Exercice 1

1/ $\mathcal{F}f(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi u t} f(t)\,dt = \int_{0}^{+\infty} e^{-2i\pi u t} e^{-t}\,dt$

$$= \int_0^{+\infty} e^{(-2i\pi u - 1)t}\,dt$$

$$= \left[\frac{-e^{(-2i\pi u-1)t}}{2i\pi u+1}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2i\pi u+1} = \frac{1-2i\pi u}{1+4\pi^2u^2}$$

D'où $\boxed{\mathcal{F}f(u) = \frac{1-2i\pi u}{1+4\pi^2u^2}}$

De même

$$\mathcal{F}g(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi u t} g(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} e^{-2i\pi u t}\cdot e^{t}\,dt$$

$$= \int_{-\infty}^{0} e^{(-2i\pi u+1)t}\,dt$$

$$= \left[\frac{1}{-2i\pi u+1} e^{(-2i\pi u+1)t}\right]_{-\infty}^{0} = \frac{1}{1-2i\pi u}$$

$$\boxed{\mathcal{F}g(u) = \frac{1+2i\pi u}{1+4\pi^2u^2}}$$

② On remarque que

$$\mathcal{F}f(u) + \mathcal{F}g(u) = \frac{2}{1+4\pi^2u^2}$$

Donc $$\mathcal{F}(f+g)(u) = \frac{2}{1+4\pi^2u^2}$$

Par application de la formule.

$$(f+g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2i\pi ux}\,\mathcal{F}(f+g)(u)\,du, \ \forall x\in\mathbb{R}$$

d'où

$$(f+g)(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2}{1+4\pi^2u^2}\,du$$

$$2 = 2\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+4\pi^2u^2}\,du$$

et $$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+4\pi^2u^2}\,du = 1}$$

Exercice 2

1/ Montrons qu'il existe 3 constants a, b et c tels que

$$\frac{p^2+7p+11}{(p+2)(p^2+5p+4)} = \frac{a}{p+2} + \frac{b}{p+1} + \frac{c}{p+4}$$

remarquons que $p^2+5p+4 = (p+1)(p+4)$

d'où $\frac{p^2+7p+11}{(p+2)(p^2+5p+4)} = \frac{p^2+7p+11}{(p+2)(p+1)(p+4)} = \frac{a}{p+2} + \frac{b}{p+1} + \frac{c}{p+4}$

on multiplie par $p+2$ et on choisit $p=-2$

d'où $\frac{4-14+11}{-2} = a \iff \boxed{a = -\frac{1}{2}}$

on multiplie par $p+1$ et on choisit $p=-1$

d'où $\frac{1-7+11}{3} = b \iff \boxed{b = \frac{5}{3}}$

on multiplie par $p+4$ et on choisit $p=-4$

d'où $\frac{16-28+11}{(-2)(-3)} = c \iff c = 1/6$

Par suite $\boxed{\frac{p^2+7p+11}{(p+2)(p+1)(p+4)} = -\frac{1}{2}\frac{1}{p+2} + \frac{5}{3}\frac{1}{p+1} + \frac{1}{6}\frac{1}{p+4}}$

(2) On considère l'équation différentielle

$$\begin{cases} y''(t) + 5y'(t) + 4y(t) = e^{-2t} \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \end{cases}$$

Par application de la transformée de Laplace et en posant $Y(s) = (\mathcal{L}y)(s)$

$$s^2 Y(s) - s + 5\left[sY(s) - 1\right] + 4Y(s) = \mathcal{L}(e^{-2t})(s) = \frac{1}{s+2}$$

$$(s^2 + 5s + 4)\,Y(s) = \frac{1}{s+2} + s + 5 = \frac{1 + s^2 + 7s + 10}{s+2}$$

$$Y(s) = \frac{s^2 + 7s + 11}{(s+2)(s^2 + 5s + 4)} = -\frac{1}{2}\frac{1}{p+2} + \frac{5}{3}\frac{1}{p+1} + \frac{1}{6}\frac{1}{p+4}$$

$$\Rightarrow Y(s) = -\frac{1}{2}\mathcal{L}(e^{-2t})(s) + \frac{5}{3}\mathcal{L}(e^{-t})(s) + \frac{1}{6}\mathcal{L}(e^{-4t})(s)$$

$$\Rightarrow y(t) = -\frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{5}{3}e^{-t} + \frac{1}{6}e^{-4t}$$

Exercice 3

1/ Montrons qu'il existe 6 constants $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \mu$ et λ tels que

$$\frac{p^4+4p^3-2p-2}{(p+1)(p^2-4)p^3} = \frac{\alpha}{p+2} + \frac{\beta}{p-2} + \frac{\gamma}{p+1} + \frac{\delta}{p} + \frac{\mu}{p^2} + \frac{\lambda}{p^3}$$

On multiplie par $p+2$ et on prend $p=-2 \Rightarrow \alpha = 7/16$

par $p-2$ et — $p=2 \Rightarrow \beta = 7/16$

par $p+1$ et — $p=-1 \Rightarrow \gamma = -1$

par p^3 et $p=0 \Rightarrow \lambda = 1/2$

Enfin on prend $p=1$ et $p=-3$, on obtient $\delta = 1/8$ et $\mu = 0$

Par suite

$$\frac{p^4+4p^3-2p-2}{(p+1)(p^2-4)p^3} = \frac{7}{16}\frac{1}{p+2} + \frac{7}{16}\frac{1}{p-2} - \frac{1}{p+1} + \frac{1}{8}\frac{1}{p} + \frac{1}{2p^3}$$

2/ $y''(t) - 4y(t) = 3e^{-t} - t^2$

Posons $Y(s) = L(y(t))(s)$

Par application des propriétés de la transformée de Laplace, on aura

$$s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)-4Y(s)=L(3e^{-t})-L(t^2)$$

$$s^2Y(s)-1-4Y(s)=3\frac{1}{s+1}-\frac{2}{s^3}$$

soit $$Y(s)\left(s^2-4\right)=\frac{3}{s+1}-2/s^3+1 \quad =\frac{3s^3-2(s+1)+s^3(s+1)}{(s+1)s^3}$$

$$=\frac{3s^3-2s-2+s^4+s^3}{(s+1)\ s^3}$$

$$=\frac{s^4+4s^3-2s-2}{(s+1)s^3}$$

d'où $$Y(s)=\frac{s^4+4s^3-2s-2}{(s-2)(s+2)(s+1)s^3}$$

$$=\frac{7}{16}\frac{1}{s+2}+\frac{7}{16}\frac{1}{s+2}-\frac{1}{s+1}+\frac{1}{8}\frac{1}{s}+\frac{1}{2s^3}$$

Enfin $$y(t)=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{7}{16}\frac{1}{s+2}+\frac{7}{16}\frac{1}{s+2}-\frac{1}{s+1}+\frac{1}{8}\frac{1}{s}+\frac{1}{2s^3}\right)(t)$$

$$\boxed{y(t)=\frac{7}{16}e^{2t}+\frac{7}{16}e^{-2t}-e^{-t}+\frac{1}{8}+\frac{t^2}{2}}$$