EDO : Equations Différentielles Ordinaires

$$(E):\quad F\left(x, y, y', y'', \dots\dots\dots, y^{(n)}\right) = 0$$

Inconnue : $\boxed{y : I \longmapsto \mathbb{K}}$ n fois dérivable.

Variable : $x \in I$

F : une fonction de $n+2$ variables. Ci-haut une EDO d'ordre n.

1. EDO à variables séparables

$$(E):\quad y'.f(y) = g(x)$$

g fonction continue sur I. f fonction continue sur $y(I)$.

Résolution : on passe ce qui concerne les $y, y', y"$ … d'un côté de l'égalité et ce qui concerne x de l'autre côté, puis on intègre.

2. EDL : EDO Linéaires

F est multilinéaire d'où :

$$(E):\quad a_0(x).y + a_1(x).y' + a_2(x).y'' + \dots + a_n(x).y^{(n)} = g(x)$$

les **a_i et g : fonctions continues de I dans** $\mathbb{K}$.

Equation homogène (sans second membre) :

$$(E_h):\quad a_0(x).y + a_1(x).y' + a_2(x).y'' + \dots + a_n(x).y^{(n)} = 0$$

2.1. EDL1

EDL du 1er ordre :

$$(E):\quad y' + a(x).y = b(x)$$

a et b : fonctions continues de I dans $\mathbb{K}$.

2.1.1. EDL1 à **coefficient constant** : $a \in \mathbb{K}$

$$(E):\quad y' + a.y = b(x)$$

SH : $y_h = \lambda.e^{-ax}$; $\lambda \in \mathbb{K}$ (espace vect. de dim=1)

SP :

a) $b(x) = P_n(x)$; polynôme $d° = n$

$$y_p = \begin{cases} Q_n(x) & si\ a \neq 0 \\ x.Q_n(x) & si\ a = 0 \end{cases} \text{ où } Q_n \text{ polyn. } d° = n$$

b) $b(x) = P_n(x).e^{\alpha x}$; $\alpha \in \mathbb{K}$

$$y_p = \begin{cases} Q_n(x).e^{\alpha x} & si\ \alpha \neq -a \\ x.Q_n(x).e^{\alpha x} & si\ \alpha = -a \end{cases}$$

où Q_n polyn. $d° = n$

c) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $b(x) = P_n(x).cos(\omega x)$; $\omega \in \mathbb{R}$
(resp. $b(x) = P_n(x).sin(\omega x)$)

$y_p = Re(z_p)$
(resp. $y_p = Im(z_p)$)

où z_p SP de $z' + a.z = P_n(x).e^{i\omega x}$

d) **Cas général** : b continue de I dans $\mathbb{K}$:
y_p : par Méthode de Variation de la Constante (MVC) :

$y_p \coloneqq \lambda(x).e^{-ax}$ où $\lambda'(x) = b(x).e^{a.x}$

SG = SH + SP : $y = y_h + y_p$

2.2. EDL2

EDL du 2nd ordre :

$$(E):\quad y'' + a(x).y' + b(x).y = c(x)$$

a, b et c : fonctions continues de I dans $\mathbb{K}$.

2.2.1. EDL2 à **coefficients constants** : $a, b \in \mathbb{K}$

$$(E):\quad y'' + a.y' + b.y = c(x)$$

SH : (espace vect. de dim=2)

Equation caractéristique : $r^2 + ar + b = 0$; $\Delta = a^2 - 4b$

Cadre complexe $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ($y : I \longmapsto \mathbb{C}$ **et** $a, b \in \mathbb{C}$)
d'où $\Delta \in \mathbb{C}$ (pas de relation d'ordre : $>$ ou $<$ 0)

- $\Delta \neq 0$: $\rightarrow$ 2 racines complexes $r_1, r_2 \in \mathbb{C}$
  $y_h = \lambda.e^{r_1 x} + \mu.e^{r_2 x}$; $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$
- $\Delta = 0$: $\rightarrow$ 1 racine double $r \in \mathbb{C}$
  $y_h = (\lambda x + \mu).e^{rx}$; $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$

Cadre réel $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ($y : I \longmapsto \mathbb{R}$ **et** $a, b \in \mathbb{R}$)
d'où $\Delta \in \mathbb{R}$

- $\Delta > 0$: $\rightarrow$ 2 racines réelles $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$
  $y_h = \lambda.e^{r_1 x} + \mu.e^{r_2 x}$; $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$
- $\Delta = 0$: $\rightarrow$ 1 racine double $r \in \mathbb{R}$
  $y_h = (\lambda x + \mu).e^{rx}$; $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$
- $\Delta < 0$: $\rightarrow$ 2 racines complexes conjuguées :
  $r_{1,2} = \alpha \pm i\omega$; $(\alpha, \omega) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$
  $y_h = \left(\lambda.cos(\omega x) + \mu.sin(\omega x)\right).e^{\alpha x}$; $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

SP :

a) $c(x) = P_n(x)$; polynôme $d° = n$

$y_p = x^m.Q_n(x)$ où Q_n polyn. $d° = n$, et :

$$m = \begin{cases} 0 \ \ si \ \ b \neq 0 \\ 1 \ \ si \ \ b = 0, a \neq 0 \\ 2 \ \ si \ \ b = 0 = a \end{cases}$$

b) $c(x) = P_n(x).e^{\alpha x}$; $\alpha \in \mathbb{K}$

$y_p = x^m.Q_n(x).e^{\alpha x}$ où Q_n polyn. $d° = n$, et :

$$m = \begin{cases} 0 \ \ si \ \ \alpha \ \textbf{non} \ racine \ de \ l'éq. caract. \\ 1 \ \ si \ \ \alpha \ racine \ \textbf{simple} \ de \ l'éq. caract. \\ 2 \ \ si \ \ \alpha \ racine \ \textbf{double} \ de \ l'éq. caract. \end{cases}$$

c) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $c(x) = P_n(x).cos(\omega x)$; $\omega \in \mathbb{R}$

(resp. $c(x) = P_n(x).sin(\omega x)$)

$y_p = Re(z_p)$

(resp. $y_p = Im(z_p)$)

où z_p SP de $z'' + a.z' + b.z = P_n(x).e^{i\omega x}$

d) **Cas général** : c continue de I dans $\mathbb{K}$:

y_p : par Méthode de Variation des Constantes (MVC) :

Voir 2.2.2 (pareil que le cas des coeff. non constants)

SG = SH + SP : $y = y_h + y_p$

2.1.2. EDL1 à **coefficient non constant** : a $C°$

$$(E): \quad y' + a(x).y = b(x)$$

SH : $y_h = \lambda.e^{-A(x)}$; $\lambda \in \mathbb{K}$, A une primitive de a.

SP :

On cherche une solution évidente (constante, polynôme, sin, cos, …), ou :

MVC : $y_p := \lambda(x).e^{-A(x)}$ où $\lambda'(x) = b(x).e^{A(x)}$

On intègre, on trouve λ, d'où y_p.

SG = SH + SP : $y = y_h + y_p$

2.2.2. EDL2 à **coefficients non constants** : a, b : $C°$

$$(E): \quad y'' + a(x).y' + b(x).y = c(x)$$

1er cas : On peut trouver 2 solutions de (E_h) :

SH :

- *Rappel :* si $a, b \in \mathbb{K}$, on sait trouver $y_h = \lambda y_1 + \mu y_2$
- Si a et b deux fonctions, il n'y a pas de méthode générale (contrairement aux $EDL1$ par MVC). D'où on cherche 2 solutions évidentes/simples (constantes, polynômes, sin, cos, …)

SP :

Si on suppose qu'on connaît deux solutions de (E_h) : y_1 et y_2, alors : $y_h = \lambda y_1 + \mu y_2$, et :

MVC : $y_p := \lambda(x).y_1 + \mu(x).y_2$

où λ' et μ' sont imposées solutions de :

$$(S): \begin{cases} \lambda'.y_1 + \mu'.y_2 = 0 \\ \lambda'.y_1' + \mu'.y_2' = c(x) \end{cases}$$

On trouve λ' et μ', on intègre et on trouve λ et μ, d'où y_p.

SG = SH + SP : $y = y_h + y_p$

2nd cas : On n'a pas de solution de (E_h) :

a) Changement de la variable x : $t := f(x)$

puis $y(x) = y \circ f^{-1}(t) = \boldsymbol{z(t)} = z\left(f(x)\right)$

$\Longrightarrow EDO \ pour \ \boldsymbol{z(t)}$ à résoudre

b) Changement de l'inconnue y : $\boldsymbol{z(x)} := f\left(y(x)\right)$

puis $y(x) = f^{-1}\left(z(x)\right)$ (y en fonction de z)

$\Longrightarrow EDO \ pour \ \boldsymbol{z(x)}$ à résoudre

Attention : On doit dériver par rapport à x !

c) Autres méthodes (TF, TL, Méthodes numériques…)