Chapitre 1

Transformées

Transformée de Fourier

Transformées intégrales

- Motivation : Elle permet de calculer explicitement les solutions d'une classe assez large d'équations différentielles posées sur l'espace en suivant le schéma suivant :

Equation diff →(TF) Equation plus simple →solution

Solution→(inverse de TF) solution de l'équation initiale

Intégrales dépendants d'un paramètre

Soit $f : R \times R \to R^{+}$ une fonction continue

Définition: On dit que f est dominée sur [a,b] s'il existe une fonction

$$g : R \to R^{+} \text{ telle que } \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)dt < \infty \text{ et } \left|f(t,x)\right| \leq g(t), \forall x \in [a,b]$$

Proposition:

Soit $f : R \times R \to R$ une fonction continue et dominée sur $[a,b]$.

On pose $F(x) = \int_R f(t,x)dt$ pour $x \in [a,b]$.

$a)$ F est définie et continue sur $[a,b]$.

$b)$ Supposons que pour tout $(t,x) \in R \times [a,b]$, $\frac{\partial}{\partial x} f(t,x)$ existe, soit continue en (t,x) et soit dominée sur $[a,b]$.

Alors F est dérivable et

$$F'(x) = \int_R \frac{\partial}{\partial x} f(t,x)\,dt \quad \text{pour } t \in [a,b].$$

Exemple :

Soit $x \in [a,b]$, on définit $F(x) = \int_R \exp(-t^2 x)\,dt.$

$a)$ F est définie et continue sur $[a,b]$.

$b)$ F est dérivable sur $[a,b]$ et $F'(x) = -\int_R t^2 \exp(-t^2 x)\,dt.$

Preuve ……

Rappel

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

$$\chi_A = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Transformée de Fourier

$Soit \quad f : R \to C$ une fonction intégrable sur R

Définition: La transformée de Fourier de f en **u** réel est définie par

$$(Ff)(u) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi u t} f(t)dt$$

1) l'application $(Ff) : R \to C$ est appelée la transformée de Fourier de f.
2) l'application $f : \xrightarrow{F} Ff$ est appelée la transformation de Fourier de f.

Remarques

1)Ff est définie sur tout R

$\left|\mathrm{f(t)exp(-2i}\pi xt)\right| \leq \left|f(t)\right|$, qui est intégrable sur R.

2) Une fonction périodique non nulle n'est pas intégrable sur R ➔ séries de Fourier.

3) Cette notion s'étend à des fonctions plus générales .....

Proposition :

a) **Ff est continue sur R.**

b) **(Ff)(u) →0 lorsque u → infinie(-,+)**

Preuve

1) ...

2) Cas g est de classe C^1 à support compact et ....

$$(Fg)(u) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi ut} g(t)dt = \frac{1}{2i\pi u} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi ut} g'(t)dt$$

On déduit que lorsque $|u| \to \infty, (Fg)(u) \to 0$

Propriétés de F

$Soit \quad c_1, c_2 \in C, a \in R^*,$

$f, g : R \to C$ intégrables, F=Ff, G=Gg alors

$c_1 f + c_2 g \xrightarrow{F} c_1 F + c_2 G$ **Linéarité**

$f(\frac{t}{a}) \xrightarrow{F} |a| F(au)$ **Changement d'échelle**

$f(t+a) \xrightarrow{F} \exp(2i\pi au) F(u)$ **translation**

$\exp(2i\pi at) f(t) \xrightarrow{F} F(u-a)$ **modulation**

$\overline{f} \xrightarrow{F} \overline{F(-u)}$ **conjugué**

Preuve

Directement de la définition de la transformation de Fourier.

Convolution

Définition :

$Soient\ f\ et\ g\ deux\ fonctions\ intégrables\ sur\ R$

$c'est\ à\ dire\ telles\ que\ \int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|dt < \infty$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|dt < \infty.$

On appelle convolée de f et g la fonction

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-s)g(s)ds \quad = (g * f)(t)$$

Proposition

$$f * g \xrightarrow{F} FG$$

$$fg \xrightarrow{F} F * G$$

Convolution et produit

Preuve :

$$F(f*g)(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}(f*g)\exp(-2i\pi tx)dt$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}(\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)g(t-u)du)\exp(-2i\pi tx)dt$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)(\int_{-\infty}^{+\infty}g(t-u)du)\exp(-2i\pi(t-u)x)dt)du$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)\exp(-2i\pi ux)(\int_{-\infty}^{+\infty}g(v)du)\exp(-2i\pi vx)dv)$$

Proposition (Admis)

$$\boxed{(F(Ff))(u) = f(-u)}$$ réciprocité

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} F(u)\overline{G(u)}du = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{g(t)}dt}$$ Conservation du produit scalaire

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \left|F(u)\right|^2 du = \int_{-\infty}^{\infty} \left|f(t)\right|^2 dt}$$ Identité de Parseval

Exemples fondamentaux

$Soit \quad a, b \in R, n \in N, \chi_A$ la fonction indicatrice de A

$$b\chi_{]-a,a[} \xrightarrow{F} 2ab\frac{\sin(2\pi au)}{2\pi au}$$

$$\exp(-|t|) \xrightarrow{F} \frac{2}{1+(2\pi u)^2}$$

Exemples fondamentaux

$Soit \quad a,b \in R, n \in N, \chi_A$ la fonction indicatrice de A

$$b\chi_{]-a,a[} \xrightarrow{F} 2ab\frac{\sin(2\pi au)}{2\pi au}$$

$$\exp(-|t|) \xrightarrow{F} \frac{2}{1+(2\pi u)^2}$$

Exemples fondamentaux

$$t^n \exp(-t)\chi_{]0,+\infty[} \xrightarrow{F} \frac{n!}{(1+2i\pi u)^{n+1}}$$

$$\exp(-\pi t^2) \xrightarrow{F} \exp(-\pi u^2)$$

Preuve :

$$F(b\chi_{]-a,a[})(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-2i\pi tu) b\chi_{]-a,a[}(t)dt$$

$$= b\int_{-a}^{+a} \exp(-2i\pi tu)dt$$

$$= \frac{b}{\pi u} \frac{e^{2i\pi ua} - e^{-2i\pi ua}}{2i} = 2ab\frac{\sin(2\pi au)}{2\pi au}$$

$$f(t) = \exp(-\pi t^2)$$

$$F(f)(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-2i\pi tu)\exp(-\pi t^2)dt$$

$$(Ff)\ est\ dérivable$$

$$F'(f)(u) = -2i\pi\int_{-\infty}^{+\infty} t\exp(-2i\pi tu)\exp(-\pi t^2)dt$$

$$= -2i\left(\left[-\frac{1}{2}\exp(-2i\pi tu)\exp(-\pi t^2)\right]_{-\infty}^{+\infty} - i\pi u\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-2i\pi tu)\exp(-\pi t^2)dt\right)$$

$$= -2\pi u F(f)(u)$$

$$y = F(f) \text{ est solution de l'e.d.o}$$

$$y' = -2\pi u y$$

de solution :

$$y = K \exp(-\pi u^2)$$

$$y(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\pi t^2)\,dt = 1$$

$$Enfin \quad (Ff)(u) = \exp(-\pi u^2)$$

Exercices

1) Montrer que : $\dfrac{\sin t}{t} \xrightarrow{F} \pi\chi_{\left]-\frac{1}{2\pi},\frac{1}{2\pi}\right[}$

$$\frac{1}{1+t^2} \xrightarrow{F} \pi\exp(-2\pi|u|)$$

2) Calculer les transformées de Fourier des fonctions suivantes:

$$\exp(-2|t|), \exp(-\pi t^2), \exp(-t^2)\sin t, \chi_{]1,3[}$$

Transformée Inverse

- Théorème important:

$$Ff = Fg \Rightarrow f = g$$

Ce qui implique :

$$Ff = G, \text{ alors } f = F^{-1}G$$

Forme générale d'inversion de Fourier

- Si F est intégrable sur R, alors

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i2\pi ut} F(u)\,du$$

- En pratique, étant donné F, il s'agit de calculer explicitement cette intégrale, ce qui est souvent délicat.
- On se peut se ramener aux exemples fondamentaux.

Application :
Résolution d’équations différentielles

- La transformée de Fourier permet de résoudre explicitement une équation différentielle linéaire posée sur R.
- Si les données de l’équation sont périodiques, alors on utilise les séries de Fourier.
- Si l’équation est posée sur une demi-droite, on utilise la **transformée de Laplace**.

Proposition importante

Soit $f, g : R \to C$ intégrables,

$F = Ff$, $G = Gg$ et $c_1, c_2 \in C$ alors

$$f' = \frac{df}{dt} \xrightarrow{F} (2i\pi u) F(u)$$

$$f'' = \frac{d^2 f}{dt^2} \xrightarrow{F} (2i\pi u)^2 F(u)$$

$$\frac{d^3 f}{dt^3} \xrightarrow{F} (2i\pi u)^3 F(u)$$

. . . .

- Preuve :

Définition de F et la formule d'intégration parties

Coefficients dépendants de t

Soit $f : R \to C$ intégrable, $F = \mathcal{F} f$. Alors

$$t f(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{i}{2\pi} F'(u)$$

$$t^2 f(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \left(\frac{i}{2\pi}\right)^2 F''(u)$$

$$t^3 f(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \left(\frac{i}{2\pi}\right)^3 F'''(u)$$

. . . .

- Preuve :

Définition de F et la formule

$$\boxed{te^{-i2\pi ut} = \frac{\mathrm{i}}{2\pi}\,\frac{\partial}{\partial \mathrm{u}}(e^{-i2\pi ut})}$$

et les propriétés des intégrales dépendant d'un paramètre.

Travaux Dirigés

TD1 :

$$Trouver\ une\ \ fonction\ \ f : R \to C$$

intégrable sur R solution telle que

$$-f''(t) + f(t) = \exp(-t^2),\ t \in R$$

Corrigé :

- La transformée de Fourier donne :

$$(2\pi u)^2 F(u) + F(u) = F(e^{-t^2})(u)$$

$$F = \frac{1}{1 + 4\pi^2 u^2} F(e^{-t^2})$$

- Enfin :

$$\boxed{F = \frac{1}{2} \mathrm{F}(e^{-|t|} * e^{-t^2}) \quad \Rightarrow f(t) = \frac{1}{2} e^{-|t|} * e^{-t^2}}$$

TD2 :

1) *Calculer la transformée de Fourier*

de la fonction $f(x) = \begin{cases} 1 + x & si \ x \in [-1, 0] \\ 1 - x & si \ x \in [0, 1[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

2) *Déduire* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^4 x}{x^4} dx.$

TD2 : formule de Parseval

$$Ff(u) = \frac{\sin^2(\pi u)}{(\pi u)^2}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^4 x}{x^4} dx = \frac{\pi}{3}.$$

Transformée de Laplace

Motivation

Résolution des

- Equations différentielles linéaires

Résolution des

- Equations algébriques.

Calcul

Problème

$$y'' + y = te^{-t}$$

$$y(0) = y'(0) = 0$$

Laplace

$\mathcal{L}$

equation simple

$$(s^2+1)Y = \frac{1}{(s+1)^2}$$

Résolution ?

Opération algébrique

solution Y

$$Y = \frac{1}{(s^2+1)(s+1)^2}$$

Transformée inverse

$\mathcal{L}^{-1}$

solution y

$$y(t) = -\frac{1}{2}\cos t + \frac{1}{2}te^{-t} + \frac{1}{2}e^{-t}$$

Transformée de Laplace

- Définition:

$$F(s) = L(f)(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt \quad \text{pour } f(t), et\, t > 0$$

- Inverse: $f(t) = L^{-1}(F)$
- Linéarité: $L\{af(t)+bg(t)\} = aL\{f(t)\} + bL\{g(t)\}$
- Théorème:

$$L\{e^{at} f(t)\} = F(s-a)$$

$$e^{at} f(t) = L^{-1}\{F(s-a)\}$$

Existence

On suppose:

- $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{t})$ est continue sur tout intervalle $\boldsymbol{t} \geq 0$
- $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{t})$ vérifie $|f(t)| \leq Me^{-kt} \quad \forall\ t \geq 0$

  Pour toute constante $\boldsymbol{k}$ et $\boldsymbol{M}$.

Alors:

- La transformée de Laplace de $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{t})$ existe pour tout $\boldsymbol{s} > \boldsymbol{k}$

Définition. (Physique)

Soit un signal V(t) défini et continu $\forall\ t \in [0, \infty[$.

Sa transformée de Laplace $v_L\,(p)$ est définie par

$$v_L\,(p) = \int_0^{\infty} V(t)\, e^{-pt}\, dt,$$

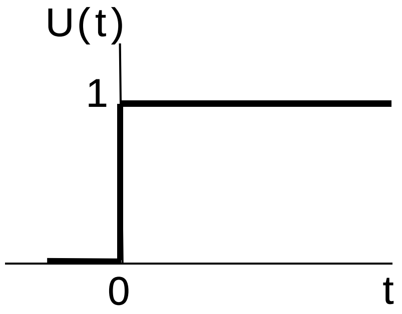
où **p** est un nombre **complexe**

Note. La continuité sur tout l'intervalle $[0, \infty[$

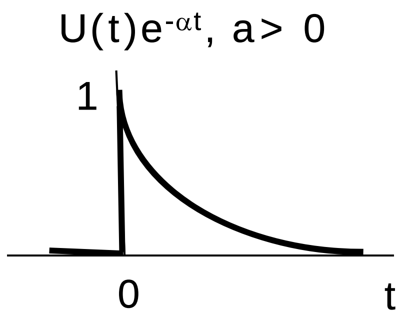
n'est pas requise, le signal peut être continu par morceaux

Transformée de Laplace

- **Exemples**



Echelon unité



Exponentielle décroissante

	Signal	TL
Echelon unité	$U(t)$	$\frac{1}{p}$
Exponentielle décroissante	$U(t)e^{-at}, a > 0$	$\frac{1}{p+a}$
Exponentielle complexe	$U(t)e^{i\omega t}, \omega > 0$	$\frac{1}{p-i\omega}$

Note: la TL n'est pas définie pour tout p: la partie réelle de p doit être plus grande qu'une valeur, l'abscisse de convergence.

Liste des transformées de Laplace

	f(t)	$\mathcal{L}$(f)		f(t)	$\mathcal{L}$(f)
1	1	1/s	7	cos ωt	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
2	t	$1/s^2$	8	sin ωt	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
3	t^2	$2!/s^3$	9	cosh at	$\frac{s}{s^2-a^2}$
4	t^n (n=0, 1,…)	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	10	sinh at	$\frac{a}{s^2-a^2}$
5	t^a (a positive)	$\frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}$	11	e^{at} cos ωt	$\frac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}$
6	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	12	e^{at} sin ωt	$\frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$

Dérivée

- **Théorème 1**
  - Transformée de Laplace de f existe
  - *f'(t)* existe et continue pour $t \geq 0$

$$\boxed{L(f') = sL(f) - f(0)}$$

- **Théorème 2**

$$\boxed{L(f^{(n)}) = s^n L(f) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)}$$

Equations différentielles

$$y''+ay'+by = r(t) \qquad y(0) = K_0 \qquad y'(0) = K_1$$

$$[s^2Y - sy(0) - y'(0)] + a[sY - y(0)] + bY = R(s)$$

$$Q(s) = \frac{1}{s^2 + as + b}$$

$$Y(s) = [(s+a)y(0) + y'(0)]Q(s) + R(s)Q(s)$$

$$y(t) = L^{-1}(Y)$$

Application des Transformées de Laplace

$$y'' - 3y' + 2y = 4 \quad y(0) = 0 \quad y'(0) = 1$$

$$[s^2 Y - 1] - 3[sY] + 2Y = 4/s$$

$$Q(s) = \frac{1}{s^2 - 3s + 2} = \frac{1}{(s-1)(s-2)}$$

$$Y(s) = Q(s) + (4/s)Q(s) = \frac{s+4}{s(s-1)(s-2)}$$

$$\frac{s+4}{s(s-1)(s-2)}=\frac{R_1}{s}+\frac{R_2}{s-1}+\frac{R_3}{s-2}$$

$$\left.\frac{s+4}{(s-1)(s-2)}\right|_{s=0}=R_1+s\left.\left(\frac{R_2}{s-1}+\frac{R_3}{s-2}\right)\right|_{s=0}\Rightarrow R_1=2$$

$$\left.\frac{s+4}{s(s-2)}\right|_{s=1}=R_2+(s-1)\left.\left(\frac{R_1}{s}+\frac{R_3}{s-2}\right)\right|_{s=1}\Rightarrow R_2=-5$$

$$\left.\frac{s+4}{s(s-1)}\right|_{s=2}=R_3+(s-2)\left.\left(\frac{R_1}{s}+\frac{R_2}{s-1}\right)\right|_{s=2}\Rightarrow R_3=3$$

$y(t) = L^{-1}(Y):$

$$\frac{s+4}{s(s-1)(s-2)} = \frac{2}{s} + \frac{-5}{s-1} + \frac{3}{s-2}$$

$$L^{-1}\left(\frac{2}{s}\right) = 2e^{0t} \qquad L^{-1}\left(\frac{-5}{s-1}\right) = -5e^{1t} \qquad L^{-1}\left(\frac{3}{s-2}\right) = 3e^{2t}$$

$$y(t) = L^{-1}(Y) = 2 - 5e^{t} + 3e^{2t}$$

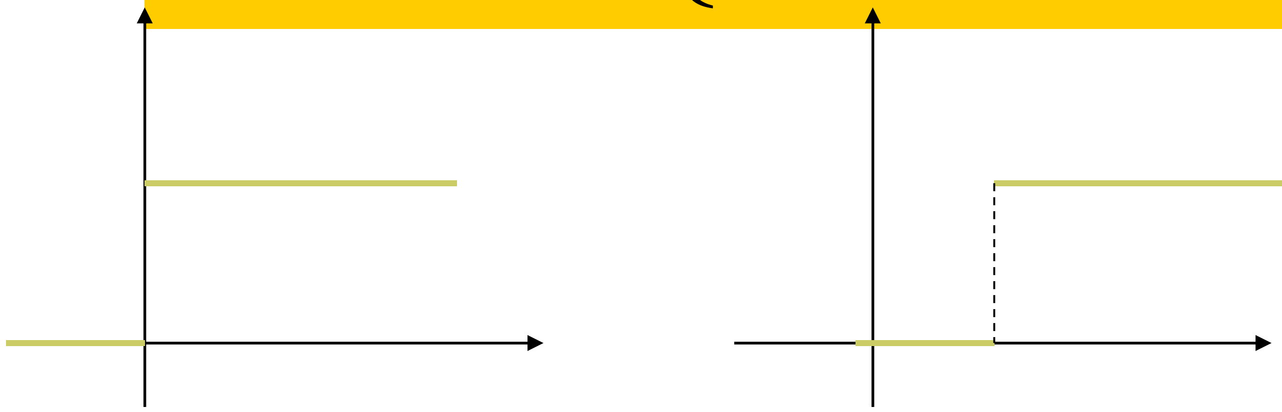
Transformée et Intégrale

$$L\{\int_0^t f(\tau)d\tau\} = \frac{L(f)}{s} = \frac{F(s)}{s}$$

$$\int_0^t f(\tau)d\tau = L^{-1}\{\frac{F(s)}{s}\}$$

Exemple

$$u(t-a)=\begin{cases}0 & \text{if} \quad t<a\\ 1 & \text{if} \quad t>a\end{cases}$$



$u(t)$ $\qquad\qquad$ $u(t-a)$

Applications

- Théorème

$$L\{f(t-a)u(t-a)\}=e^{-as}F(s)$$

$$f(t-a)u(t-a)=L^{-1}\{e^{-as}F(s)\}$$

$$L\{u(t-a)\}=\frac{e^{-as}}{s}$$

Convolution

- **Définition**

$$h(t) = (f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

- **Propriété**

$$(f * g)(t) = L^{-1}\{F(s)G(s)\}$$

- **Application**

$$y'' + ay' + by = r(t) \qquad y(0) = 0 \qquad y'(0) = 0$$

$$Q(s) = \frac{1}{s^2 + as + b}$$

$$Y(s) = R(s)Q(s)$$

$$\Longrightarrow \quad y(t) = \int_0^t q(t-\tau)r(\tau)d\tau$$

Transformée de Laplace

Déconvolution

1. Décomposition en éléments simples de première espèce

$$\frac{1}{(p-a)^2(p-b)} = \frac{A}{(p-a)^2} + \frac{B}{(p-a)} + \frac{C}{(p-b)}$$

Pour calculer A (resp. C), on multiplie l'équation par $(p - a)^2$ (resp. $p - b$) et on fait $p = a$ (resp. $p = b$). On trouve :

$$A = \left[\frac{1}{p-b}\right]_{p=a} = \frac{1}{a-b} \quad C = \left[\frac{1}{(p-a)^2}\right]_{p=b} = \frac{1}{(b-a)^2}$$

Pour calculer B, on multiplie l'équation par (p-a) et on fait tendre p vers l'infini. On trouve: $B = -C$. Les originaux des éléments simples peuvent alors être trouvés directement à partir des tables de TL usuelles.

Transformée de Laplace

Déconvolution

2. Décomposition en éléments simples de deuxième espèce

C'est le cas où le dénominateur est un trinôme du second degré qui n'a pas de racines réelles. On décomposition en éléments simples de 2ème espèce :

$$ap^2+bp+c = a\left[\left(p+\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a^2}\right] = a\left(P^2 + A^2\right),$$

$$\text{avec } P = p + \frac{b}{2a} \text{ et } A = \frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$$

$$\frac{1}{ap^2+bp+c} = \frac{1}{a}\,\frac{1}{P^2+A^2} = \frac{1}{aA^2}\,\frac{1}{P^2/A^2+1}$$

Transformée de Laplace

- **Déconvolution**

Exercice. Calculer les fonctions du temps qui ont pour TL les expressions suivantes:

$$\frac{1}{p^3+3p^2+2p}\;;\quad \frac{1}{p^3-1}\;;\quad \frac{1}{p^3+p^2-p-1}$$

Transformée de Laplace

Calcul opérationnel

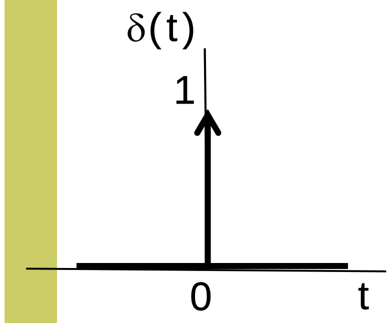
Exercice. On définit la distribution de Dirac $\delta(t)$ de la manière suivante:

$\delta(t)$ a pour TL: 1.

Résoudre l'équation différentielle: $\dfrac{d^2Y}{dt^2} + 2\alpha\omega_0 \dfrac{dY}{dt} + \omega_0^2 Y = \delta(t)$

(α et ω_0 sont réels et positifs et ne dépendent pas du temps).

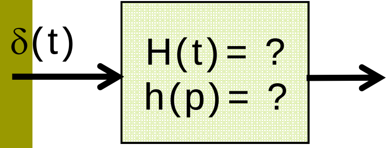
Discuter brièvement la nature de la solution en fonction de α.



Distribution de Dirac

Note

La méthode présentée dans cet exercice permet de retrouver la réponse percussionnelle d'un système linéaire stationnaire lorsque l'on connait l'équation différentielle à laquelle il obéit.



Transformée de Laplace

Réponses

Exercice. Eléments de réponse:

$$\frac{1}{p^3+3p^2+2p}=\frac{1}{p(p+2)(p+1)}\ ;\ \frac{1}{p^3-1}=\frac{1}{(p-1)\left(p^2+p+1\right)}$$

$$\text{et}\quad \frac{1}{p^3+p^2-p-1}=\frac{1}{(p-1)(p+1)^2}$$