Méthodes des Différences Finies

November 25, 2017

Définitions

- Définition 1.1 (EDP) : Une équation aux dérivées partielles fait intervenir plusieurs variables indépendantes (temps, espace ...), ainsi que les dérivées partielles de la variable par rapport à ces variables indépendantes. Par exemple, l'équation : $\frac{\partial C}{\partial t} + u\frac{\partial C}{\partial x} = 0$ est une EDP. La variable dépendante est C, les variables indépendantes sont t et x. u peut être fonction de t, x et C.
- Définition 1.2 (ordre de l'EDP)
  L'ordre d'une EDP est l'ordre le plus élevé parmi les dérivées partielles apparaissant dans l'EDP.
- Remarque : dans ce cours, on se limitera aux EDP d'ordre 2.

Définitions

Définition 1.3 (EDP)

On dit qu'une EDP est linéaire si elle ne fait intervenir que des combinaisons linéaires des dérivées partielles de la variable dépendante. On dit qu'une EDP est quasi-linéaire si elle est linéaire par rapport aux dérivées d'ordre le plus élevé. Ainsi, l'EDP : $a\frac{\partial u}{\partial t} + b\frac{\partial u}{\partial y} = c$
est quasi-linéaire si a, b et c sont des fonctions réelles de x, y et u. Elle serait linéaire si a, b et c ne dépendaient que de x et y, et à coefficients constants si a, b et c ne dépendaient plus de x, y et u. De même,

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = d$$

est quasi-linéaire si a, b, c et d sont des fonctions réelles de x, y, u, u_x, u_y. En dehors de ces critères, l'EDP est non-linéaire.

Classification des E.D.P

u telle que $u = u(x, y)$ solution de :

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f = f(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y})$$

a, b, c ne dépendent que de x, y.

E.D.P : $\rightarrow$ Linéaire
: $\rightarrow$ $2^{ème}$ ordre Mais " général "

$$b^2 - ac > 0 \quad \text{Hyperbolique}$$

$$b^2 - ac = 0 \quad \text{Parabolique}$$

$$b^2 - ac < 0 \quad \text{Elliptique}$$

Exemples

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

Equation hyperbolique des ondes

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \Delta u = 0$$

Equation elliptique : Potentiel des ondes d'une plaque conductrice

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t} - d \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

Equation parabolique de diffusion : *Température* d'une barre métallique.

Conditions aux limites

a) Dirichlet

u est connue sur la frontière

$$u = u_0 \quad \text{sur } \partial\Omega$$

b) Newmann

$$\frac{\partial u}{\partial n} = f_0, f_0 \text{ est connue .}$$

c) Mixte

$$\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n} = f_1, f_1 \text{ est connue}$$

Conditions initiales

(Problèmes d'évolution)

$$u(x, t_0) = \textit{connue} \text{ sur } \Omega$$

Un problème aux E.D.P nécessite la donnée de :

$1-$ Un domaine Ω;

$2-$ Une équation aux dérivées partielles;

$3-$ Des conditions aux limites;

$4-$ Des conditions initiales (si problème d'évolutions)

L'approximation de l'E.D.P, c'est approcher :

$1-$ " approcher " Ω;

$2-$ " Approximer " les dérivées;

$3-$ " Approcher " les CL$+$ CI

(MDF) :

C $'$est comment ?

$1-$ comment approcher Ω;

$2-$ comment approximer les dérivées;

$3-$ comment approcher les CL$+$ CI;

$4-$ approximation est bonne ? Stabilité et Convergence.

Approximation des dérivées

On suppose satisfaites les conditions de validité des calculs qui suivent.
La formule de Taylor-Lagrange donne

$$
\begin{aligned}
f(x+h) &= f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \frac{h^3}{3!}f'''(x) + \\
&\quad \ldots\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x) + o(h^n).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f(x+h, y+k) &= f(x,y) + h\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \\
&\quad k\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) + \frac{h^2}{2!}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \\
&\quad \frac{k^2}{2!}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) + hk\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) +
\end{aligned}
$$

$$
..\frac{1}{(n-1)!}\left[h\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + k\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right]^{(n-1)} + o((|h|+|k|)^n).
$$

Par addition et soustraction nous obtenons

$$f'(x) \simeq \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h},$$

$$f''(x) \simeq \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \simeq \frac{f(x+h,y) - f(x-h,y)}{2h},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \simeq \frac{f(x,y+k) - f(x,y-k)}{2k}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) \simeq \frac{f(x+h,y) - 2f(x,y) + f(x-h,y)}{h^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \simeq \frac{f(x,y+k) - 2f(x,y) + f(x,y-k)}{k^2}$$

Condition de Dirichlet

On numérote ensuite les points de R et on sépare les numérotations sur le bord de celle de l'intérieur.
Lorsque M décrit R, l'ensemble de toutes les équations précedentes (il y en a autant que d'élements de R) est équivalent à un système linéaire de la forme (3) $AU = B$. Le système linéaire (3) peut-être résolu par des méthodes de Gauss s'il y a un nombre restreint d'inconnues. Si le nombre d'inconnues est grand et la matrice est symétrique définie positive, on pourra utiliser une méthode de Choleski, si la matrice n'est pas symétrique, des méthodes itératives s'imposent.

Condition de Neumann

Lorsque les conditions sont de type (b), la valeur de l'inconnue n'est plus donnée partout sur le bord mais seulement sur une partie.

$$\frac{\partial u}{\partial n} = f(s), s \in \partial\Omega$$

$$\Delta u = 0 \, \text{dans } \Omega$$

B) Considérons le problème suivant sur $\Omega =]0, L[\times]0, L[$

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = f(x,y); (x,y) \in \Omega \\ u(x,y) = g(x,y); (x,y) \in \partial\Omega \end{cases}$$

Soit un entier N, on obtient le réseau

$$R = R_{hk} = \left[M_{ij} : M_{ij} = (ih, jk); i, j = 0, \ldots\ldots N; h = \frac{L}{N} \right].$$

Pour ne pas avoir des matrices trop grandes, nous prendrons $N = 4$.
Nous numérotons les points comme indiqué sur la figure 2.
Nous noterons f_i la valeur de f au point numéroté i et g_i la valeur de g au point numéroté $i (i = 10, 25)$ et V_i l'approximation au point i.
Nous avons l'approximation

$$
\begin{aligned}
\Delta u(x,y) &= \frac{u(x-h,y)+u(x+h,y)+}{h^2} \\
&\quad \frac{u(x,y-h)+u(x,y+h)-4u(x,y)}{h^2} \\
&= f(x,y)
\end{aligned}
$$

Nous obtenons donc, en écrivant cette équation aux points $i = 1, ..., 9$:

$$
\begin{pmatrix}
-4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
V_1 \\ V_2 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \\ V_6 \\ V_7 \\ V_9
\end{pmatrix}
$$

$$= \begin{pmatrix} h^2 f_1 - g_{11} - g_{25} \\ h^2 f_2 - g_{12} \\ h^2 f_3 - g_{13} - g_{15} \\ h^2 f_4 - g_{24} \\ h^2 f_5 \\ h^2 f_6 - g_{16} \\ h^2 f_7 - g_{21} - g_{23} \\ h^2 f_8 - g_{20} \\ h^2 f_9 - g_{17} - g_{19} \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow AV = B$$

Le Problème Elliptique

On considère le modéle linéaire (P) suivant :

$$(P)\begin{cases} -u''(x) + c(x)u(x) = f(x) \quad \text{pour } 0 < x < 1 \\ u(0) = \alpha \\ u(1) = \beta \end{cases}$$

On s'intérésse à l'approximation par la méthode de la différence finies du problème stationnaire (P).
Soit $h = \Delta x$ tel que $(N+1)h = 1$ et on discrétise $]0,1[$.

$$\frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2} = u''(x) + \frac{h^2}{24}u^{(4)}(\zeta).$$

Posons $u_i = u(x_i)$, $c_i = c(x_i)$, $f_i = f(x_i)$ pour $i = 1, ...N$
d'où on approche (P) par le schéma

$$(P_h)\begin{cases} -\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + c_i u_i = f_i \quad \text{pour } i = 1, ...N \\ u_0 = \alpha \\ u_{N+1} = \beta \end{cases}$$

Si on pose

$$u_h = \begin{pmatrix} u_1 \\ . \\ . \\ . \\ . \\ u_N \end{pmatrix}, b_h = \begin{pmatrix} f_1 + \frac{\alpha}{h^2} \\ . \\ f_i \\ . \\ . \\ f_N + \frac{\beta}{h^2} \end{pmatrix}$$

$$A_h = \begin{bmatrix} . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & \frac{2}{h^2} + c_i & \frac{-1}{h^2} & . & . \\ . & \frac{-1}{h^2} & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \end{bmatrix}$$

d'où (P_h) est équivalent : $A_h u_h = b_h$

Remarque

a) Si on suppose que $c(x) > 0$, la matrice A_h est à diagonale dominante. Donc la méthode de Jacobi et Gauss-Siedel marchent pour la résolution du systéme linéaire (P_h).

b) A_h est définie symétrique positive d'où la méthode de relaxation marche.

Théorème de convergence $\quad (c(x) \geq 0)$

Soit u_h la solution discréte du problème (P_h), u la solution du problème (P) et posons $V = ^t (u(x_i))$ alors $\|u_h - V\|_\infty \leq ch^2$;

c'est à dire $\|u_h - V\|_\infty \to 0$ pour $h \to 0$ et $i \to +\infty$

6 Problème Général

On considére le problème linéaire général à une variable

$$(S) \begin{cases} -a(x)u^{''}(x) + b(x)u'(x) + c(x)u(x) = f(x) \\ \text{pour } 0 < x < 1 \\ u(0) = \alpha \\ u(1) = \beta \end{cases}$$

On s'intéresse à la discrétisation du problème (S), à la résolution numérique du système discrétisé et à la convergence.

Soit h tel que $(N+1)h = 1$

$$\frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2} = u^{''}(x) + \frac{h^2}{24} u^{(4)}(\zeta),$$

$$\frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h} = u^{'}(x) + h^2 u^{(3)}(\zeta_1).$$

Posons $a_i = a(x_i)$, $b_i = b(x_i)$, $c_i = c(x_i)$ et $f_i = f(x_i)$ et on approche (S) par le problème approché

$$(S_h) \left\{ \begin{array}{c} -a_i \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + b_i \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} + c_i u_i = f_i \\ \text{pour } i = 1, \ldots\ldots N \\ u_0 = \alpha \\ u_{N+1} = \beta \end{array} \right.$$

Si on pose

$$u_h = \begin{pmatrix} u_1 \\ . \\ . \\ . \\ . \\ u_N \end{pmatrix}, \; b_h = \begin{pmatrix} f_1 + \frac{a_1\alpha}{h^2} - \frac{b_1\alpha}{2h} \\ . \\ f_i \\ . \\ . \\ f_N + \frac{a_N\beta}{h^2} - \frac{b_N\beta}{2h} \end{pmatrix}$$

$$A_h = \begin{bmatrix} . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & \frac{2a_i}{h^2} + c_i & \frac{-a_i}{h^2} + \frac{b_i}{2h} & . & . \\ . & \frac{-a_i}{h^2} - \frac{b_i}{2h} & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \end{bmatrix}$$

d'où (S_h) est équivalent : $A_h u_h = b_h$ et pour la résolution numérique, on impose: $a(x) \geq a_0 > 0$, $c(x) \geq 0$).

THEOREME

Soit $U_h = {}^t(u_i)$ la solution de (S_h) et $V = {}^t(u(x_i))$ la solution exacte de (S), on a le résultat de convergence suivant : $\| V - U_h \|_\infty \leq ch^2$.

Exercice A

Soit f une fonction telle que $f \in C^\infty(]a, b[)$.On suppose que le domaine $]a, b[$ est discrétisé avec un pas uniforme $h = \Delta x$ et on note $y_i = f(x_i)$, $y_{i+1} = f(x_{i+1}) = f(x_i + h)$

1° Montrer les approximations suivantes :

$$f'(x_i) \simeq \frac{1}{2h}(y_{i+1} - y_{i-1})$$

$$f''(x_i) \simeq \frac{1}{h^2}(y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1})$$

$$f'''(x_i) \simeq \frac{1}{2h^3}(y_{i+2} - 2y_{i+1} + 2y_{i-1} - y_{i-2})$$

$$f^{(4)}(x_i) \simeq \frac{1}{h^4}(y_{i+2} - 4y_{i+1} + 6y_i - 4y_{i-1} + y_{i-2})$$

2° a) Dans chacun des cas, indiquer l'ordre de grandeur de l'erreur commise.

b) Soit $u(x, y)$ une fonction suffisament dérivable définie sur $D \subset R^2$, on considère un maillage uniforme de D de même pas $h = \Delta x = \Delta y$ et on note $u_{ij} \widetilde{-} u(x_i, y_j)$. Donner une approximation des opérateurs $\Delta u(x,y), \Delta\Delta u(x,y)$.

Exercice B

Considèrons le problème de Dirichlet suivant :
Trouver $u(x,y)$ définie sur $D =]0,1[\times]0,1[$ tel que :

$$(P) \begin{cases} -\Delta u(x,y) = p \;\text{ dans } D \\ u(x,y) = 0 \;\text{ sur } \partial D \end{cases}$$

Notons $h = \frac{1}{3}$ le pas du maillage de D et V_i l'approximation de u au noeud numéro i. Ecrire la forme discrétisé du problème (P) et en déduire le système linéaire (sous forme matricielle) que vérifient les $(V_i)_{i \in I}$ où I est l'ensemble des noeuds.

Exercice D

On considère l'équation aux dérivées partielles suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \ (x, y) \in \left]0, \frac{1}{2}\right[\times \left]0, \frac{1}{2}\right[\\ u(0, y) = u(x, 0) = 0 & 0 \leq x \leq 0.5 \\ u(x, 0.5) = 200x & 0 \leq x \leq 0.5 \\ u(0.5, y) = 200y & 0 \leq y \leq 0.5 \end{cases}$$

On choisit les pas h et k telle que $8h = 8k = 1$.

1° Définir un schéma aux différences finies qui permet d'approcher (P).

2° On pose $\omega_i = u(P_i)$ avec $P_i = (x_i, y_j)$ montrer que le problème approché est équivalent à résoudre le système linéaire $A\omega = B$.

Le Problème hyperbolique

Considérons l'équations des ondes (équation hyperbolique).
Le problème se pose de la manière suivante: trouver $u(x,t)$ solution de l'E.D.P suivante :

$$(2) \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - d^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = f(x,t) \\ \text{si } x \in [0,1] \text{ et } t \in]0,T[\\ u(0,t) = u(1,t) = 0 \qquad \forall t \in]0,T[\\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x) \qquad \forall x \in [0,1] \\ u(x,0) = u_0(x) \qquad \forall x \in [0,1] \end{cases}$$

On applique l'idée de la méthode de différences finies en remplaçant les dérivées par leurs taux d'accroissement.
Le domaine Ω est $[0,1] \times [0,T]$.
Notons Δx le pas d'espace et Δt le pas du temps et u_{ij} la valeur approchée de l'inconnue u au point $M(i\Delta x, j\Delta t)$: $u_{ij} \stackrel{\sim}{-} u(i\Delta x, j\Delta t)$.

On peut utiliser plusieurs schémas.
En utilisant les formules d'approximations des dérivées, l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - d^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f$$

est approchée au point $(i\Delta x, (j-1)\Delta t)$ par

$$(3) \begin{cases} u_{i,j} = 2u_{i,j-1} - u_{i,j-2} + d^2 (\frac{\Delta t}{\Delta x})^2 (u_{i+1,j-1} \\ \quad -2u_{i,j-1} + u_{i-1,j-1}) + f_{i,j-1} (\Delta t)^2 \\ \quad pour \quad 1 \leq i \leq N-1 \quad et \quad j \geq 2. \end{cases}$$

Les conditions aux limites se traduisent par

(4) $u_{0,n} = u_{N,n} = 0$ pour chaque n

Les conditions initiales se traduisent par

(5) $u_{i,0} = u_0(i\Delta x)$, $u_{i,1} = (\Delta t)\, u_1(i\Delta x) + u_0(i\Delta x)$

Le schéma explicite (3) et les conditions (4) et (5) n'est utile que si la solution du (3) ;(4) et (5)
tend vers la solution de (2) lorsque Δt et Δx tendent vers 0. Soit le vecteur de R^{N-1} définie par
$u^j = (u_{1,j}, \ldots\ldots\ldots\ldots, u_{N-1,j})$ et posons $\lambda = d\, \frac{\Delta t}{\Delta x}$, les équations (3) s'écrivent (sans le terme $f_{i,j}$)

$$u^j = \begin{pmatrix} u_{1,j} \\ . \\ . \\ . \\ . \\ u_{N-1,j} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2(1-\lambda^2) & \lambda^2 & . & . \\ \lambda^2 & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \end{bmatrix}}_{A} u^{j-1}$$

$$-u^{j-2} + (\Delta t)^2 \begin{pmatrix} f_{1,j-1} \\ . \\ . \\ . \\ . \\ f_{N-1,j-1} \end{pmatrix}$$

Soit $u^j = Au^{j-1} - u^{j-2} + (\Delta t)^2 f^{j-1}$. Ainsi, connaissant la solution aux temps $(j-2)\Delta t$ et $(j-1)\Delta t$, on peut la déterminer aux temps $j\Delta t$ et les

conditions (5) permettent de démarrer le processus itératif.
Notons $u_j^n = u\left(j\Delta x, n\Delta t\right)$. On approche (2) par

$$(6)\left\{\begin{array}{c} \frac{u_j^{n+1}-2u_j^n+u_j^{n-1}}{(\Delta t)^2} = \frac{d^2}{(\Delta x)^2}\left(u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}\right) \\ +f_j^n, \end{array}\right.$$

$$(7)\left\{\begin{array}{c} u_0^n = u_N^n = 0 \quad \forall n, \\ u_j^0 = u_0(j\Delta x), \\ u_j^1 = u_j^0 + \Delta t \times u_1\big(j\Delta t\big) \quad 1 \leq j \leq N-1. \end{array}\right.$$

On pose $\lambda = d\frac{\Delta t}{\Delta x}$ et considérons l'équation homogéne de (6)

$$-\lambda^2 u_{j-1}^{n+1} + (1+2\lambda^2)u_j^{n+1} - \lambda^2 u_{j+1}^{n+1} = 2u_j^n - u_j^{n-1} + (\Delta t)^2 f_j^n.$$

Il est naturel de se poser les questions de convergence de (6) et (3) vers la solution de (2) lorsque Δt et Δx tendent vers 0. Pour étudier cette convergence, on a besoin d'introduire quelques notions importantes.

On considère le problème suivant : trouver $u(s,t) : [0,1] \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, solution de :

$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial u}{\partial t} = d\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t) \\ 0 < x < 1; t > 0 \\ u(0,t) = \alpha(t) \\ u(1,t) = \beta(t) \\ u(x,0) = \varphi_0(x) \end{array} \right.$$

d coefficient > 0.
Notons par u_i^n l'approximation de $u(x,t)$ au point (x_i, t_n) avec : $x_i = i\Delta x$,$t_n = n\Delta t$; La discrétisation la plus simple qui vient à l'esprit est de la forme : (θ-méthode)

$$(4) \left\{ \begin{array}{c} \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = \theta \times d\, \frac{u_{i+1}^{n+1} + u_{i-1}^{n+1} - 2u_i^{n+1}}{(\Delta x)^2} + \\ d(1-\theta)\frac{u_{i+1}^{n} + u_{i-1}^{n} - 2u_i^{n}}{(\Delta x)^2} + f_i^n \\ u_0^n = \alpha(t_n) \\ u_{n+1}^n = \beta(t_n) \\ u_i^0 = \varphi_0(x_i) \end{array} \right.$$

où θ est un facteur de pondération avec $0 \leq \theta \leq 1$.

Remarque 1

a) si $\theta = 0$, le schéma (4) est explicite

si $\theta \in]0,1]$, le schéma (4) est implicite, en particulier si $\theta = \frac{1}{2}$, le schéma porte le nom de Crank-Nicolson.

b)Pour résoudre le problème approché (4), on peut utiliser l'une des trois méthodes suivantes :(Jacobi, Gauss-Seidel, Relaxation).

Théorème

a) Si $\theta \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, le schéma (4) est inconditionnellement stable.

Si $\theta \in \left[0, \frac{1}{2}\right[$,le schéma (4) est stable si et seulement si :

$$d\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \leq \frac{1}{2(1-2\theta)}$$

b) si $\theta \neq \frac{1}{2}$, l'erreur est en $o(\Delta t) + o(\Delta x)^2$ quand Δt , Δx tendent vers 0.
Si $\theta = \frac{1}{2}$, l'erreur est en $o(\Delta t)^2 + o(\Delta x)^2$ quand Δt et Δx tendent vers 0.

Remarque 2

Ces résultats s'appliquent à une équation linéaire générale :

$$
\begin{cases}
\frac{\partial u}{\partial t} - a(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - b(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} + c(x,t)u + f(x,t) = 0 \\
0 < x < 1; t > 0 \\
u(0,t) = \alpha(t) \\
u(1,t) = \beta(t) \\
u(x,0) = \varphi_0(x)
\end{cases}
$$

$a(x,t) > 0$

CONCLUSION SUR LA METHODE M.D.F

Avantages

- Trés simple à réaliser
- Simple à mettre en oeuvre (programmation)
- Encore utilisable

Inconvenients

- Mauvaise prise en compte des conditions aux limites (de type Neumann)
- Aucune souplesse dans le choix du maillage.

Exercice A

Soit le problème: trouver $T(x,t)$ vérifiant:

$$(P)\left\{\begin{array}{c}\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\ \text{ sur }\ ]0,1[\times]0,T_0[\\ T(x,0)=0,\ \ x\in]0,1[\\ T(0,t)=T(1,t)=1 \text{ pour } t>0\end{array}\right.$$

On notera h le "pas" du maillage d'espace et Δt le "pas" de temps. Ecrire le principe et la démarche complète des méthodes explicites et implicites pour le sysème (P) et donner les conditions de stabilité de ces méthodes.

Exercice B

Soit l'équation aux dérivées partielles:

$$\left\{\begin{array}{c}\frac{1}{d^2}\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)\\ \text{sur } 0\leq x\leq a, t\geq 0\\ f(x,0)=\Phi(x),\ \ x\in[0,a]\\ \frac{\partial f}{\partial x}(0,t)=\alpha(t) \text{ pour } t\geq 0\\ \frac{\partial f}{\partial x}(a,t)=\beta(t) \text{ pour } t\geq 0\end{array}\right.$$

On pose $x_i = ih$, $t_j = jk$, $f_{ij} = f(ih, jk)$ pour $0 \leq i \leq n$ et $j \geq 0$

1) Ecrire un schéma explicite qui approche (P).

2) Ecrire un schéma implicite qui approche (P).

3) Dans quel cas , peut-on choisir de résoudre numériquement le problème (P) par le cas 1 ou le cas 2.

4) Ecrire un programme du schéma explicite et du schéma implicite.

Exercice C

On considère l'E.D.P suivante :

$$(S)\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \frac{4}{P^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) \quad \text{s} \\ \text{ur } 0 < x \leq 4, t > 0 \\ u(t,0) = u(t,4) = 0,\ \ t > 0 \\ u(0,x) = \sin(\frac{P}{4}x)\left[1 + 2\cos(\frac{P}{4}x)\right], \\ 0 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

On notera h le 'pas 'du maillage d'espace et k le 'pas 'de temps.

1) Ecrire un schéma explicite qui approche (S).

2) Ecrire un schéma implicite qui approche (S).

3) Ecrire un programme qui permet résoudre (S).

Exercice D

Soit le système aux équations aux dérivées partielles

$$(S)\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = c\frac{\partial v}{\partial x} & x \in \mathbb{R}^+, t \in \mathbb{R}^+ \\ \frac{\partial v}{\partial t} = c\frac{\partial u}{\partial x} & x \in \mathbb{R}^+, t \in \mathbb{R}^+ \\ u(x,0) = u_0(x) \\ v(x,0) = v_0(x) \end{cases}$$

c est une constante réelle positive.

1) Proposer un schéma aux différences finies permettant de résoudre numériquement (S)

2) Montrer que (S) est équivalent à l'équation aux dérivées partielles (P)

$$(P)\begin{cases} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = d\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} & (1) \\ w(x,0) = a(x) & (2) \\ \frac{\partial w(x,0)}{\partial t} = b(x) & (3) \end{cases}$$

Déterminer w , d. (on admet que (3) est vérifiée)

3) Proposer un schéma implicite permettant de résoudre (P).

4) On pose $T(x,t) = f(x+ct) + g(x-ct)$.

Déterminer l'équation aux dérivées partielles vérifiée par $T(x,t)$.

Exercice E

Soit l'équation $\frac{\partial u}{\partial t} = c\frac{\partial v}{\partial x}$,c est une constante réelle.

a) Donner la forme générale des solutions.

b) Donner un schéma aux différences finies permettant de résoudre de façon approchée le problème associè à la condition initiale $u(0, x) = e^x, 0 \leq x \leq 1$ et à la condition aux limites $u(t, 0) = \cos t, t \geq 0$.