EDO : Equations Différentielles Ordinaires

$$(E):\quad F\left(x, y, y', y'', \dots\dots\dots, y^{(n)}\right) = 0$$

Inconnue : $y : I \longmapsto \mathbb{K}$

Variable : $x \in I$

F : une fonction de $n+2$ variables. Ci-haut une EDO d'ordre n.

1. EDO à variables séparables

$$(E):\quad y'.f(y) = g(x)$$

g fonction continue sur I. f fonction continue sur $y(I)$.

Résolution : on passe ce qui concerne les $y, y', y"$ ... d'un côté de l'égalité et ce qui concerne x de l'autre côté, puis on intègre.

2. EDL : EDO Linéaires

F est multilinéaire d'où :

$$(E):\quad a_0(x).y + a_1(x).y' + a_2(x).y'' + \cdots + a_n(x)y^n = g(x)$$

les **a_i et g : fonctions continues de I dans** $\mathbb{K}$.

Equation homogène (sans second membre) :

$$(E_h):\quad a_0(x).y + a_1(x).y' + a_2(x).y'' + \cdots + a_n(x)y^n = 0$$

2.1. EDL1

EDL du 1er ordre :

$$(E):\quad y' + a(x).y = b(x)$$

a et b : fonctions continues de I dans $\mathbb{K}$.

2.1.1. EDL1 à **coefficient constant** : $a \in \mathbb{K}$

$$(E):\quad y' + a.y = b(x)$$

<u>*SH :*</u> $y_h = \lambda.e^{-ax}$; $\lambda \in \mathbb{K}$ (esp. vect. de dim=1)

<u>*SP :*</u>

a) $b(x) = P_n(x)$; polynôme $d° = n$

$$y_p = \begin{cases} Q_n(x) & si\ a \neq 0 \\ x.Q_n(x) & si\ a = 0 \end{cases}$$ où Q_n polyn. $d° = n$

b) $b(x) = P_n(x).e^{\alpha x}$; $\alpha \in \mathbb{K}$

$$y_p = \begin{cases} Q_n(x).e^{\alpha x} & si\ \alpha \neq -a \\ x.Q_n(x).e^{\alpha x} & si\ \alpha = -a \end{cases}$$

où Q_n polyn. $d° = n$

c) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $b(x) = P_n(x).cos(\omega x)$; $\omega \in \mathbb{R}$
(resp. $b(x) = P_n(x).sin(\omega x)$)

$y_p = Re(z_p)$
(resp. $y_p = Im(z_p)$)

où z_p SP de $z' + a.z = P_n(x).e^{i\omega x}$

d) Cas général : b continue de I dans $\mathbb{K}$:

y_p : par Méthode de Variation de la Constante (MVC) :

$y_p := \lambda(x).e^{-ax}$ où $\lambda'(x) = b(x).e^{a.x}$

<u>*SG = SH + SP*</u>

2.2. EDL2

EDL du 2nd ordre :

$$(E):\quad y'' + a(x).y' + b(x).y = c(x)$$

a, b et c : fonctions continues de I dans $\mathbb{K}$.

2.2.1. EDL2 à **coefficients constants** : $a, b \in \mathbb{K}$

$$(E):\quad y'' + a.y' + b.y = c(x)$$

<u>*SH :*</u>

Equation caractéristique :

$$r^2 + ar + b = 0\ ;\ \Delta = a^2 - 4b$$

Cadre complexe : $y : I \longmapsto \mathbb{C}$

- $\Delta \neq 0$: $\rightarrow$ 2 racines complexes $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$
  $y_h = \lambda.e^{\alpha x} + \mu.e^{\beta x}$; $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$
- $\Delta = 0$: $\rightarrow$ 1 racine double $\alpha \in \mathbb{C}$
  $y_h = (\lambda x + \mu).e^{\alpha x}$; $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$

Cadre réel $y : I \longmapsto \mathbb{R}$

- $\Delta > 0$: $\rightarrow$ 2 racines réelles $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
  $y_h = \lambda.e^{\alpha x} + \mu.e^{\beta x}$; $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$
- $\Delta = 0$: $\rightarrow$ 1 racine double $\alpha \in \mathbb{R}$
  $y_h = (\lambda x + \mu).e^{\alpha x}$; $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$
- $\Delta < 0$: $\rightarrow$ 2 racines complexes conjuguées :
  $r = \alpha \pm i\omega$; $(\alpha, \omega) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$
  $y_h = \left(\lambda.cos(\omega x) + \mu.sin(\omega x)\right).e^{\alpha x}$; $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

SP :

a) $c(x) = P_n(x)$; polynôme $d° = n$

$y_p = x^m . Q_n(x)$ *où* Q_n polyn. $d° = n$, et :

$$m = \begin{cases} 0 \ \ si \ \ b \neq 0 \\ 1 \ \ si \ \ b = 0, a \neq 0 \\ 2 \ \ si \ \ b = 0 = a \end{cases}$$

b) $c(x) = P_n(x). e^{\alpha x}$; $\alpha \in \mathbb{K}$

$y_p = x^m . Q_n(x). e^{\alpha x}$ *où* Q_n polyn. $d° = n$, et :

$$m = \begin{cases} 0 \ \ si \ \ \alpha \ \boldsymbol{non} \ racine \ de \ l'éq. caract. \\ 1 \ \ si \ \ \alpha \ racine \ \boldsymbol{simple} \ de \ l'éq. caract. \\ 2 \ \ si \ \ \alpha \ racine \ \boldsymbol{double} \ de \ l'éq. caract. \end{cases}$$

c) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $c(x) = P_n(x). cos(\omega x)$; $\omega \in \mathbb{R}$

(resp. $c(x) = P_n(x). sin(\omega x)$)

$y_p = Re(z_p)$

(resp. $y_p = Im(z_p)$)

où z_p SP de $z'' + a. z' + b. z = P_n(x). e^{i\omega x}$

d) Cas général : c continue de I dans $\mathbb{K}$:

y_p : par Méthode de Variation des Constantes (MVC) :

Voir 2.2.2

SG = SH + SP

2.1.2. EDL1 à **coefficient non constant** : a $C°$

$$(E): \quad y' + a(x). y = b(x)$$

SH : $y_h = \lambda. e^{-A(x)}$; $\lambda \in \mathbb{K}$, A une primitive de a.

SP : MVC : $y_p := \lambda(x). e^{-A(x)}$ où $\lambda'(x) = b(x). e^{A(x)}$

On intègre, on trouve λ, d'où y_p.

SG = SH + SP

2.2.2. EDL2 à **coefficients non constants** : a, b : $C°$

$$(E): \quad y'' + a(x). y' + b(x). y = c(x)$$

1er cas : On peut trouver 2 solutions de (E_h) :

SH :

- *Rappel :* si $a, b \in \mathbb{K}$, on sait trouver $y_h = \lambda y_1 + \mu y_2$
- Sinon, si a, b fonctions, il n'y a pas de méthode générale (contrairement aux $EDL1$).
  - On cherche 2 solutions évidentes/simples (constantes, polynômes, sin, cos, …)

SP :

Si on suppose qu'on connaît deux solutions de (E_h) : y_1 et y_2, alors :

MVC : $y_p := \lambda(x). y_1 + \mu(x). y_2$

où λ' et μ' sont solutions de :

$$(S): \begin{cases} \lambda'. y_1 + \mu'. y_2 = 0 \\ \lambda'. y_1' + \mu'. y_2' = c(x) \end{cases}$$

On trouve λ' et μ', on intègre et on trouve λ et μ, d'où y_p.

2nd cas : On n'a pas de solution de (E_h) :

a) Changement de la variable x :

$$t := f(x)$$

puis $y(x) = y \circ f^{-1}(t) = z(t) = z \circ f(x)$

b) Changement de l'inconnue y :

$$z(x) := f\big(y(x)\big)$$

puis $y(x) = f^{-1} \circ z(x)$

ATTENTION : On doit dériver par rapport à x !

c) Autres méthodes …

SG = SH + SP