TD Chapitre 2 : Transformée de Fourier :

Exercices supplémentaires

Exercice 1 :

La fonction porte est définie par :

$$\Pi(t) = \begin{cases} 1 & si \quad t \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \\ 0 & sinon \end{cases}$$

Calculer les transformées de Fourier des fonctions suivantes :

a) $t \longmapsto \Pi\left(\frac{t-1}{2}\right)$ b) $t \longmapsto \Pi(t)$ c) $t \longmapsto t^2.\Pi(t)$

Exercice 2 :

On appelle $\mathbb{1}_E$ la fonction *indicatrice* sur le domaine E. Elle est définie en général par :

$$\mathbb{1}_E(t) = \begin{cases} 1 & si \quad t \in E \\ 0 & si \quad t \notin E \end{cases}$$

Exemple : $\mathbb{1}_{\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]} = \Pi$ la fonction porte.

Montrer les formules suivantes :

a) $\mathcal{F}\left(b.\mathbb{1}_{]-a,a[}\right)(u) = 2ab.sinc(2\pi au); \quad a, b \in \mathbb{R}$

b) $\mathcal{F}\left(t^n e^{-t}.\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(t)\right)(u) = \frac{n!}{(1+2i\pi u)^{n+1}}$

Exercice 3 :

a) Calculer la transformée de Fourier de la fonction $t \longmapsto c.\mathbb{1}_{[-T,T]}(t)$; $c \in \mathbb{R}, T \in \mathbb{R}^+$.

b) En déduire la transformée de Fourier de la fonction $t \longmapsto \frac{\sin(t)}{t}$

Exercice 4 :

Soit le signal $s(t) = e^{-a|t|}$ avec $a > 0$

a) Représenter son graphe en fonction du temps.

b) Calculer sa transformée de Fourier.

c) Tracer son spectre d'amplitude : $|\mathcal{F}(s)(u)|$

d) En utilisant les propriétés de la transformée de Fourier inverse, déduire de b) la transformée de Fourier de la fonction $v(t) = \frac{1}{1+t^2}$

e) En déduire l'intégrale : $I = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(2\pi ut)}{1+t^2} dt$

Exercice 5 :

Soit le signal $s(t) = e^{-at}.\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(t)$ avec $a > 0$

a) Représenter le signal $s(t)$.

b) Calculer sa transformée de Fourier.

c) Tracer son spectre d'amplitude : $|\mathcal{F}(s)(u)|$.

d) Déduire de b) transformée de Fourier de la fonction $v(t) = t.e^{-at}.\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(t)$.

e) Calculer la transformée de Fourier de $v_n(t) = t^n.e^{-at}.\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(t)$

Exercice 6 :

Calculer :

a) $\mathcal{F}\left(e^{-at}.\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(t)\right)(u)$; $\quad a \in \mathbb{R}^+$

b) $\mathcal{F}\left(t^n e^{-at}.\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(t)\right)(u)$; $\quad a \in \mathbb{R}^+, n \in \mathbb{N}$

c) $\mathcal{F}\left(\frac{1}{a^2+t^2}\right)(u)$; $\quad a \in \mathbb{R}$

d) $\mathcal{F}\left(e^{-a|t|}\right)(u)$; $\quad a \in \mathbb{R}^+$

e) $\mathcal{F}\left(\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(t-a) - \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(b-t)\right)(u)$; $\quad a, b \in \mathbb{R}$

Exercice 7 :

Trouver la transformée de Fourier des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \begin{cases} 1 & si \ -b < x < b \\ 0 & sinon \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 1 & si \ -b < x < c \\ 0 & sinon \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} e^{-ax} & si \ x > 0 \\ 0 & sinon \end{cases}$; $\quad a > 0$

d) $f(x) = \begin{cases} e^{ax} & si \ -b < x < c \\ 0 & sinon \end{cases}$

e) $f(x) = \begin{cases} e^{iax} & si \ -b < x < c \\ 0 & sinon \end{cases}$

f) $f(x) = \frac{\sin(ax)}{x}$; $\quad a > 0$

Exercice 8 :

Trouver les fonctions $y: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ intégrables sur $\mathbb{R}$ ($y \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$) solutions de l'EDO suivante :

$$-y'' + y = e^{-t^2}; \quad t \in \mathbb{R}$$

Exercice 9 :

Soit $\mathcal{F}f(u)$ la transformée de Fourier de $f(t)$.

a) Quelle est la transformée de Fourier de $f(t).e^{2i\pi f_0 t}$?

b) Quelle est la transformée de Fourier de $f(t).e^{-2i\pi f_0 t}$?

c) En déduire la transformée de Fourier de $f(t).\cos(2\pi f_0 t)$.