2 : Formule de Probabilité Totale
Soit $(A_i)_{i \in I}$ un système complet d'événements avec $\forall i \in I$, $P(A_i) \neq 0$

On a : $\forall B \in @$ $$P(B) = \sum_{i \in I} P(B/Ai)P(Ai).$$

Propriété 3 : Formule de Bayes

Soit $(A_i)_{i \in I}$ un système complet d'événements avec $\forall i \in I$, $P(A_i) \neq 0$.

On a : $$P(A_i / B) = \frac{P(B/Ai)P(Ai)}{\sum_{i \in I} P(B/Ai)P(Ai)}$$

Définition.
Deux événements A et B sont indépendants ssi : $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

Notation : $A \perp B$

Remarque : Si $A \perp B$ alors : $P(B/A) = P(B)$

Propriétés.

i) Si $P(A) = 0$ ou $P(A) = 1$ alors A est indépendantes de tout événement.

ii) Si A et B sont indépendants alors la tribu engendrée par l'événement A et la tribu engendrée par l'événement B sont formées par des éléments indépendants: On dit que les deux tribus sont indépendantes

Définitions

Soit $(A_i)_{1\leq i\leq n}$ une suite d'événements de l'espace de probabilité (Ω, @, P).

i) Les événements A_n sont mutuellement indépendants ssi pour toute partie I de {1, 2, .., n } On a :

$$P(\bigcap_{i\in I} A_i) = \prod_{i\in I} P(A_i)$$

ii) Les événements A_n sont indépendants deux à deux ssi pour toute i, j de {1, 2, …, n }

$$P(A_i \cap A_j) = P(A_i)\, P(A_j)$$

Remarque.

L'indépendance mutuelle entraine l'indépendance deux à deux. La réciproque est fausse.