# TD Chapitre 2 : Transformée de Fourier :

**Exercice 1 :** *Autres transformées usuelles*

Montrer les formules suivantes :

a) $\mathcal{F}\left(e^{-at}.\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(t)\right)(u) = \frac{1}{a+2i\pi u}$ ; $\quad a \in \mathbb{R}_+^*$

b) $\mathcal{F}\left(t^n e^{-t}.\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(t)\right)(u) = \frac{n!}{(1+2i\pi u)^{n+1}}$; $\quad n \in \mathbb{N}$

**Exercice 2 :**

Calculer les transformées de Fourier des fonctions suivantes :

a) $t \longmapsto \Pi(t-1)$ b) $t \longmapsto \Pi\left(\frac{t}{2}\right)$ c) $t \longmapsto t^2.\Pi(t)$ d) $t \longmapsto \Pi\left(\frac{t-1}{2}\right)$

**Exercice 3 :** *Transformée de Fourier d'une Gaussienne*

Soient $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ puis la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = e^{-\alpha t^2}$.

a) Montrer que $f'(t) = -2\alpha t.e^{-\alpha t^2}$

b) On pose $F(u) = \mathcal{F}_f(u)$. Montrer que $F$ est solution d'une EDL.

c) En déduire $\mathcal{F}_f$.

d) Donner $\mathcal{F}_f$ pour $\alpha = \sqrt{\pi}$.

**Exercice 4 :** *Calcul de $\mathcal{F}_\Lambda$ à partir de $\Pi$ de deux façons :*

a) Calculer $\Lambda'$ et l'exprimer en fonction de la fonction $\Pi$.

b) Appliquer l'opérateur transformée de Fourier, $\mathcal{F}$, à la relation trouvée. En déduire $\mathcal{F}_\Lambda$.

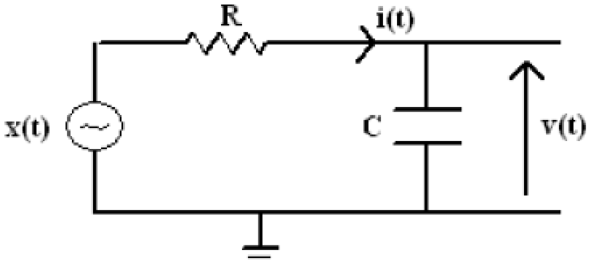
c) Vérifier que $\Lambda = \Pi * \Pi$. En déduire $\mathcal{F}_\Lambda$.

**Exercice 5 :**

Trouver les fonctions $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ intégrables sur $\mathbb{R}$ $\left(y \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})\right)$ solutions de l'EDO suivante :

$$-y'' + y = e^{-t^2}; \quad t \in \mathbb{R}$$

**Exercice 6 :** *Etude de la cellule RC*




On considère le système constitué d'un générateur basse fréquence fournissant une tension d'entrée $x(t)$, d'une résistance $R$ et d'un condensateurde capacité $C$. Le signal de sortie que l'on étudie est la tension $v(t)$ aux bornes du condensateur.

On rappelle que la charge $q(t)$ du condensateur vaut $C.v(t)$ et que l'intensité dans le circuit est donnée par $i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$.

a) Vérifier que les tensions vérifient l'égalité $x(t) = v(t) + R.i(t)$

b) Donner l'équation différentielle vérifiée par $v(t)$.

c) Appliquer la tranformée de Fourier à cette équation.

d) En déduire $v(t)$.

**Exercice 7 :**

Soit le signal $s(t) = e^{-a|t|}$ avec $a > 0$

a) Représenter son graphe en fonction du temps.

b) Calculer sa transformée de Fourier.

c) Tracer son spectre d'amplitude : $|\mathcal{F}(s)(u)|$

d) En utilisant les propriétés de la transformée de Fourier inverse, déduire de b) la transformée de Fourier de la fonction $v(t) = \frac{1}{1+t^2}$

e) En déduire l'intégrale : $I = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(2\pi ut)}{1+t^2} dt$

**Exercice 8 :**

a) Calculer la transformée de Fourier de la fonction $t \longmapsto c.\mathbb{I}_{[-T,T]}(t)$ ; $c \in \mathbb{R}, T \in \mathbb{R}^+$.

b) En déduire la transformée de Fourier de la fonction $t \longmapsto \frac{\sin(t)}{t}$

c) Même question que b) en utilisant la transformée de la transformée.

**Exercice 9 :** *Formule de Parseval*

On sait que $\mathcal{F}_\Lambda(u) = sinc^2(u)$.

En déduire la valeur de $\int_{\mathbb{R}_+} \frac{\sin^4(x)}{x^4} dx$