Université Internationale de Casablanca
École d'Ingénierie
Tronc Commun Ecole

TC / S5

Mécanique des Milieux Continus
Lois de comportement

Pr. ESMILI

Année Universitaire: 2017/2018

Introduction

- La Mécanique des Milieux Continus a pour objet de définir les **lois** qui régissent le comportement de tous les milieux qui respectent l'hypothèse de **continuité**. Pour cela elle utilise les lois fondamentales de la mécanique basées sur la description **dynamique** du milieu. Pour être en conformité avec les résultats expérimentaux basés sur une description cinématique, nous serons amenés à employer les **lois de comportement.** Dans le cas le plus simple nous aurons à traiter des problèmes **d'élasticité linéaire** dans l'hypothèse des **petites** perturbations

Quelques citations et réflexions…

- Chaque matin en Afrique une gazelle se réveille. Elle sait qu'elle doit courir plus vite que le lion le plus rapide ou elle sera dévorée.

  Chaque matin en Afrique un lion se réveille . Il sait qu'il doit courir plus vite que la gazelle la plus lente ou il jeunera.

  Peu importe que tu sois un lion ou une gazelle, quand le soleil se lèvera, tu ferais mieux d'être déjà en train de courir.

- Il n’y a pas de vents favorables pour celui qui ne connait pas son port.
- Ce n’est pas parce que les choses sont difficiles à faire qu’on ne les fait pas, c’est parce qu’on ne les fait pas qu’elles sont difficiles.
- Chacun rêve de changer l’humanité mais personne ne pense à se changer lui-même.

LE CHÊNE ET LE ROSEAU
Jean de la Fontaine

Le Chêne un jour dit au roseau :
Vous avez bien sujet d'accuser la Nature ;
Un Roitelet pour vous est un pesant fardeau.
Le moindre vent qui d'aventure
Fait rider la face de l'eau,
Vous oblige à baisser la tête :
Cependant que mon front, au Caucase pareil,
Non content d'arrêter les rayons du soleil,
Brave l'effort de la tempête.
Tout vous est aquilon ; tout me semble zéphir.
Encore si vous naissiez à l'abri du feuillage
Dont je couvre le voisinage,
Vous n'auriez pas tant à souffrir :
Je vous défendrais de l'orage ;
Mais vous naissez le plus souvent
Sur les humides bords des Royaumes du vent.
La Nature envers vous me semble bien injuste.
Votre compassion, lui répondit l'Arbuste ,
Part d'un bon naturel ; mais quittez ce souci.
Les vents me sont moins qu'à vous redoutables.
Je plie, et ne romps pas. Vous avez jusqu'ici
Contre leurs coups épouvantables
Résisté sans courber le dos ;
Mais attendons la fin. Comme il disait ces mots,
Du bout de l'horizon accourt avec furie
Le plus terrible des enfants
Que le Nord eût porté jusque-là dans ses flancs.
L'Arbre tient bon ; le Roseau plie.
Le vent redouble ses efforts,
Et fait si bien qu'il déracine
Celui de qui la tête au ciel était voisine,
Et dont les pieds touchaient à l'empire des morts.

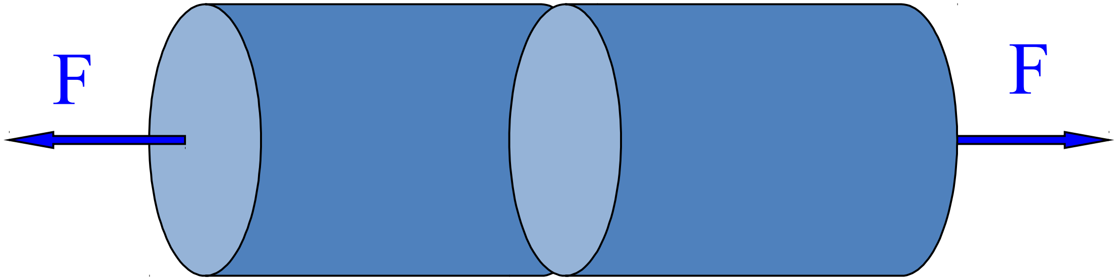
Mécanique des Milieux Continus

- I Milieux Déformables
- II Forces de Contact
- III Contraintes
- IV Loi Fondamentale de la Dynamique
- V Déformations
- VI Relation Contraintes - Déformations

I Milieux Déformables

- I-1 Forces Externes et Équilibre Mécanique
- I-2 Comportement d’une Structure
- I-3 Raideur et Rigidité

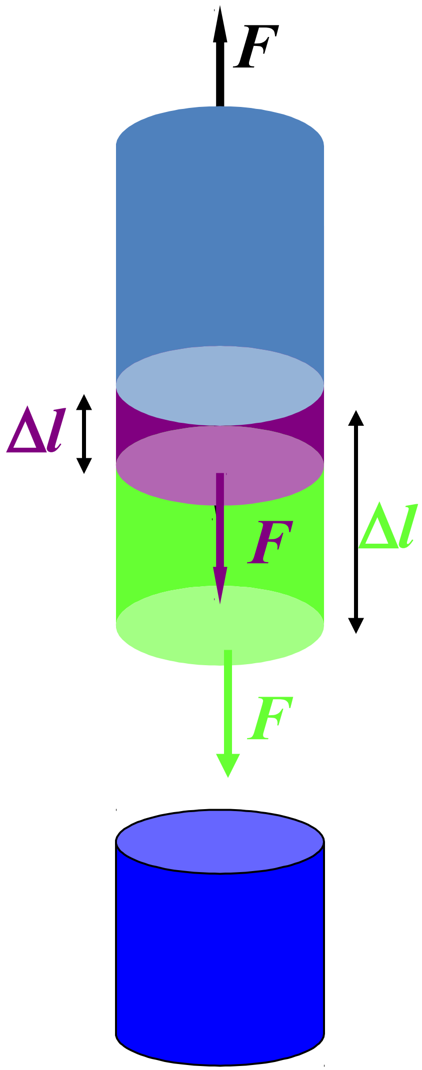
I-1 Forces Externes :
Équilibre Mécanique

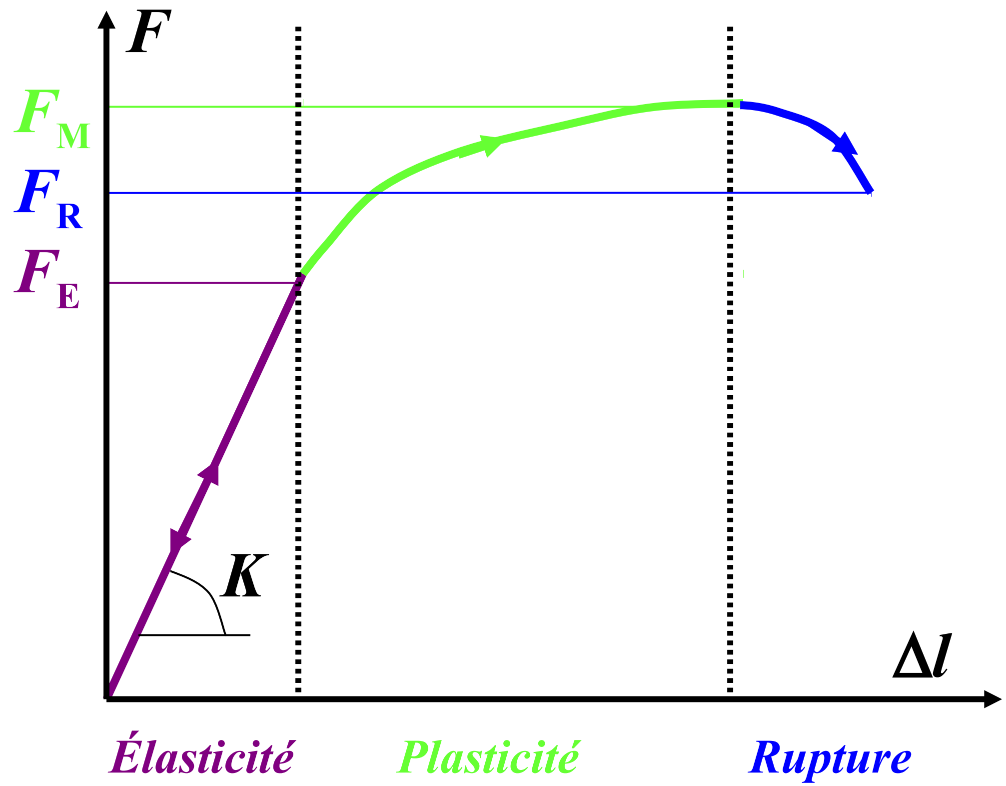


Équilibre des Forces $\sum \vec{F} = \vec{0}$

Équilibre des Moments $\sum \vec{M} = \vec{0}$

I-2 Comportement d'une Structure :
Essai de Traction

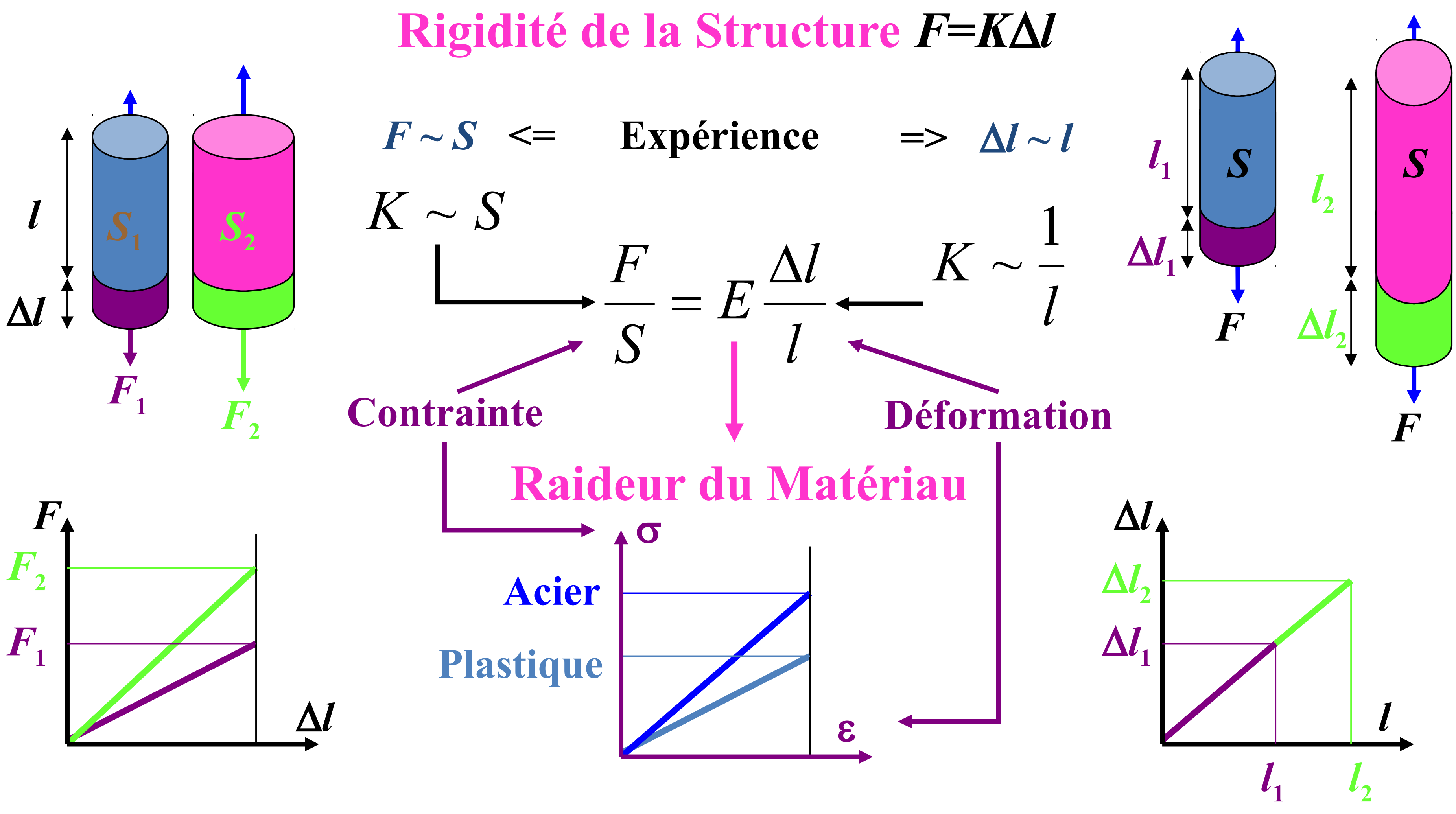




Rigidité de la Structure $F=K\Delta l$

I-3 Raideur et Rigidité :

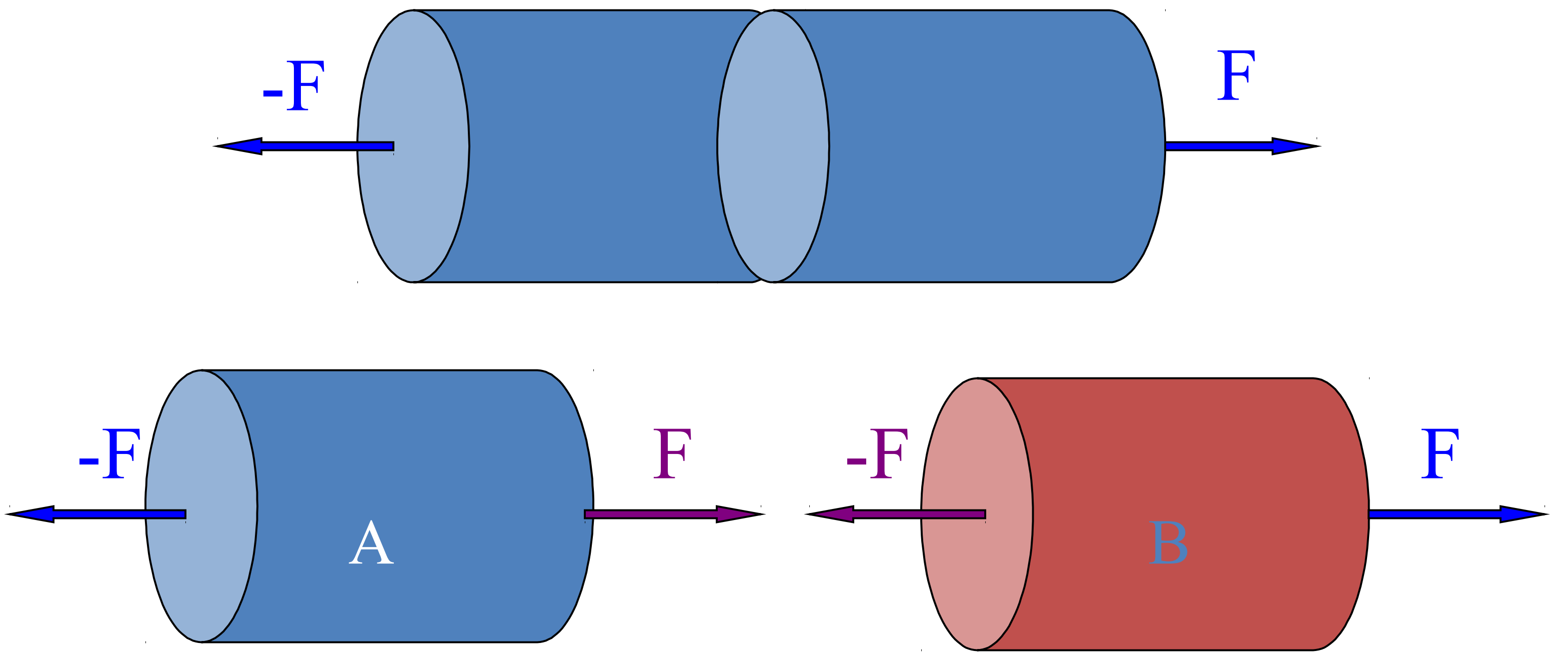
Géométrie de la Structure et Comportement du Matériau



II Forces de Contact

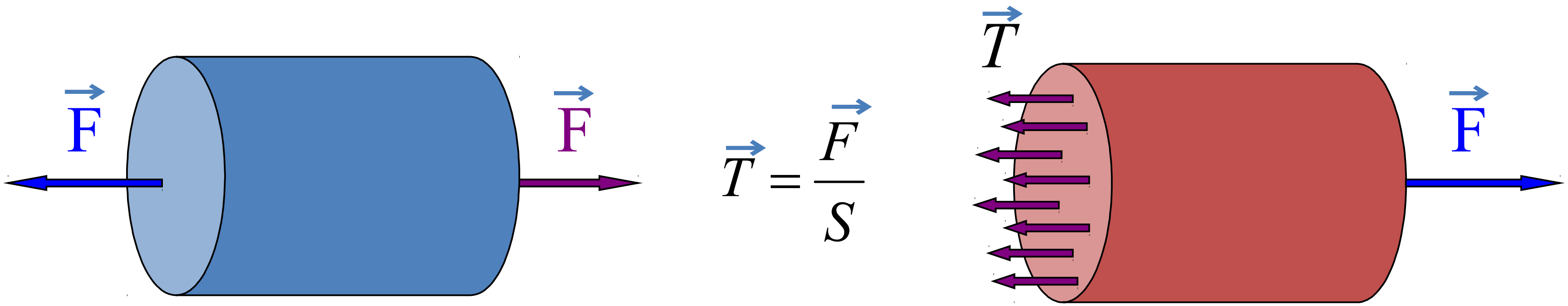
- II-1 Forces Internes : Action et Réaction
- II-2 Forces Internes : Répartition Homogène
- II-3 Forces Internes : Répartition non Homogène
- II-4 Vecteur Contrainte : État Local

II-1 Forces Internes :
Action et Réaction



F(A/B) = -F(B/A)   La Résultante des Forces Internes est toujours Nulle

II-2 Forces Internes : Répartition Homogène



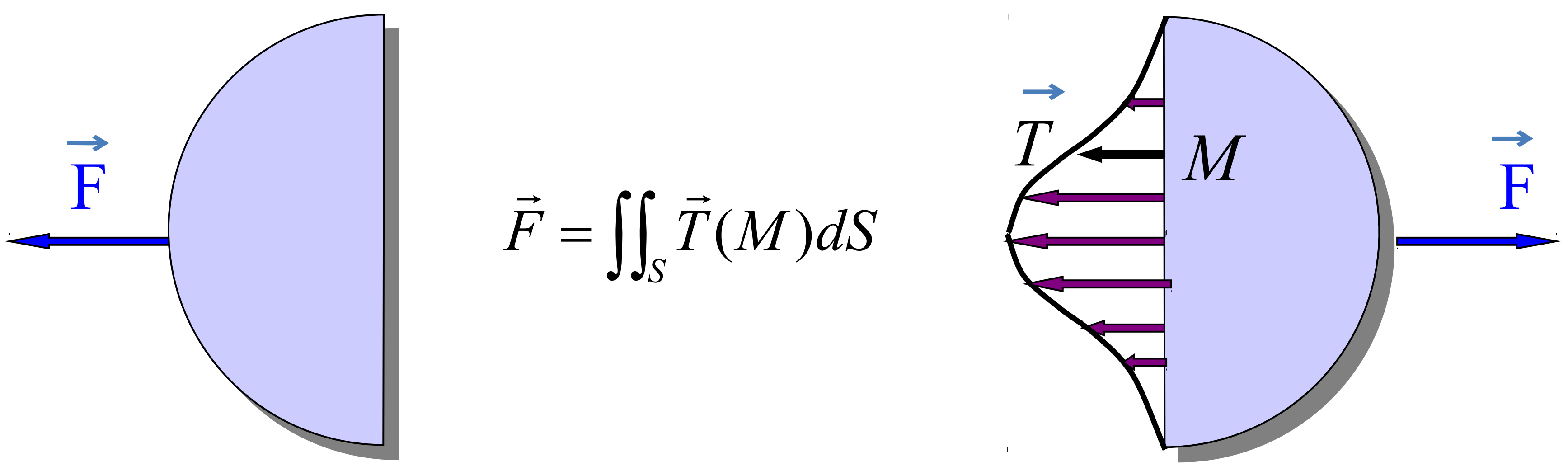
$$\vec{T} = \frac{\vec{F}}{S}$$

Le Vecteur Contrainte $\vec{T}$

Force par unité de Surface [MPa]

est indépendant du point dans la section S

II-3 Forces Internes : Répartition non Homogène

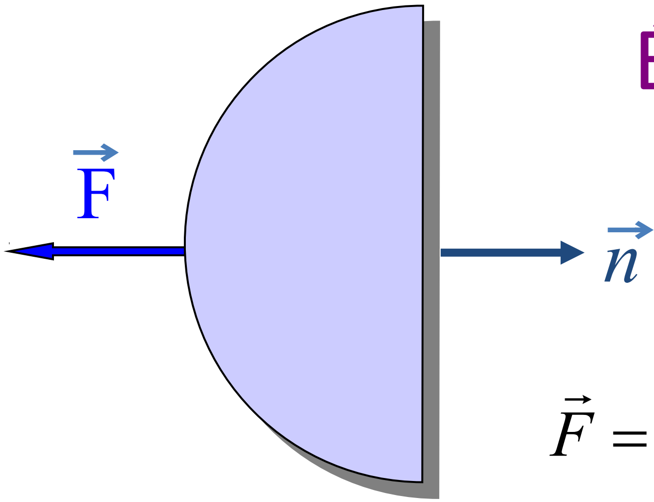


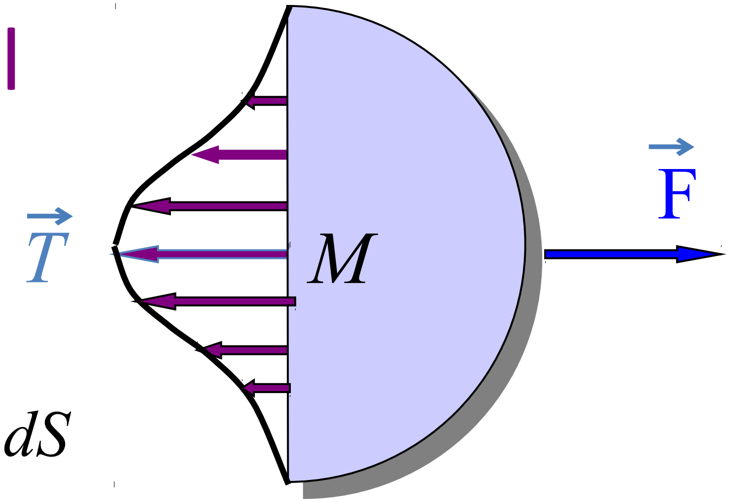
$$\vec{F} = \iint_S \vec{T}(M)\, dS$$

Le Vecteur Contrainte $\vec{T}$ dépend du point M dans la section S

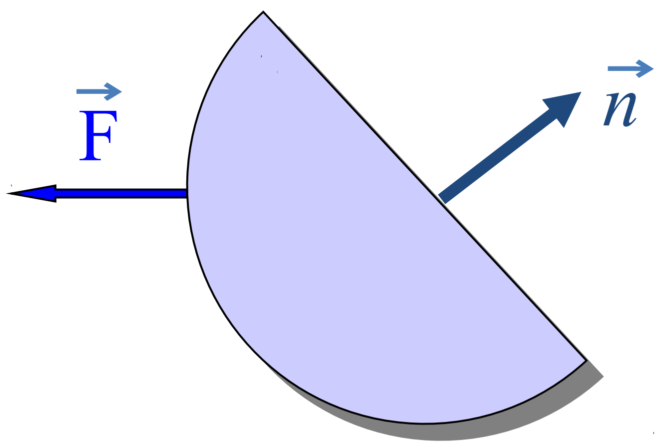
II-4 Vecteur Contrainte :

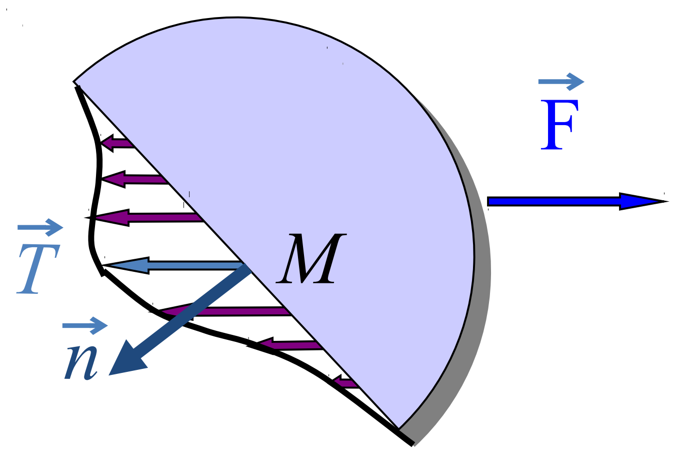
État local





$$\vec{F} = \iint_S \vec{T}(M,\vec{n})dS$$





$\vec{T}$ dépend : du point M dans la section S

: de l'orientation $\vec{n}$ de la section S

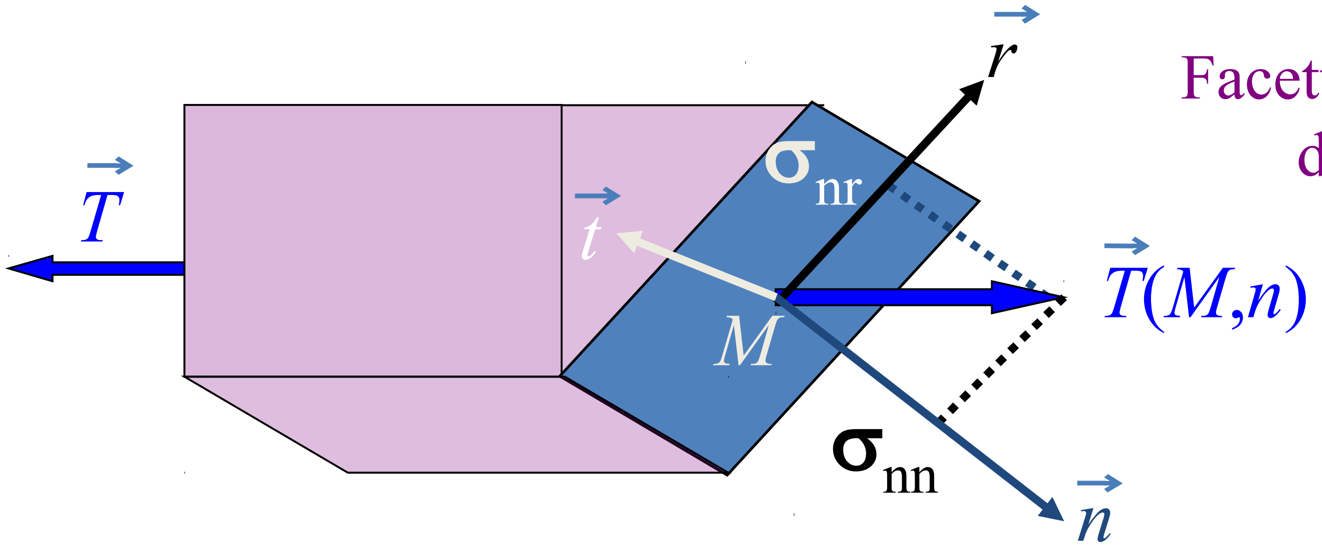
III Contraintes

- III-1 Tenseur des Contraintes
- III-2 Représentation des Contraintes

III-1 Tenseur des Contraintes

- III-1.1 Repère local : Traction, Cisaillement
- III-1.2 Tenseur des Contraintes : Définition
- III-1.3 Tenseur des Contraintes : Symétrie
- III-1.4 Contraintes Principales et Axes Propres
- III-1.5 Sollicitations Principales
- III-1.6 Invariants du Tenseur des Contraintes
- III-1.7 Sphérique et Déviateur des Contraintes

III-1.1 Tenseur des Contraintes : Repère Local



$\vec{n}$, $\vec{r}$, $\vec{T}$ coplanaires

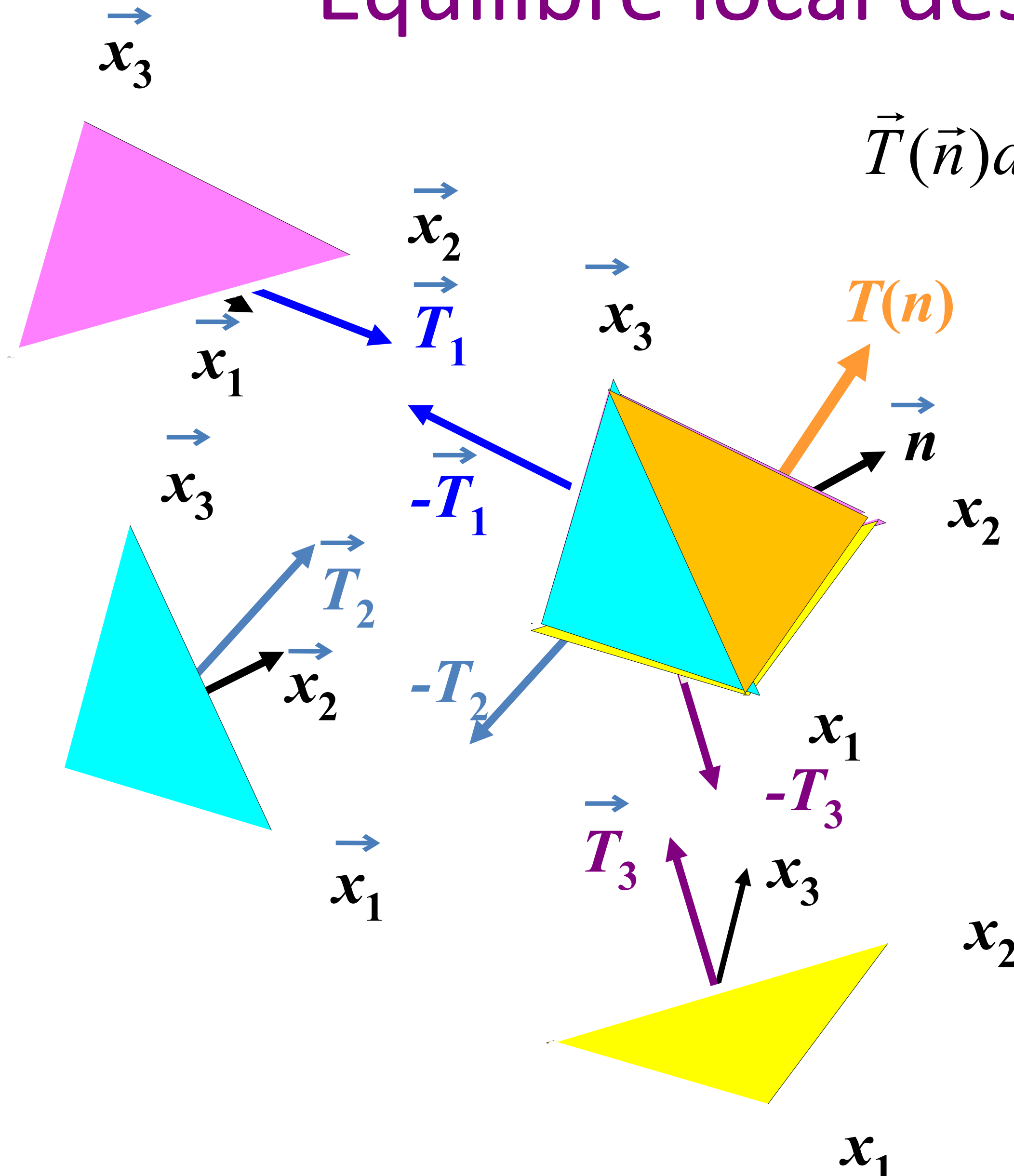
Trièdre local direct $\vec{n}$, $\vec{r}$, $\vec{t}$

$\sigma_{nn} = \vec{T} \bullet \vec{n}$ Traction > 0 Compression <0

$\sigma_{nr} = \vec{T} \bullet \vec{r}$ Cisaillement

$\sigma_{nt} = \vec{T} \bullet \vec{t} = 0$

III-1.2 Tenseur des Contraintes : Équilibre local des Forces

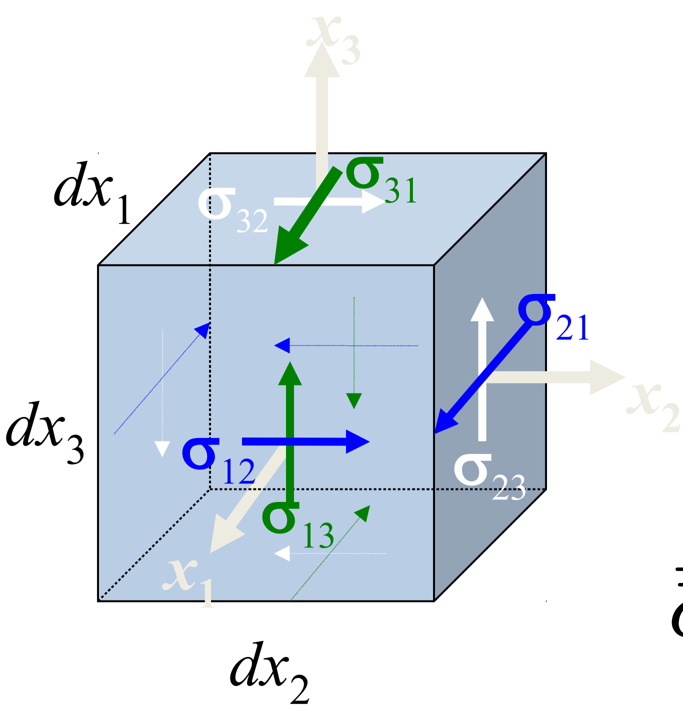


$$\vec{T}(\vec{n})dS = \vec{T}_1 dS_1 + \vec{T}_2 dS_2 + \vec{T}_3 dS_3$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc|c} \vec{T}_1 & \vec{T}_2 & \vec{T}_3 & \vec{n} \end{array} \\ \vec{T}(\vec{n}) = & \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{21} & \sigma_{31} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{32} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{vmatrix} \end{array}$$

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = \overline{\overline{\sigma}}(M) \bullet \vec{n}$$

III-1.3 Tenseur des Contraintes : Équilibre local des Moments



$$\sigma_{12}\, dx_2\, dx_3 \;\; dx_1 = \sigma_{21}\, dx_3\, dx_1 \;\; dx_2$$

$$\sigma_{13}\, dx_3\, dx_2 \;\; dx_1 = \sigma_{31}\, dx_2\, dx_1 \;\; dx_3$$

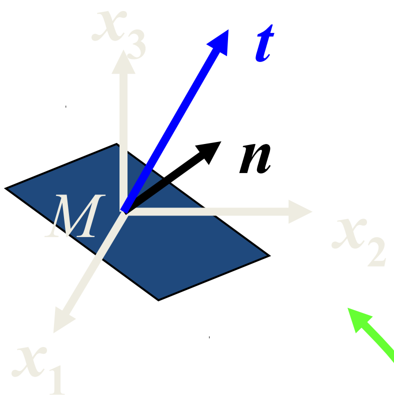
$$\sigma_{23}\, dx_3\, dx_1 \;\; dx_2 = \sigma_{32}\, dx_1\, dx_2 \;\; dx_3$$

$$\overline{\overline{\sigma}}(M) \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{21} & \sigma_{31} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{32} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{vmatrix}$$

$$\boxed{\sigma_{ij} = \sigma_{ji}}$$

Le Tenseur des Contraintes $\overline{\overline{\sigma}}(M)$ est Symétrique

III-1.4 Tenseur des Contraintes :
Contraintes Principales et Axes Propres

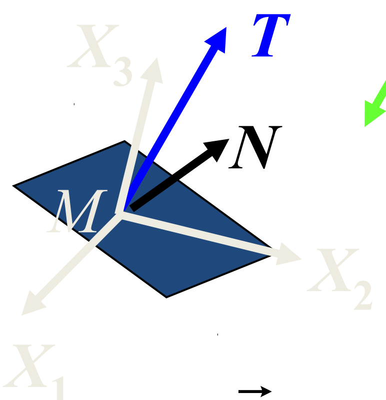


$$\overline{\overline{\sigma}}(M)\begin{Vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{21} & \sigma_{31} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{32} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{Vmatrix} \qquad \vec{t} = \overline{\overline{\sigma}}\vec{n}$$

$$\vec{n} = {}^t A \vec{N}$$

A

$$\vec{T} = A\vec{t}$$



$$\overline{\overline{\Sigma}}(M)\begin{vmatrix} \sigma_{I} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{III} \end{vmatrix} \qquad \vec{T} = \overline{\overline{\Sigma}}\vec{N}$$

$$\vec{T} = A\vec{t} \qquad = A\overline{\overline{\sigma}}\vec{n} \qquad = A\overline{\overline{\sigma}}\,{}^t A\vec{N} \qquad = \overline{\overline{\Sigma}}\vec{N}$$

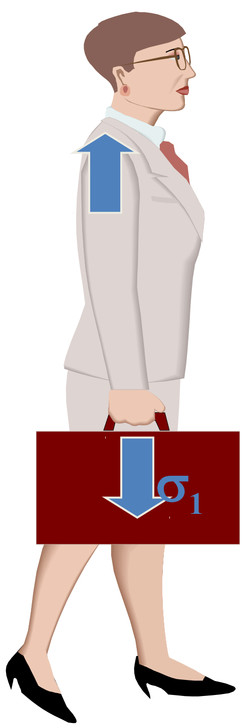
$$\overline{\overline{\Sigma}}(M) = A\overline{\overline{\sigma}}(M)\,{}^t A$$

III-1.5 Tenseur des Contraintes :

Sollicitations Principales Traction - Compression

Uniaxiale

$$\begin{vmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$



Biaxiale

$$\begin{vmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$$

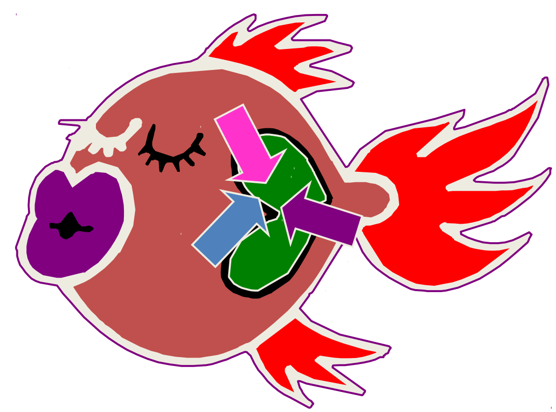
Triaxiale

$$\begin{vmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{vmatrix}$$

Hydrostatique

$$\begin{vmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{vmatrix}$$

$$\overline{\overline{\sigma}} = -p\overline{\overline{\delta}}$$



$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = -p$$

III-1.6 Tenseur des Contraintes : Les Invariants Tensoriels

$$\overline{\overline{\Sigma}}(M) \begin{vmatrix} \sigma_I & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{III} \end{vmatrix} \qquad \overline{\overline{\sigma}}(M) \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{21} & \sigma_{31} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{32} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{vmatrix}$$

$$I_1 = \sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III} = \Sigma\sigma_{kk} = 3\ \sigma_m = Tr(\sigma)$$

$$I_2 = \sigma_I\,\sigma_{II} + \sigma_{II}\,\sigma_{III} + \sigma_{III}\,\sigma_I = (\sigma_{11}\,\sigma_{22} - \sigma_{12}^2) + (\sigma_{11}\,\sigma_{33} - \sigma_{13}^2) + (\sigma_{22}\,\sigma_{33} - \sigma_{23}^2)$$

$$I_3 = \sigma_I\ \sigma_{II}\,\sigma_{III} = Det(\sigma)$$

$$\lambda^3 - I_1\lambda^2 + I_2\lambda - I_3 = 0$$

Caley-Hamilton

$$\overline{\overline{\sigma}}^3 - I_1\overline{\overline{\sigma}}^2 + I_2\overline{\overline{\sigma}} - I_3\overline{\overline{\delta}} = \overline{\overline{0}}$$

6 Composantes = 3 (Invariants ou Valeurs Propres) + 3 Angles d'Euler

III-1.7 Tenseur des Contraintes : Sphérique et Déviateur

$$\overline{\overline{\sigma}}(M) = \overline{\overline{S}} + \overline{\overline{D}} = \begin{vmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{11} - \sigma_m & \sigma_{21} & \sigma_{31} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} - \sigma_m & \sigma_{32} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} - \sigma_m \end{vmatrix}$$

$$\sigma_m = \frac{1}{3}\mathrm{Tr}(\overline{\overline{\sigma}})$$

$$\sigma_d^2 = \frac{1}{3}\mathrm{Tr}(\overline{\overline{\mathrm{D}}}^2)$$

Sphérique *S* Tr(*S*)= Tr(σ) **Déviateur *D* Tr(*D*)= 0**

σ_m Contrainte Normale Moyenne (Traction ou Compression)

σ_d Contrainte Déviatorique Moyenne (Cisaillement)

π Tenseur des Directions Tr(π)=0 et Tr(π^2)=3

$$\overline{\overline{\sigma}}(M) = \overline{\overline{S}} + \overline{\overline{D}} = \sigma_m \overline{\overline{\delta}} + \sigma_d \overline{\overline{\pi}} = \sigma_m \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \sigma_d \begin{vmatrix} \pi_1(\mu) & 0 & 0 \\ 0 & \pi_2(\mu) & 0 \\ 0 & 0 & \pi_3(\mu) \end{vmatrix}$$

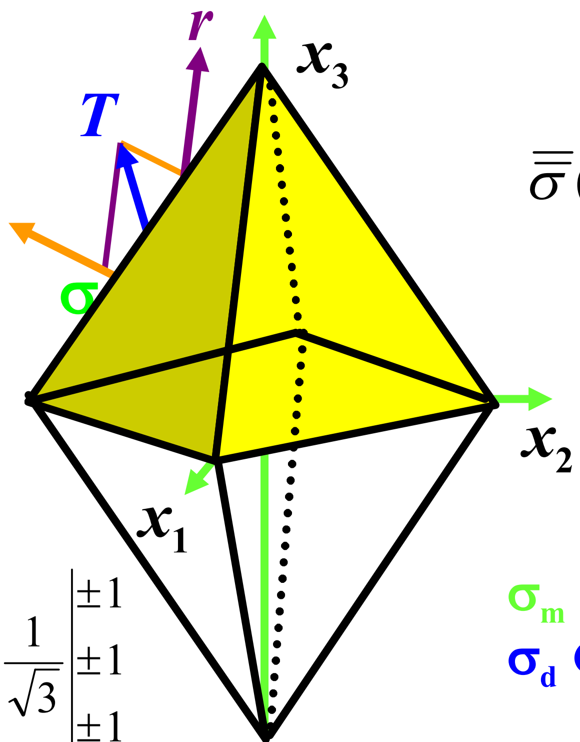
6 Composantes = $\sigma_m + \sigma_d + \mu$ +3 Angles d'Euler

III-2 Représentation des Contraintes

- III-2.1 Contraintes Octaédriques
- III-2.2 Espace des Contraintes
- III-2.3 Critères de Plasticité et de Rupture
- III-2.4 Ellipsoïde des Contraintes
- III-2.5 Cercle de Mohr Principal
- III-2.6 Cercles de Mohr
- III-2.7 Cisaillement Simple

III-2.1 Représentation des Contraintes :

Contraintes Octaédriques



$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{vmatrix} \pm 1 \\ \pm 1 \\ \pm 1 \end{vmatrix}$$

$$\overline{\overline{\sigma}}(M) = \overline{\overline{S}} + \overline{\overline{D}} = \sigma_m \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{D_1} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{D_2} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{D_3} \end{vmatrix}$$

Sphérique *S* Tr(*S*)= Tr(σ) **Déviateur *D* Tr(*D*)= 0**

$$\sigma_m = \frac{1}{3}\mathrm{Tr}(\overline{\overline{S}}) \qquad \sigma_d^2 = \frac{1}{3}\mathrm{Tr}(\overline{\overline{D}}^2)$$

σ_m Contrainte Normale Moyenne (Traction ou Compression)

σ_d Contrainte Déviatorique Moyenne (Cisaillement)

$$\sigma_{nn} = \vec{n} \bullet \vec{T} = \vec{n}\overline{\overline{S}}\vec{n} + \vec{n}\overline{\overline{D}}\vec{n} = \frac{1}{3}\mathrm{Tr}(\overline{\overline{S}}) + \cancel{\frac{1}{3}\mathrm{Tr}(\overline{\overline{D}})} = \sigma_m$$

$\boxed{\sigma_{nn} = \sigma_m}$

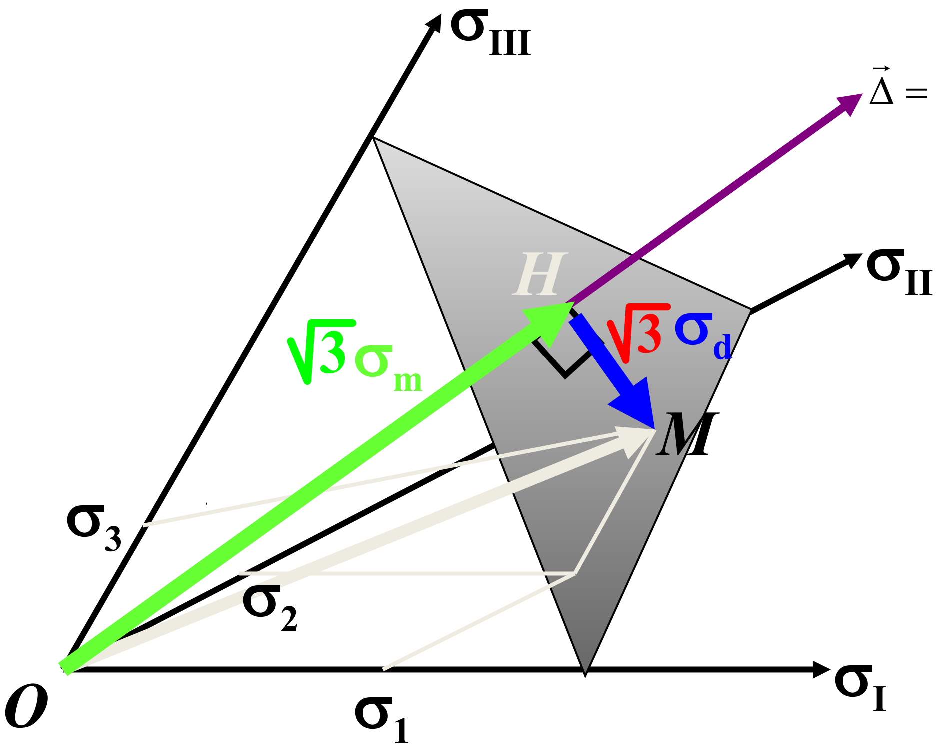
$$\sigma_{nr}^2 = \vec{T} \bullet \vec{T} - \sigma_{nn}^2 = \vec{n}(\overline{\overline{S}} + \overline{\overline{D}})^2 \vec{n} - \sigma_m^2 = \vec{n}(\overline{\overline{S}}^2)\vec{n} + 2\vec{n}(\overline{\overline{S}}\overline{\overline{D}})\vec{n} + \vec{n}(\overline{\overline{D}}^2)\vec{n} - \sigma_m^2$$

$$= \cancel{\frac{1}{3}\mathrm{Tr}(\overline{\overline{S}}^2)} + \cancel{2\sigma_m \mathrm{Tr}(\overline{\overline{D}})} + \frac{1}{3}\mathrm{Tr}(\overline{\overline{D}}^2) - \cancel{\sigma_m^2} = \sigma_d^2$$

$\boxed{\sigma_{nr} = \sigma_d}$

III-2.2 Représentation des Contraintes :

Espace des Contraintes



$$\vec{\Delta} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{vmatrix}1\\1\\1\end{vmatrix}$$

$$\vec{OH} \bullet \vec{HM} = 0$$

$$\vec{OM} = \begin{vmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \sigma_3\end{vmatrix}$$

$$=$$

Sphérique

$$\left\|\vec{OH}\right\|^2 = \mathrm{Tr}(\overline{\overline{S}}^{\,2})$$

$$\vec{OH} = \begin{vmatrix}\sigma_m\\ \sigma_m\\ \sigma_m\end{vmatrix}$$

$$+$$

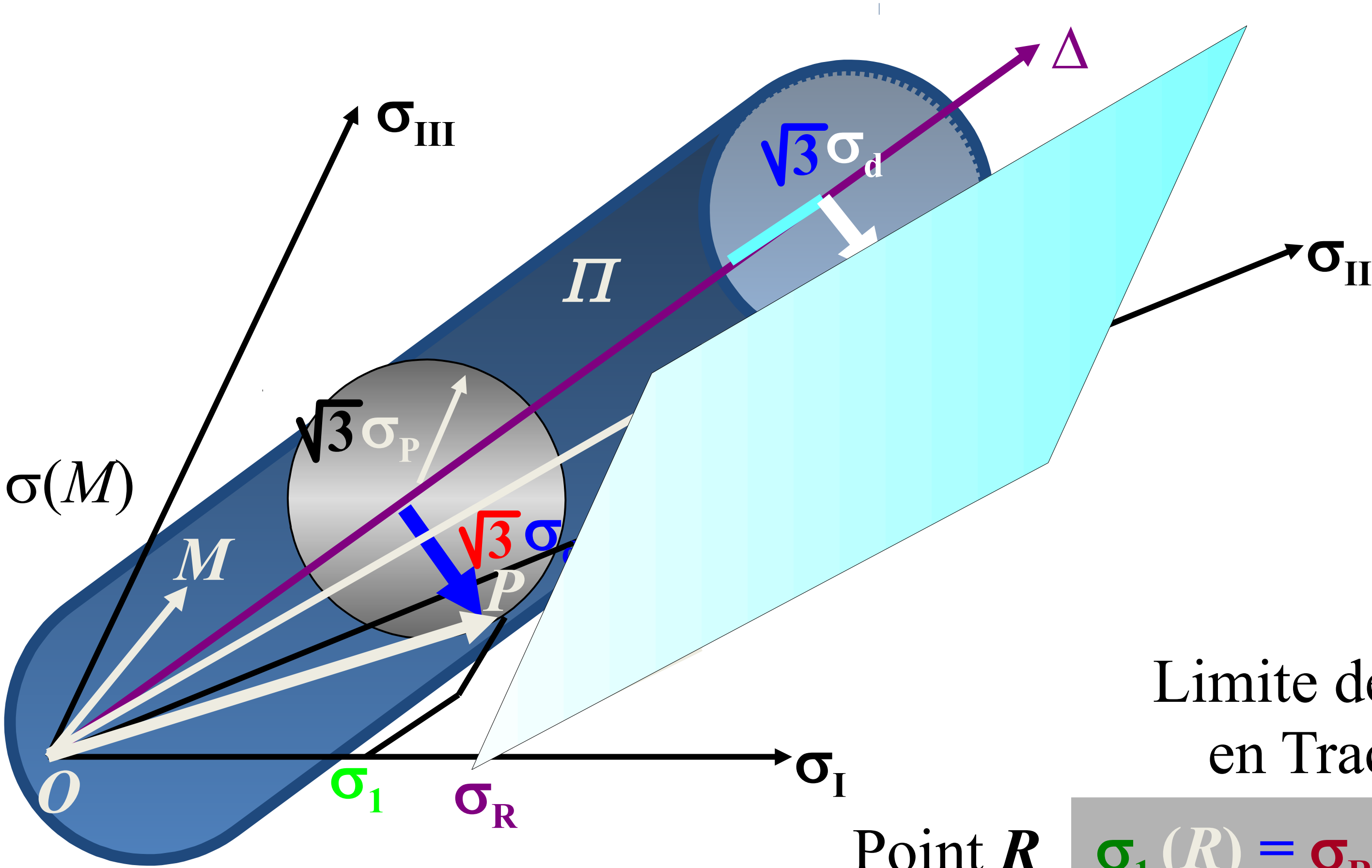
Déviateur

$$\left\|\vec{HM}\right\|^2 = \mathrm{Tr}(\overline{\overline{D}}^{\,2})$$

$$\vec{HM} = \begin{vmatrix}\sigma_1 - \sigma_m\\ \sigma_2 - \sigma_m\\ \sigma_3 - \sigma_m\end{vmatrix}$$

$$\overline{\overline{\sigma}}(M) = \overline{\overline{S}} + \overline{\overline{D}} = \begin{vmatrix}\sigma_1 & 0 & 0\\ 0 & \sigma_2 & 0\\ 0 & 0 & \sigma_3\end{vmatrix}$$

III-2.3 Représentation des Contraintes : Critères de Plasticité et de Rupture



Limite de Rupture σ_R en Traction sur Σ

Point ***R*** $\sigma_1(R) = \sigma_R$ et $\sigma_d(R) < \sigma_P$

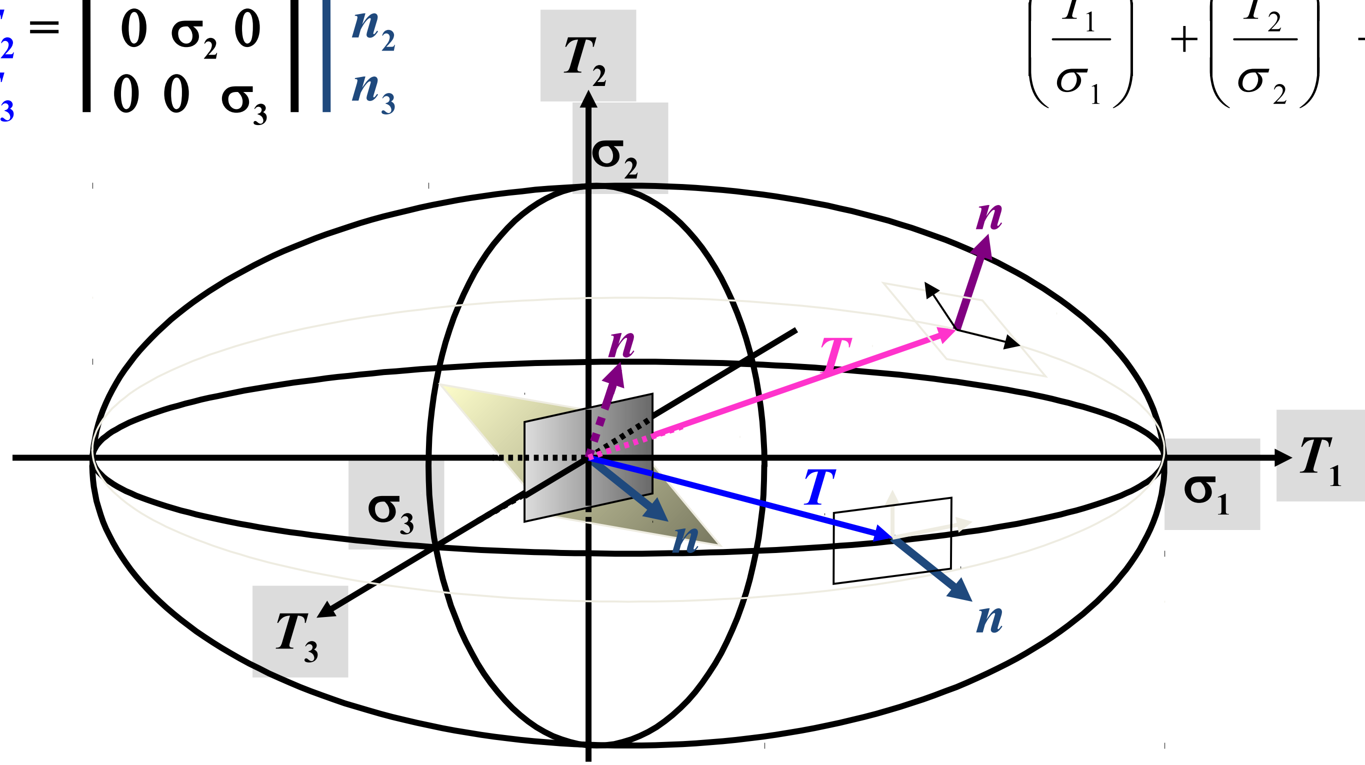
Limite Plastique en Cisaillement σ_P sur Π

Point ***P*** $\sigma_d(P) = \sigma_P$ et $\sigma_1(P) < \sigma_R$

III-2.4 Représentation des Contraintes : Ellipsoïde des Contraintes de LAME

$$\begin{vmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{vmatrix}$$

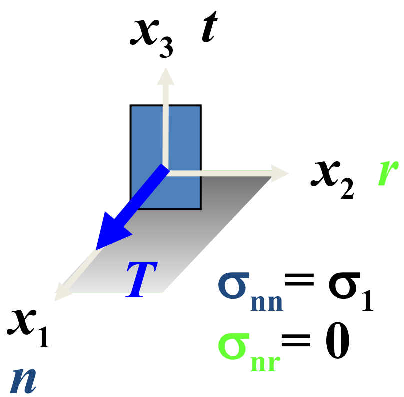
$$\left(\frac{T_1}{\sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{T_2}{\sigma_2}\right)^2 + \left(\frac{T_3}{\sigma_3}\right)^2 = 1$$



Lorsque ***n*** appartient à un plan principal, ***T*** appartient au même plan

III-2.5 Représentation des Contraintes : Cercle de Mohr Principal

Facette de normale $\boldsymbol{x}_1$

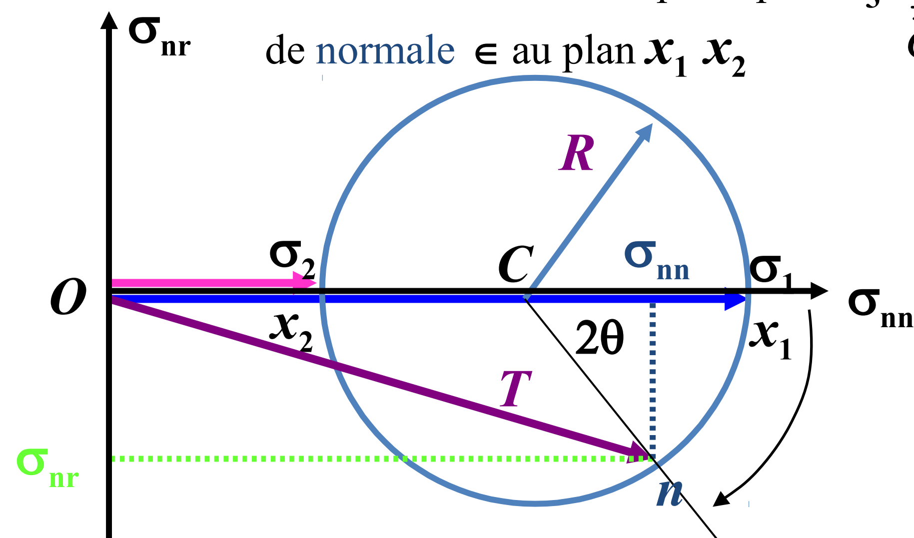


$\sigma_{nn} = \sigma_1$

$\sigma_{nr} = 0$

Facettes contenant la direction principale $\boldsymbol{x}_3$

de normale $\in$ au plan $\boldsymbol{x}_1\ \boldsymbol{x}_2$

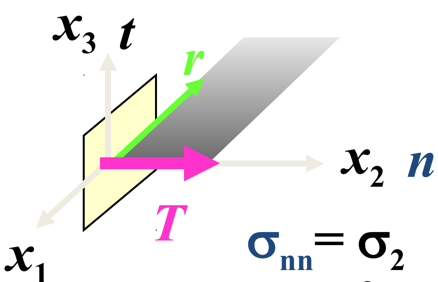


$$\overline{\overline{\sigma}}(M) = \begin{vmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{vmatrix}$$

$$R = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$

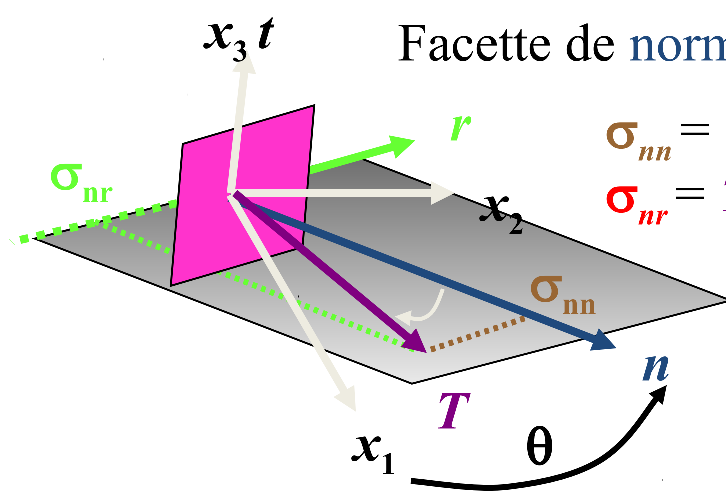
$$OC = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}$$

Facette de normale $\boldsymbol{x}_2$



$\sigma_{nn} = \sigma_2$

$\sigma_{nr} = 0$



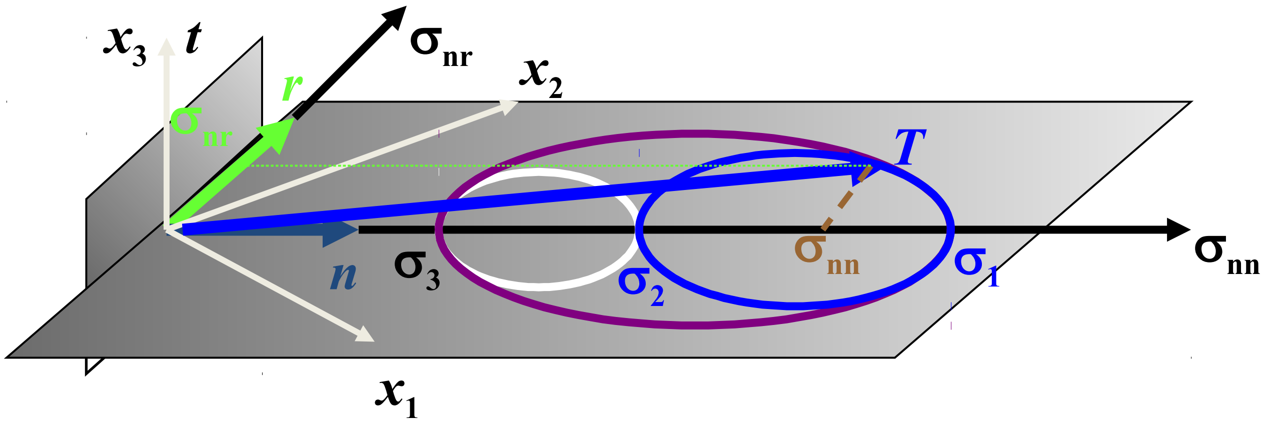
Facette de normale $\boldsymbol{n}$

$$\sigma_{nn} = T \bullet n = n\ \sigma\ n = OC + R\cos 2\theta$$

$$\sigma_{nr} = T \bullet r = n\ \sigma\ r = -R\sin 2\theta$$

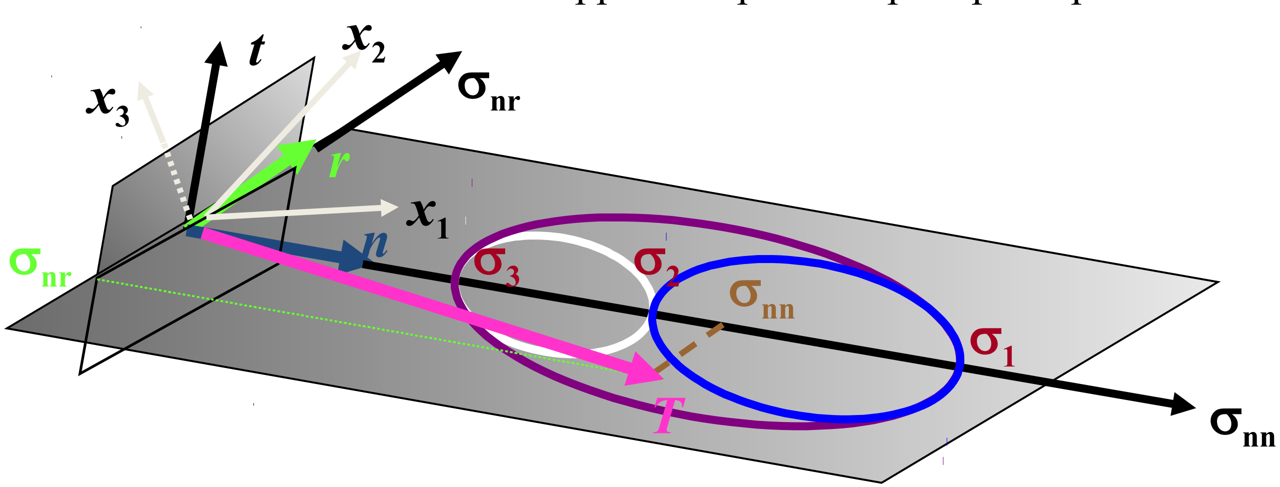
III-2.6 Représentation des Contraintes : Cercles de Mohr

Facette dont la normale $\boldsymbol{n}$ appartient à un plan principal ($\boldsymbol{x_1\,x_2}$)



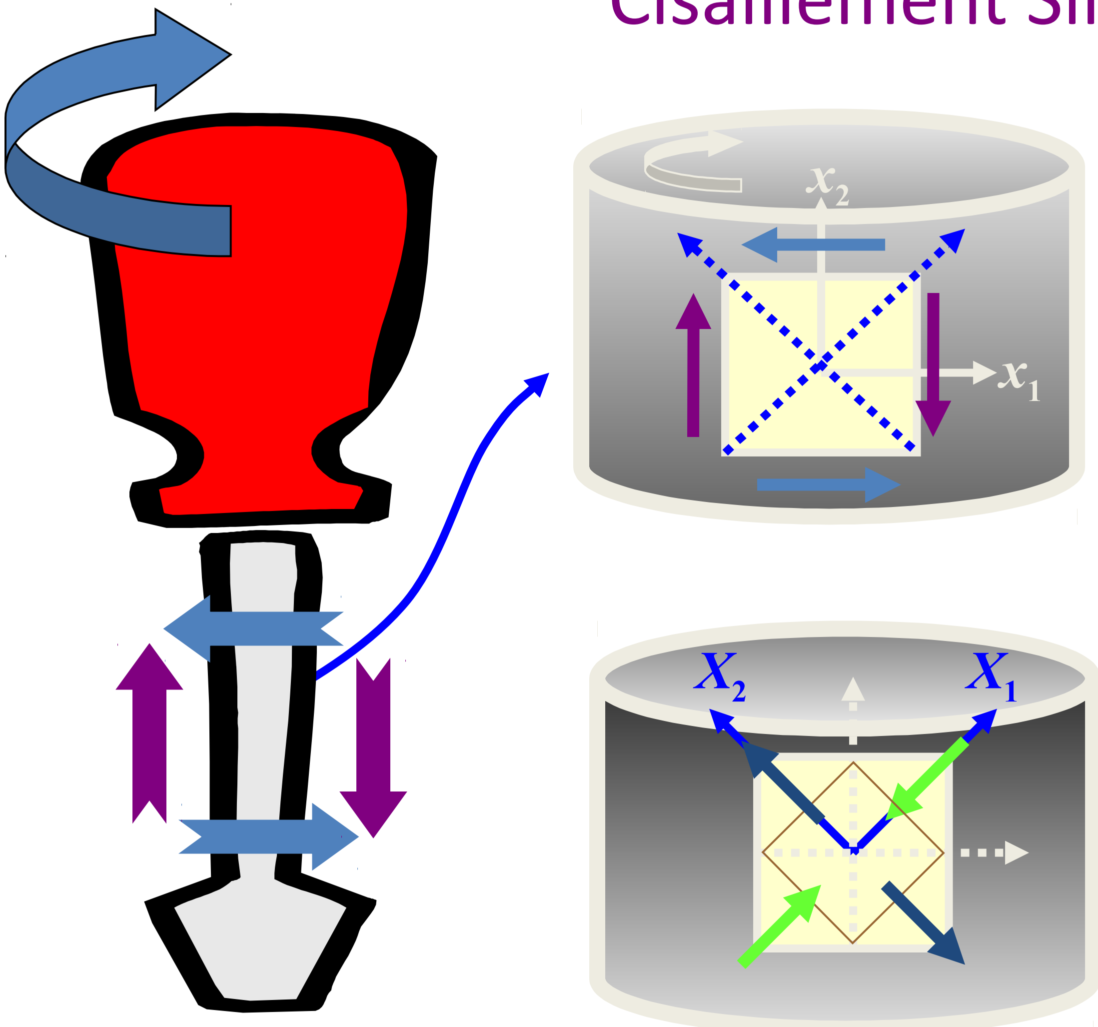
Facette dont la normale $\boldsymbol{n}$ n'appartient pas à un plan principal

$$\overline{\overline{\sigma}}(M) = \begin{vmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{vmatrix}$$

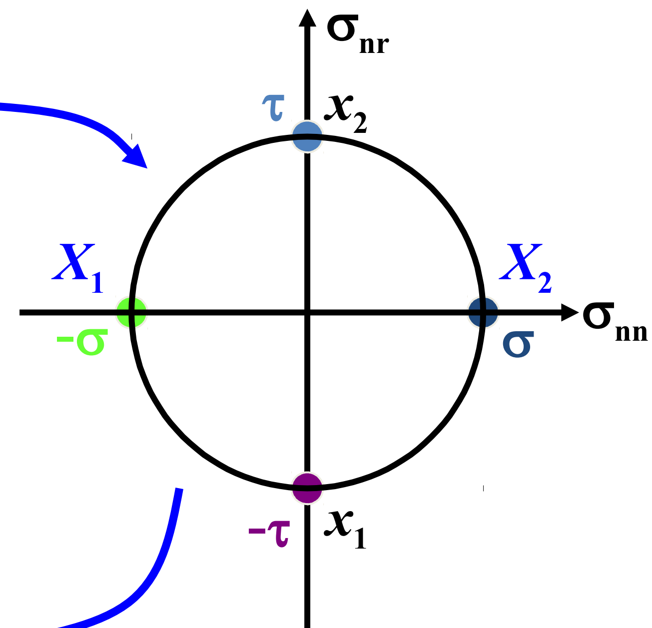


III-2.7 Représentation des Contraintes :

Cisaillement Simple



$$\overline{\overline{\sigma}} = \begin{vmatrix} 0 & -\tau & 0 \\ -\tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$



$$\overline{\overline{\sigma}} = \begin{vmatrix} -\sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

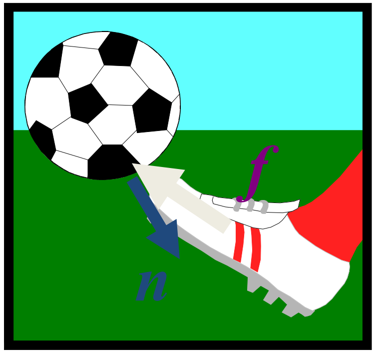
Le cisaillement est maximal sur les facettes orientées à 45° des facettes principales

IV Loi Fondamentale de la Dynamique

- IV-1 Conditions aux Limites
- IV-2 Bilan des Forces : Équilibre Dynamique
- IV-2 Équation de l'Équilibre Dynamique
- IV-3 Exemple : Prisme pesant
- IV-4 Application : Optimisation en Compression

IV-1 Loi Fondamentale de la Dynamique :

Conditions aux Limites

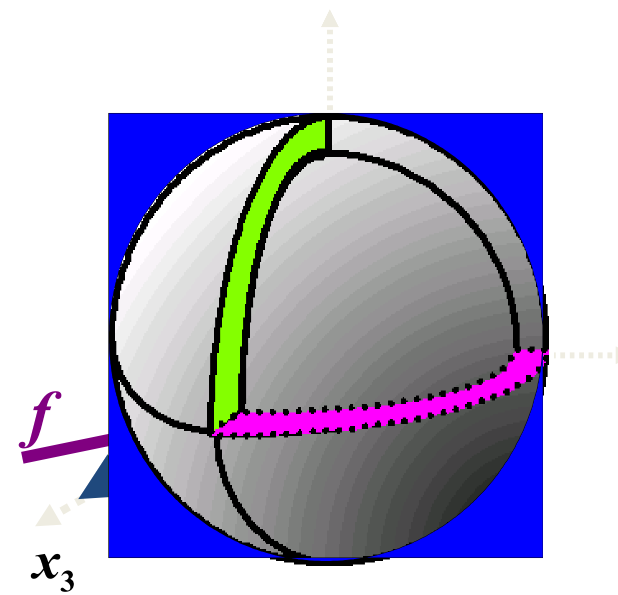


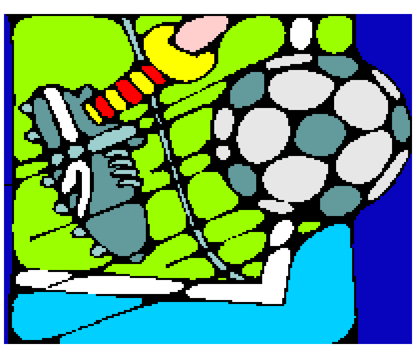
Au Point ***M*** de la Surface :

$$\overline{\overline{\sigma}}(M)\vec{n} = \vec{f}(M)$$

- ***n*** Normale Extérieure
- ***f*** Force Extérieure Appliquée **(/ unité de surface)**

$$\begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{vmatrix} \quad => \quad \begin{vmatrix} \boxed{\sigma_{11} \quad \sigma_{12}} & f_1 \\ \boxed{\sigma_{21} \quad \sigma_{22}} & f_2 \\ f_1 \quad f_2 & f_3 \end{vmatrix}$$



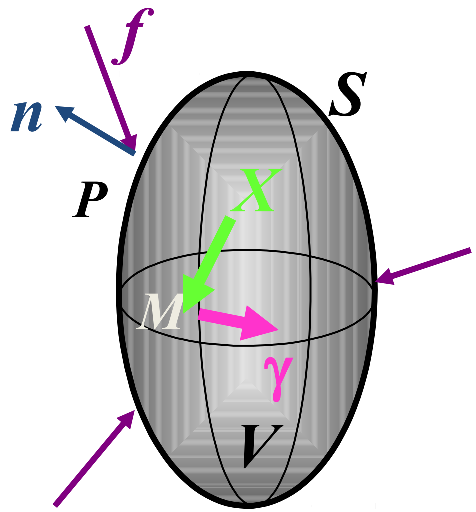


$$f = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \quad => \quad \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

La normale ***n*** à une surface ***libre de charge***
est ***direction principale*** à valeur propre **= 0**

IV-2 Loi Fondamentale de la Dynamique :

Bilan des Forces : Équilibre Dynamique



Au Point ***P*** en Surface :

- ***n*** Normale Extérieure
- ***f*** Force Extérieure Appliquée (**/ unité de surface**)

$$\overline{\overline{\sigma}}(P)\vec{n} = \vec{f}(P)$$

Au Point ***M*** en Volume :

- γ Accélération **(force / unité de masse)**
- ***X*** Force Extérieure Appliquée **(/ unité de masse)**

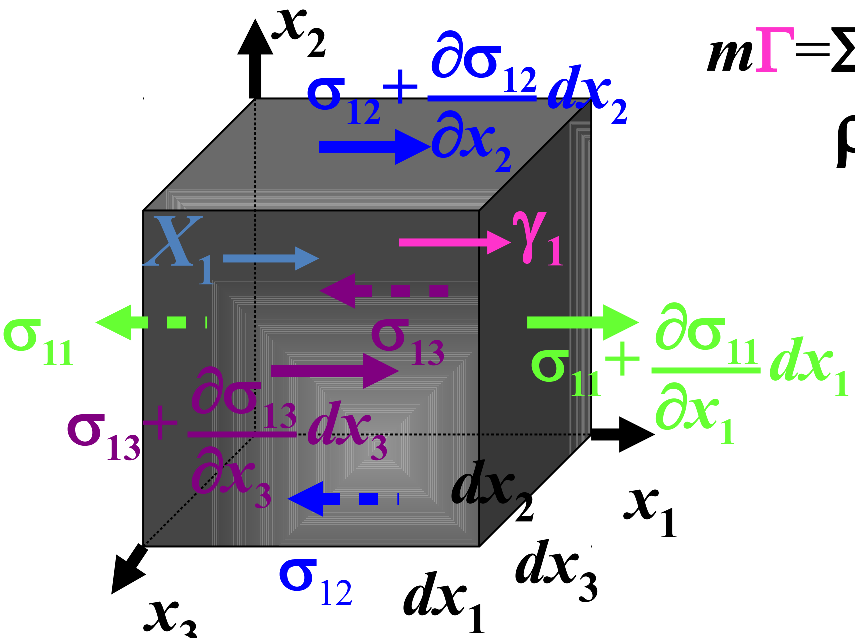
$$\boldsymbol{m\Gamma=\Sigma F} \quad \Rightarrow \quad \iiint_V \rho\vec{\gamma}\,dV = \iiint_V \rho\vec{X}\,dV + \iint_S \vec{f}\,dS$$

$$\iint_S \vec{f}\,dS = \iint_S \overline{\overline{\sigma}}\vec{n}\,dS = \iiint_V \mathrm{Div}_{\mathrm{D}}\overline{\overline{\sigma}}\,dV$$

Conditions aux Limites **Théorème de la Divergence**

$$\mathbf{Div_D}\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\rho X} = \boldsymbol{\rho\gamma}$$

IV-3 Loi Fondamentale de la Dynamique : Équilibre Dynamique : $\mathrm{Div}_D\sigma$



$m\Gamma=\Sigma F$ ***projection des Forces sur l'axe*** x_1

$$\rho\gamma_1\, dx_1\, dx_2\, dx_3 = \rho X_1\, dx_1\, dx_2\, dx_3$$
$$+\left(\sigma_{11}+\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1}dx_1 - \sigma_{11}\right) dx_2\, dx_3$$
$$+\left(\sigma_{12}+\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_2}dx_2 - \sigma_{12}\right) dx_1\, dx_3$$
$$+\left(\sigma_{13}+\frac{\partial\sigma_{13}}{\partial x_3}dx_3 - \sigma_{13}\right) dx_1\, dx_2$$

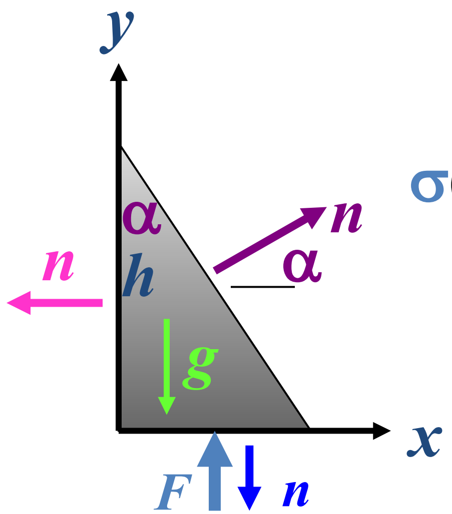
$$\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_2}+\frac{\partial\sigma_{13}}{\partial x_3}+\rho X_1 = \rho\gamma_1$$

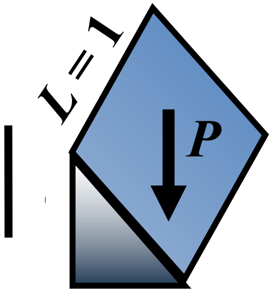
$$\mathrm{Div}_D\sigma = \left|\begin{array}{l} \dfrac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1}+\dfrac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_2}+\dfrac{\partial\sigma_{13}}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial\sigma_{21}}{\partial x_1}+\dfrac{\partial\sigma_{22}}{\partial x_2}+\dfrac{\partial\sigma_{23}}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial\sigma_{31}}{\partial x_1}+\dfrac{\partial\sigma_{32}}{\partial x_2}+\dfrac{\partial\sigma_{33}}{\partial x_3} \end{array}\right.$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \mathrm{Div}_D\sigma+\rho X=\rho\gamma \\ \dfrac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j}+\rho X_i=\rho\gamma_i \end{array}}$$

IV-4 Loi Fondamentale de la Dynamique :

Exemple : Prisme pesant





$$\sigma(x,y) = \begin{vmatrix} ax+by+r & kx+ly+t \\ kx+ly+t & cx+dy+s \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} ax & kx \\ kx & cx+dy+s \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & kx \\ kx & cx+dy+s \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\rho g(h-x\,\mathrm{cotg}\alpha-y) \end{vmatrix}$$

C.L. en $x=0$: $\sigma(0,y)n=0 \quad \forall y$

$$\begin{vmatrix} by+r & ly+t \\ ly+t & dy+s \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -1 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} b = l = 0 \\ r = t = 0 \end{matrix}$$

Équilibre Statique : $\mathrm{Div}_D\sigma + \rho X = 0$

$$\begin{vmatrix} a \\ k+d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ \rho g \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} a = 0 \\ k+d = \rho g \end{matrix}$$

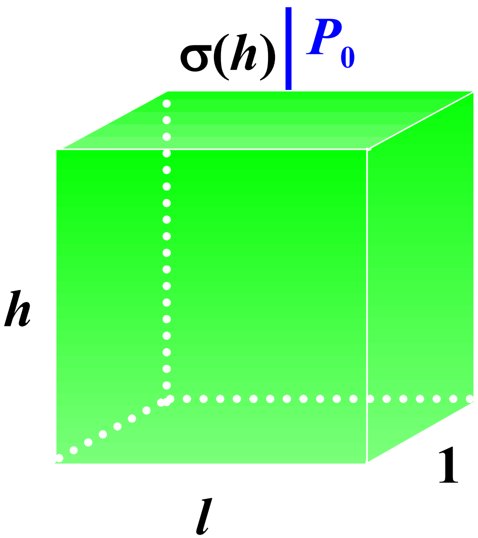
C.L. en $y=h-x\,\mathrm{cotg}\alpha$: $\sigma(x,y)n=0$

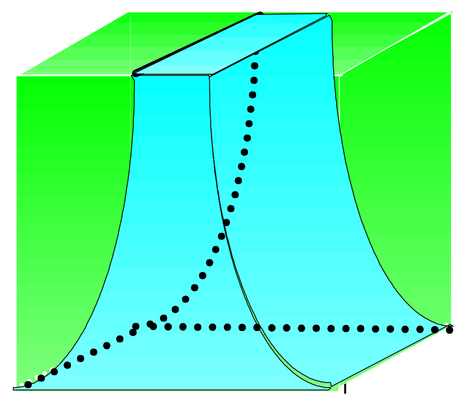
$$\begin{vmatrix} 0 & kx \\ kx & cx+dy+s \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} k = 0,\ d = \rho g \\ s = -\rho g h \\ c = \rho g\,\mathrm{cotg}\alpha \end{matrix}$$

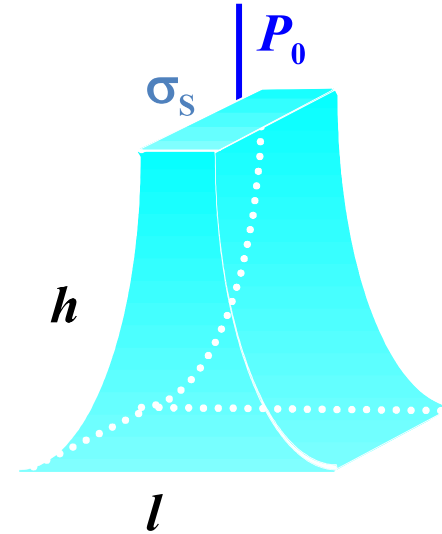
C.L. en $y=0$: $F = \int_0^{h\mathrm{tg}\alpha} \sigma(x,0)n\,dx = \rho g \int_0^{h\mathrm{tg}\alpha} \begin{vmatrix} 0 \\ (h-x\,\mathrm{cotg}\alpha) \end{vmatrix} dx = \begin{vmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}\rho g\, h\, h\mathrm{tg}\alpha \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ P \end{vmatrix}$

IV-5 Loi Fondamentale de la Dynamique :
Application : Optimisation en Compression

Contrainte maximale admissible σ_S







$$\sigma(h) = \frac{P_0}{l} < \sigma_S$$

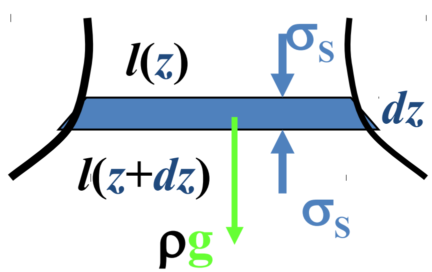
$$P = \rho g h l$$

$$\sigma(0) = \frac{P_0 + P}{l} = \sigma_S$$

$$\sigma(0) = \sigma(h) + \rho g h$$

Profil évolutif

Équilibre de la tranche dz



$$\sigma_S\, l(z) + \rho g\, l(z)dz = \sigma_S\, l(z+dz)$$

$$\sigma(h) = \sigma(0) = \sigma_S$$

$$\boxed{l(z) = l\, e^{-\frac{\rho g}{\sigma_S} z}}$$

- V-1.1 Robert Hooke
- V-1.2 Translation, Rotation et Déformation
- V-1.3 Conservation de la Masse
- V-1.4 Champ de déplacement
- V-1.5 Exemple : le Glissement Simple
- V-1.6 Les Grandes Déformations
- V-1.7 Petites Déformations et Superposition
- V-1.8 Séparer Rotation et Déformation
- V-1.9 Continuité et Compatibilité des Déformations

V Déformations

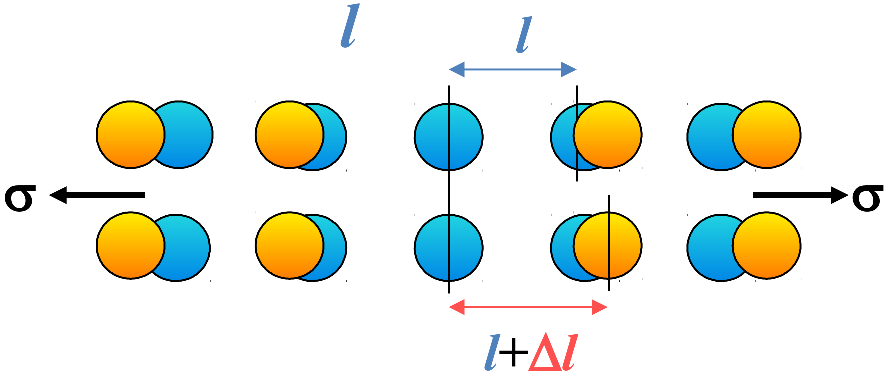
- V-1 Tenseur des Déformations
- V-2 Représentation des Déformations

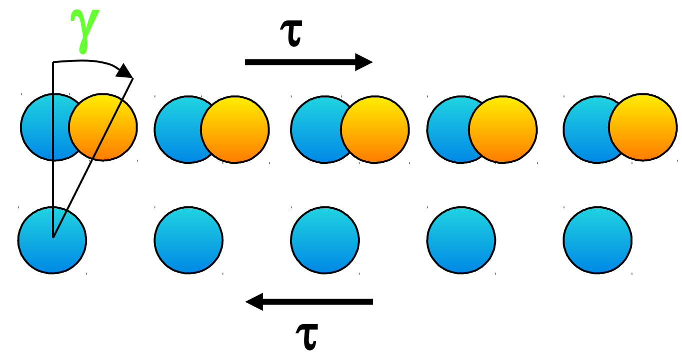
Robert Hooke

Pour supporter un chargement un milieu matériel doit se déformer

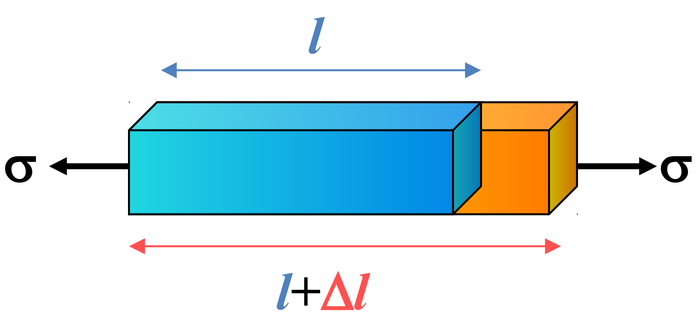
Extension $\frac{\Delta l}{l}$

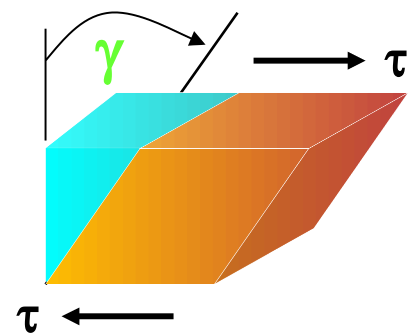
Glissement γ





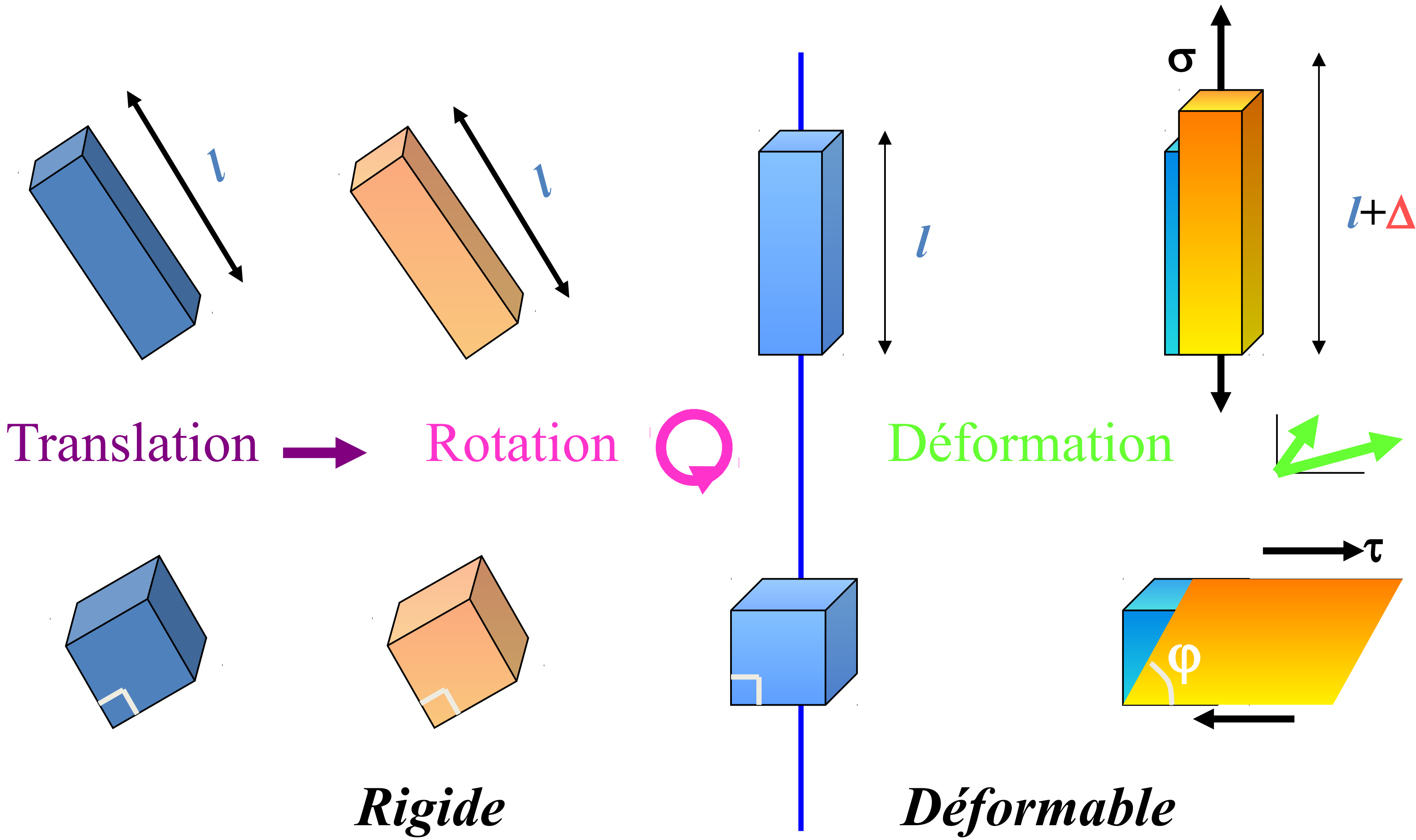
A l'échelle microscopique





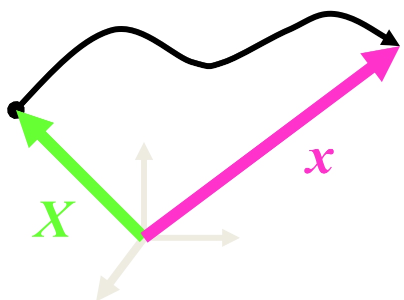
A l'échelle macroscopique

Translation, Rotation et Déformation



Seule la Déformation modifie les Longueurs et les Angles

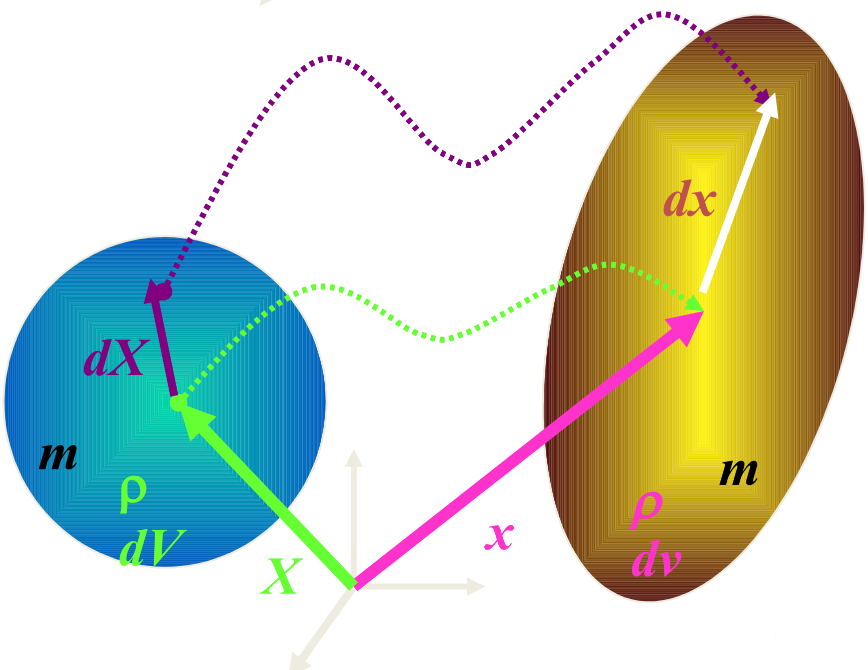
Conservation de la Masse
le tenseur gradient



$$\vec{x} = \vec{\mathcal{F}}(\vec{X})$$

$$\vec{dx} = \overline{\overline{\mathrm{Grad}}}\,\vec{\mathcal{F}}(\vec{X})\,\vec{dX} = \bar{\bar{\gamma}}\,\vec{dX}$$

$$\bar{\bar{\gamma}} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial X_1} & \dfrac{\partial x_1}{\partial X_2} & \dfrac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \dfrac{\partial x_2}{\partial X_1} & \dfrac{\partial x_2}{\partial X_2} & \dfrac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \dfrac{\partial x_3}{\partial X_1} & \dfrac{\partial x_3}{\partial X_2} & \dfrac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{vmatrix}$$



$$\left|\bar{\bar{\gamma}}\right| = \frac{dv}{dV}$$

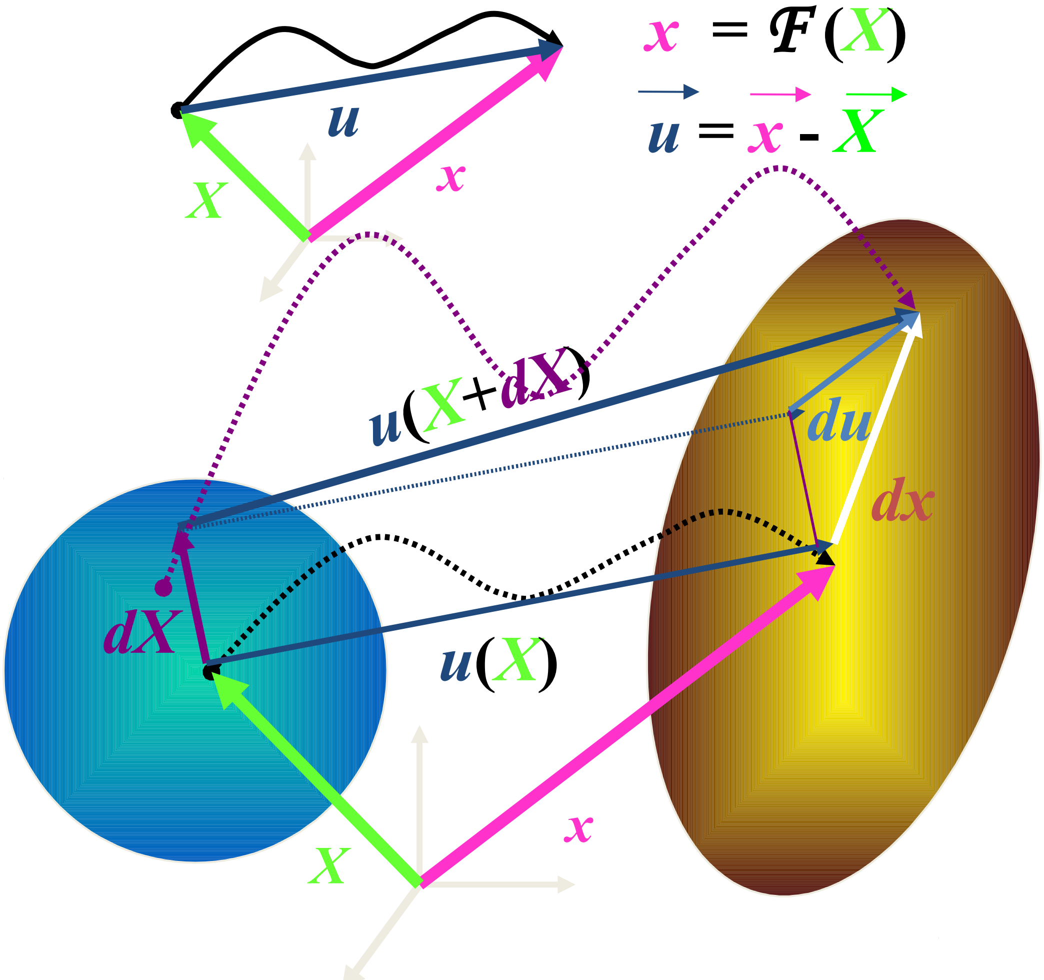
$$m = \rho dV = \rho dv$$

$$\boxed{\left|\bar{\bar{\gamma}}\right| \rho = \rho}$$

Champ de Déplacement

$$\vec{x} = \vec{\mathcal{F}}(\vec{X})$$

$$\vec{u} = \vec{x} - \vec{X}$$



$$\vec{dx} = \overline{\overline{\gamma}}\,\vec{dX}$$

$$\vec{du} = (\overline{\overline{\gamma}} - \overline{\overline{\delta}})\,\vec{dX} = \overline{\overline{G}}(\vec{X})\,\vec{dX}$$

$$\overline{\overline{G}} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial X_1} & \frac{\partial u_1}{\partial X_2} & \frac{\partial u_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial X_1} & \frac{\partial u_2}{\partial X_2} & \frac{\partial u_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial X_1} & \frac{\partial u_3}{\partial X_2} & \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \end{vmatrix}$$

Tenseur Gradient de Déplacement

$$\vec{u}(\vec{X}+\vec{dX}) = \vec{u}(\vec{X}) + \overline{\overline{G}}(\vec{X})\,\vec{dX}$$

Translation + Rotation
Déformation

Exemple : Glissement Simple

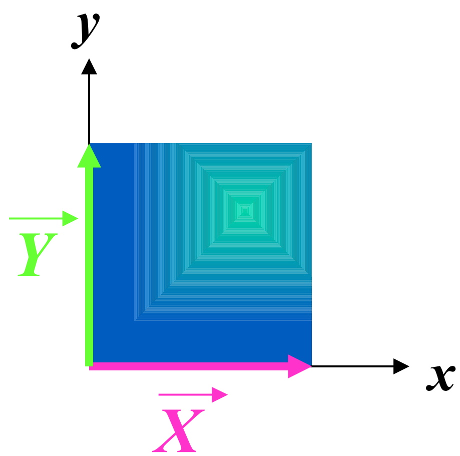
$$\overline{\overline{\gamma}} = \begin{vmatrix} 1 & \gamma & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \overline{\overline{\delta}} + \overline{\overline{G}} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

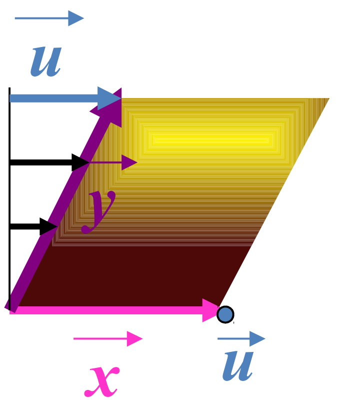
$$\overrightarrow{x} = \overline{\overline{\gamma}}\,\overrightarrow{X}$$

$$\overrightarrow{u} = \overline{\overline{G}}\,\overrightarrow{X}$$

$$\overrightarrow{X} = \begin{vmatrix} X \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \quad \overrightarrow{x} = \begin{vmatrix} X \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \quad \overrightarrow{u} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

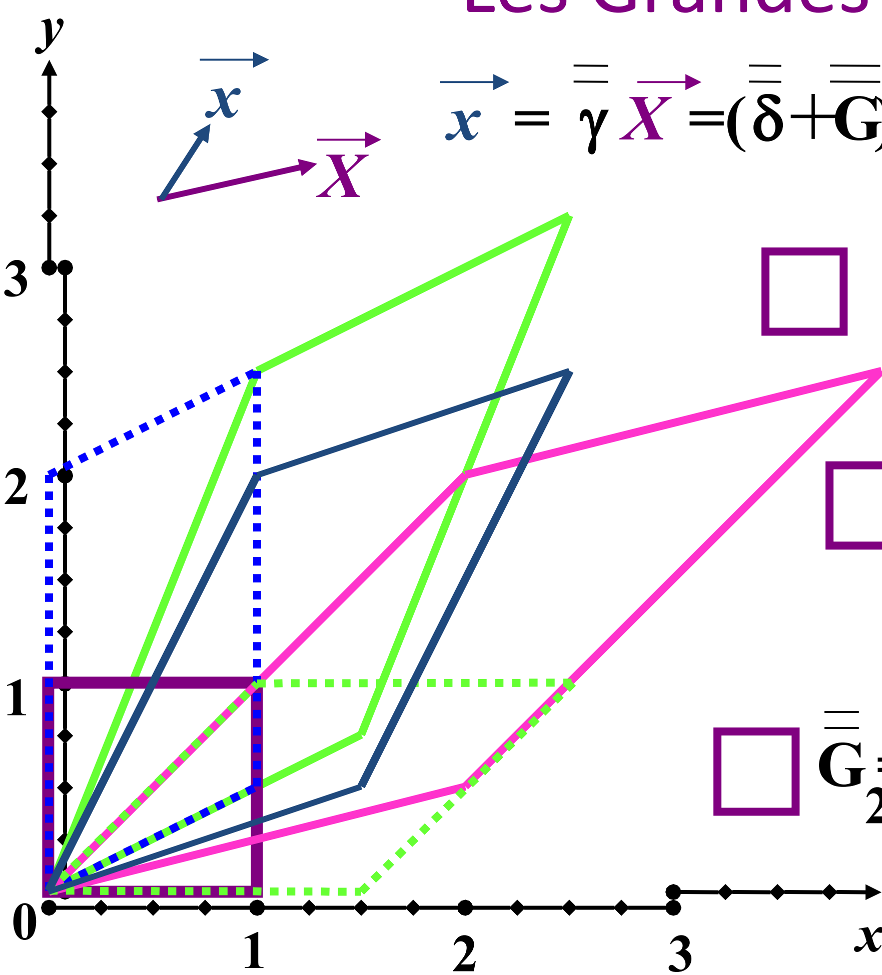
$$\overrightarrow{Y} = \begin{vmatrix} 0 \\ Y \\ 0 \end{vmatrix} \quad \overrightarrow{y} = \begin{vmatrix} \gamma Y \\ Y \\ 0 \end{vmatrix} \quad \overrightarrow{u} = \begin{vmatrix} \gamma Y \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$





Les Grandes Déformations

$$\vec{x} = \overline{\overline{\gamma}}\,\vec{X} = (\overline{\overline{\delta}} + \overline{\overline{G}})\,\vec{X}$$



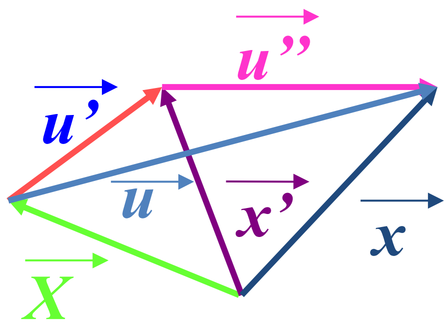
$$\overline{\overline{G}}_1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ \tfrac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} \qquad \overline{\overline{G}}_2 = \begin{vmatrix} \tfrac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\overline{\overline{G}} = \overline{\overline{G}}_1 + \overline{\overline{G}}_2 = \begin{vmatrix} \tfrac{1}{2} & 1 \\ \tfrac{1}{2} & 1 \end{vmatrix}$$

$$\overline{\overline{G}}_2 = \begin{vmatrix} \tfrac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \qquad \overline{\overline{G}}_1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ \tfrac{1}{2} & 1 \end{vmatrix}$$

Les Grandes Déformations ne sont pas Additives

Petites Déformations et Superposition



$$\vec{x'} = \bar{\bar{\gamma}}'\vec{X} = (\bar{\bar{\delta}} + \bar{\bar{G}}')\vec{X} \qquad \vec{u'} = \bar{\bar{G}}'\vec{X}$$

$$\vec{x} = \bar{\bar{\gamma}}''\vec{x'} = (\bar{\bar{\delta}} + \bar{\bar{G}}'')\vec{x'} \qquad \vec{u''} = \bar{\bar{G}}''\vec{x'}$$

$$\vec{x} = \bar{\bar{\gamma}}\vec{X} = (\bar{\bar{\delta}} + \bar{\bar{G}})\vec{X} \qquad \vec{u} = \bar{\bar{G}}\vec{X}$$

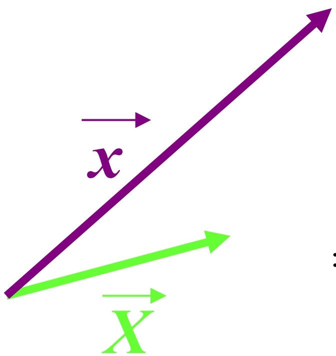
$$\vec{x} = \bar{\bar{\gamma}}''\vec{x'} = (\bar{\bar{\delta}} + \bar{\bar{G}}'')\vec{x'} = (\bar{\bar{\delta}} + \bar{\bar{G}}'')(\bar{\bar{\delta}} + \bar{\bar{G}}')\vec{X} = \vec{X} + (\bar{\bar{G}}'' + \bar{\bar{G}}' + \bar{\bar{G}}''\bar{\bar{G}}')\vec{X}$$

$$\Rightarrow \quad \bar{\bar{G}} = \bar{\bar{G}}'' + \bar{\bar{G}}' + \bar{\bar{G}}''\bar{\bar{G}}'$$

$$\left|G_{ij}\right| < 1\% \quad \Rightarrow \quad \boxed{\bar{\bar{G}} \approx \bar{\bar{G}}'' + \bar{\bar{G}}'}$$

Principe de Superposition : les Petites Déformations sont Additives

Séparer Rotation et Déformation



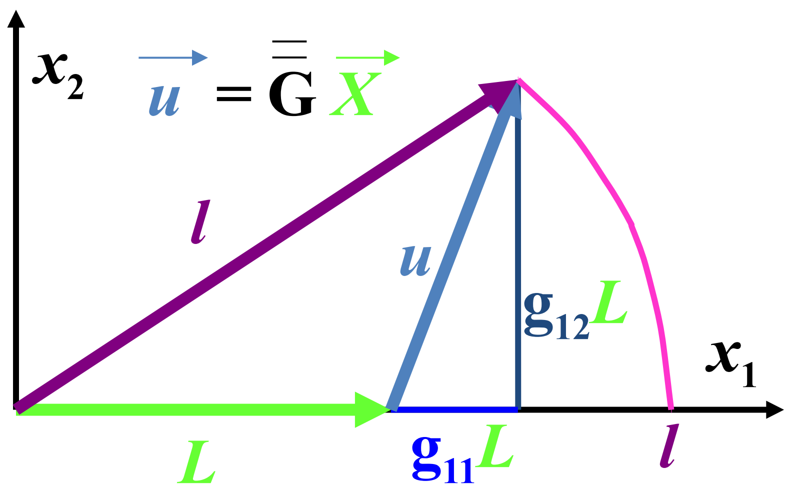
$$\vec{x} = \bar{\bar{\gamma}}\,\vec{X} = (\bar{\bar{\delta}}+\bar{\bar{G}})\,\vec{X}$$

$$\vec{x}\bullet\vec{x} = \vec{X}\,(\bar{\bar{\delta}}+{}^t\bar{\bar{G}})(\bar{\bar{\delta}}+\bar{\bar{G}})\,\vec{X}$$

$$= \vec{X}\bullet\vec{X} + \vec{X}\,({}^t\bar{\bar{G}}+\bar{\bar{G}})\,\vec{X} + \cancel{\vec{X}\,{}^t\bar{\bar{G}}\,\bar{\bar{G}}\,\vec{X}}$$

$$\bar{\bar{G}} = \bar{\bar{\varepsilon}} + \bar{\bar{\omega}} \quad ; \quad \bar{\bar{G}} = \underbrace{\frac{1}{2}({}^t\bar{\bar{G}}+\bar{\bar{G}})}_{} + \underbrace{\frac{1}{2}({}^t\bar{\bar{G}}-\bar{\bar{G}})}_{}$$

$$\vec{u} = \bar{\bar{G}}\,\vec{X}$$



$$l^2 = L^2(1+g_{11})^2+(g_{12}L)^2$$

$$l = L\sqrt{\{(1+g_{11})^2+g_{12}^{\,2}\}}$$

$$l \approx L(1+g_{11})$$

$$\overrightarrow{U}(\overrightarrow{X}+\overrightarrow{dX})=\overrightarrow{U}(\overrightarrow{X})+d\overrightarrow{U}=\underbrace{\overrightarrow{U}(\overrightarrow{X})}_{translation}+\underbrace{\overline{\overline{G}}.\overrightarrow{dX}}_{rotation\ et\ déformation}$$

$$\overline{\overline{G}}=\underbrace{\frac{1}{2}({}^{t}\overline{\overline{G}}+\overline{\overline{G}})}_{tenseur\ symetrique(déformation\ pure:\ \overline{\overline{\varepsilon}})}+\underbrace{\frac{1}{2}({}^{t}\overline{\overline{G}}-\overline{\overline{G}})}_{tenseur\ antisymetrique(rotation:\ \overline{\overline{\omega}})}$$

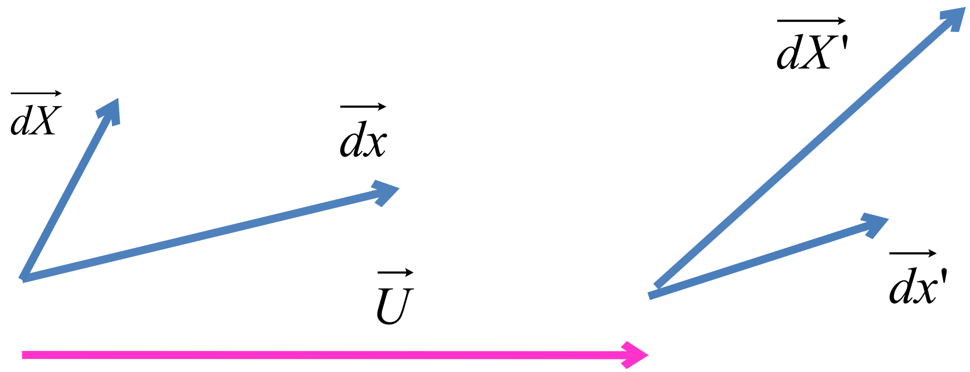
$$\overline{\overline{G}}=\overline{\overline{\varepsilon}}+\overline{\overline{\omega}}$$

$$\overline{\overline{\varepsilon}}=\frac{1}{2}({}^{t}\overline{\overline{G}}+\overline{\overline{G}})\quad et\quad \overline{\overline{\omega}}=\frac{1}{2}({}^{t}\overline{\overline{G}}-\overline{\overline{G}})$$

Dans la suite de ce cours, nous nous interesserons qu'au tenseur des déformations pures : $\overline{\overline{\varepsilon}}$

Etude des déformations

Comme la notion de contrainte, la notion de déformation ne peut être décrite par la donnée d'un simple vecteur.
Pour la définir, il faut se donner un point et une direction.
C'est une notion tensorielle. L'état de déformation en un point,
tout comme l'état de contrainte, se définit alors par un tenseur. Ce tenseur est symétrique d'ordre 2 et qui sera représentée par une matrice symétrique d'ordre 3.



$$\overrightarrow{dx} = \overline{\overline{\gamma}}\,\overrightarrow{dX}$$

$$\overrightarrow{dx'} = \overline{\overline{\gamma}}\,\overrightarrow{dX'}$$

$$^{t}\overrightarrow{dx}.\overrightarrow{dx'} = {}^{t}(\overline{\overline{\gamma}}\,\overrightarrow{dX}).(\overline{\overline{\gamma}}\,\overrightarrow{dX'}) = {}^{t}\overrightarrow{dX}({}^{t}\overline{\overline{\gamma}}.\overline{\overline{\gamma}})\overrightarrow{dX'} = {}^{t}\overrightarrow{dX}.\overline{\overline{C}}.\overrightarrow{dX'}$$

$$avec : \overline{\overline{C}} = {}^{t}\overline{\overline{\gamma}}.\overline{\overline{\gamma}}$$

$$\overrightarrow{\mathbf{dx}} = \overline{\overline{\boldsymbol{\gamma}}}\,\overrightarrow{\mathbf{dX}}$$

$$\overrightarrow{\mathbf{dx'}} = \overline{\overline{\boldsymbol{\gamma}}}\,\overrightarrow{\mathbf{dX'}}$$

Etude des déformations

$\bar{\bar{C}}$ est un tenseur symétrique comme on peut le vérifier facilement en le comparant à sa transposée.
On l'appelle tenseur de Cauchy Green.
On peut l'exprimer en fonction du tens eur gradient déplacement:

$$\bar{\bar{C}} = {}^t\bar{\bar{\gamma}}.\bar{\bar{\gamma}}$$

$$\bar{\bar{C}} = {}^t\bar{\bar{\gamma}}.\bar{\bar{\gamma}} = {}^t(\bar{\bar{G}} + \bar{\bar{\delta}}).(\bar{\bar{G}} + \bar{\bar{\delta}}) = \left({}^t\bar{\bar{G}} + \bar{\bar{\delta}}\right).(\bar{\bar{G}} + \bar{\bar{\delta}}) = \bar{\bar{\delta}} + \bar{\bar{G}} + {}^t\bar{\bar{G}} + \bar{\bar{G}}.{}^t\bar{\bar{G}}$$

$${}^t\overrightarrow{dx}.\overrightarrow{dx'} - {}^t\overrightarrow{dX}.\overrightarrow{dX'} = {}^t\overrightarrow{dX}.\overline{\overline{C}}.\overrightarrow{dX'} - {}^t\overrightarrow{dX}.\overrightarrow{dX'} = {}^t\overrightarrow{dX}.(\overline{\overline{C}} - \overline{\overline{\delta}}).\overrightarrow{dX'}$$

$${}^t\overrightarrow{dx}.\overrightarrow{dx'} - {}^t\overrightarrow{dX}.\overrightarrow{dX'} = {}^t\overrightarrow{dX}.({}^t\overline{\overline{G}} + \overline{\overline{G}} + {}^t\overline{\overline{G}}.\overline{\overline{G}}).\overrightarrow{dX'}$$

Etude des déformations

$$E = \frac{1}{2}\left(\bar{\bar{G}} + {}^t\bar{\bar{G}} + \bar{\bar{G}}.{}^t\bar{\bar{G}}\right) : \textit{Tenseur de Green Lagrange}$$

$${}^t\overrightarrow{dx}.\overrightarrow{dx'} - {}^t\overrightarrow{dX}.\overrightarrow{dX'} = {}^t\overrightarrow{dX}.\left(\overline{\overline{{}^tG}} + \overline{\overline{G}} + \overline{\overline{{}^tG}}.\overline{\overline{G}}\right).\overrightarrow{dX'} = 2.{}^t\overrightarrow{dX}.\overline{\overline{E}}.\overrightarrow{dX'}$$

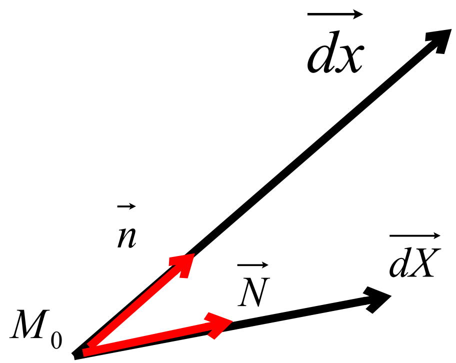
$si\ \left|G_{ij}\right| < 1\% :$ $\quad \bar{\bar{E}} \approx \frac{1}{2}\left(\bar{\bar{G}} + {}^t\bar{\bar{G}}\right)$: tenseur des déformations pures

$$\bar{\bar{E}} \approx \frac{1}{2}\left(\bar{\bar{G}} + {}^t\bar{\bar{G}}\right) = \bar{\bar{\varepsilon}} \qquad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(G_{ij} + G_{ji}\right)$$

Etude des déformations

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(G_{ij} + G_{ji}) \ pour\ i \neq j \quad et \quad \varepsilon_{ii} = G_{ii} \quad ou\ encore:$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i}\right) \ pour\ i \neq j \quad et \quad \varepsilon_{ii} = \frac{\partial u_i}{\partial X_i}$$



Dilatation en M_0 dans la direction $\overrightarrow{N}$:

$$\overrightarrow{dX} = dX.\vec{N} \quad et \quad \overrightarrow{dx} = dx.\vec{n}$$

On définit l'allongement (ou dilatation linéaire) au point M_0, dans la direction $\overrightarrow{N}$:

$$\varepsilon(M_0;\vec{N}) = \frac{dx - dX}{dX};$$

C'est la variation relative de la longueur du segment initial dans la direction choisie.

$$(dx)^2 = {}^t\overrightarrow{dx}.\overrightarrow{dx} = {}^t\overrightarrow{dX}.\overline{\overline{C}}.\overrightarrow{dX} = (dX)^2.{}^t\vec{N}.\overline{\overline{C}}.\vec{N}$$

$$dx = dX.\sqrt{{}^t\vec{N}.\overline{\overline{C}}.\vec{N}}$$

$d'où :$

$$\varepsilon(M_0;\overrightarrow{N}) = \frac{dx - dX}{dX} = \frac{dx}{dX} - 1 = \sqrt{{}^t\overrightarrow{N}.\overline{\overline{C}}.\overrightarrow{N}} - 1 = \sqrt{1 + 2.{}^t\overrightarrow{N}.\overline{\overline{E}}.\overrightarrow{N}} - 1$$

$par\ exemple : (petites\ déformations)$

$$\varepsilon(M_0,\overrightarrow{E_1}) = \sqrt{1 + 2.{}^t\overrightarrow{E_1}.\overline{\overline{E}}.\overrightarrow{E_1}} - 1 = \sqrt{1 + 2.\varepsilon_{11}} - 1 \approx \varepsilon_{11}$$

$$\varepsilon(M_0,\overrightarrow{E_2}) = \sqrt{1 + 2.{}^t\overrightarrow{E_2}.\overline{\overline{E}}.\overrightarrow{E_2}} - 1 = \sqrt{1 + 2.\varepsilon_{22}} - 1 \approx \varepsilon_{22}$$

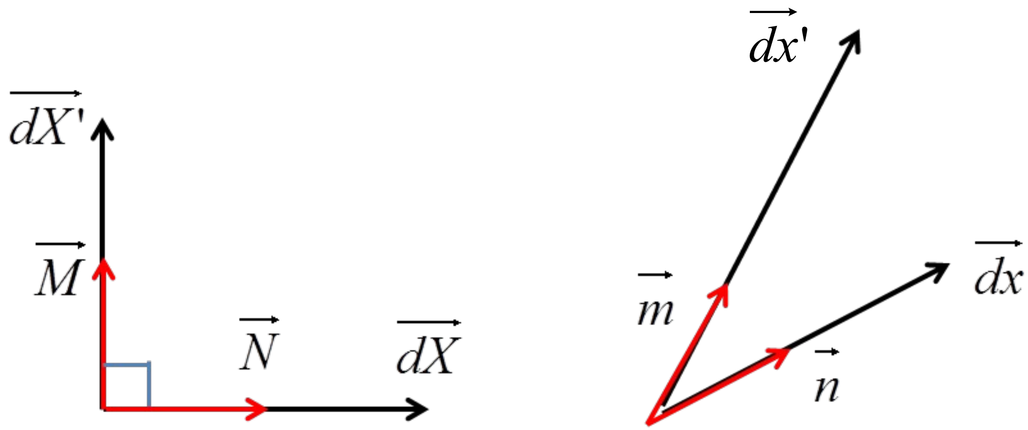
$$\varepsilon(M_0,\overrightarrow{E_3}) = \sqrt{1 + 2.{}^t\overrightarrow{E_3}.\overline{\overline{E}}.\overrightarrow{E_3}} - 1 = \sqrt{1 + 2.\varepsilon_{33}} - 1 \approx \varepsilon_{33}$$

Glissement ou distorsion angulaire :

On définit le glissement (ou distorsion angulaire) au point M_0

dans les directions initialement perpendiculaires $\overrightarrow{N}$ et $\overrightarrow{M}$:

$$\gamma(M_0;\overrightarrow{N},\overrightarrow{M}) = \frac{\pi}{2} - (\vec{n},\vec{m})$$



$$\cos(\overrightarrow{dx},\overrightarrow{dx'}) = \sin\gamma = \frac{{}^t\overrightarrow{dx}.\overrightarrow{dx'}}{dx.dx'} = \frac{{}^t\overrightarrow{dX}.\,{}^t\overline{\overline{\gamma}}.\overline{\overline{\gamma}}.\overrightarrow{dX'}}{dx.dx'} = \frac{{}^t\overrightarrow{dX}.\overline{\overline{C}}.\overrightarrow{dX'}}{dx.dx'} = \frac{dX.dX'.\,{}^t\overrightarrow{N}.\overline{\overline{C}}.\overrightarrow{M}}{dx.dx'}$$

$$or: \frac{dx}{dX} = \sqrt{{}^t\overrightarrow{N}.\overline{\overline{C}}.\overrightarrow{N}} \quad et \quad \frac{dx'}{dX'} = \sqrt{{}^t\overrightarrow{M}.\overline{\overline{C}}.\overrightarrow{N}} \quad donc:$$

$$\gamma(\overrightarrow{N},\overrightarrow{M}) = \arcsin\frac{{}^t\overrightarrow{N}.\overline{\overline{C}}.\overrightarrow{M}}{\sqrt{{}^t\overrightarrow{N}.\overline{\overline{C}}.\overrightarrow{N}}\sqrt{{}^t\overrightarrow{M}.\overline{\overline{C}}.\overrightarrow{N}}} = \arcsin\frac{2.\,{}^t\overrightarrow{N}.\overline{\overline{E}}.\overrightarrow{M}}{(1+\varepsilon(\overrightarrow{N}))(1+\varepsilon(\overrightarrow{M}))}$$

par exemple et pour les petites déformations :

$$\gamma(\overrightarrow{E_1},\overrightarrow{E_2}) = \arcsin\frac{2.\,{}^t\overrightarrow{E_1}.\overline{\overline{E}}.\overrightarrow{E_2}}{(1+\varepsilon(\overrightarrow{E_1}))(1+\varepsilon(\overrightarrow{E_2}))} \approx \frac{2\varepsilon_{12}}{(1+\varepsilon_{11})(1+\varepsilon_{22})} \approx \frac{2\varepsilon_{12}}{1+\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}} \approx 2\varepsilon_{12}$$

$$\gamma(\overrightarrow{E_1},\overrightarrow{E_2}) = \arcsin\frac{2.{}^t\overrightarrow{E_1}.\overline{\overline{E}}.\overrightarrow{E_2}}{(1+\varepsilon(\overrightarrow{E_1}))(1+\varepsilon(\overrightarrow{E_2}))} \approx \frac{2\varepsilon_{12}}{(1+\varepsilon_{11})(1+\varepsilon_{22})} \approx \frac{2\varepsilon_{12}}{1+\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}} \approx 2\varepsilon_{12}$$

$$\gamma(\overrightarrow{E_2},\overrightarrow{E_3}) = \arcsin\frac{2.{}^t\overrightarrow{E_2}.\overline{\overline{E}}.\overrightarrow{E_3}}{(1+\varepsilon(\overrightarrow{E_2}))(1+\varepsilon(\overrightarrow{E_3}))} \approx \frac{2\varepsilon_{23}}{(1+\varepsilon_{22})(1+\varepsilon_{33})} \approx \frac{2\varepsilon_{23}}{1+\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33}} \approx 2\varepsilon_{23}$$

$$\gamma(\overrightarrow{E_3},\overrightarrow{E_1}) = \arcsin\frac{2.{}^t\overrightarrow{E_3}.\overline{\overline{E}}.\overrightarrow{E_1}}{(1+\varepsilon(\overrightarrow{E_3}))(1+\varepsilon(\overrightarrow{E_1}))} \approx \frac{2\varepsilon_{31}}{(1+\varepsilon_{33})(1+\varepsilon_{11})} \approx \frac{2\varepsilon_{31}}{1+\varepsilon_{33}+\varepsilon_{11}} \approx 2\varepsilon_{12}$$

$$\overline{\overline{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} \varepsilon(M_0,\overrightarrow{E_1}) & \frac{1}{2}\gamma(M_0,\overrightarrow{E_1},\overrightarrow{E_2}) & \frac{1}{2}\gamma(M_0,\overrightarrow{E_1},\overrightarrow{E_3}) \\ \frac{1}{2}\gamma(M_0,\overrightarrow{E_2},\overrightarrow{E_1}) & \varepsilon(M_0,\overrightarrow{E_2}) & \frac{1}{2}\gamma(M_0,\overrightarrow{E_2},\overrightarrow{E_3}) \\ \frac{1}{2}\gamma(M_0,\overrightarrow{E_3},\overrightarrow{E_1}) & \frac{1}{2}\gamma(M_0,\overrightarrow{E_3},\overrightarrow{E_2}) & \varepsilon(M_0,\overrightarrow{E_3}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}$$

Lois de Comportement en élasticité
Lois de Hooke et Lois de Lamé

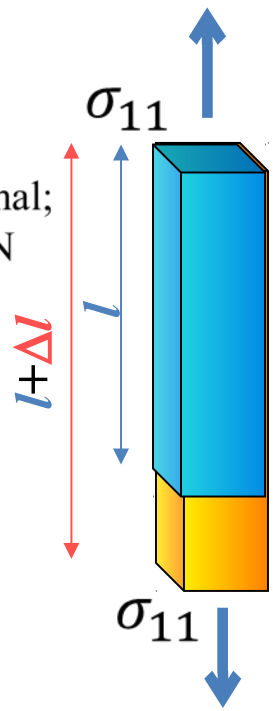
Le solide est supposé homogène, isotrope, ne subissant pas de variation de température et sans contraintes initiales (ou résiduelles).
Les déplacements et leurs variations dans l'espace (les déformations) sont supposés très faibles devant l'unité. Les déformations sont donc additives.

2 expériences fondamentales:

1ère expérience:

E: module de Young
ou module d'élasticité longitudinal;
ν: est le coefficient de POISSON
$0<\nu<0{,}5$

$$\varepsilon_{11} = \frac{\Delta l}{l}$$



$\varepsilon_{11} = \dfrac{\sigma_{11}}{E}$: déformation dans la direction 1

Mais il y a aussi des déformations dans les directions perpendiculaires à 1: **2 et 3**

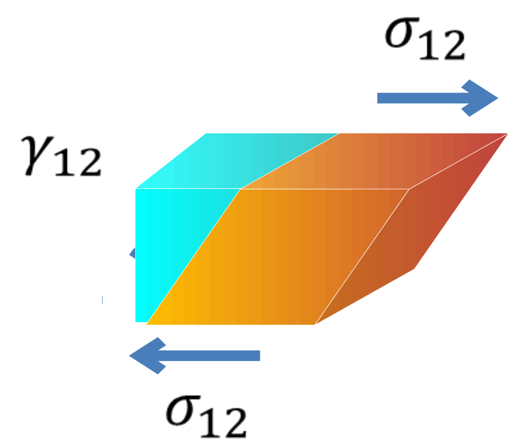
L'expérience montre que ces déformations sont proportionnelles à : ε_{11}

$\varepsilon'_2 = -\nu.\varepsilon_{11} = -\dfrac{\nu}{E}\sigma_{11}$: (déformation dans la direction 2)

$\varepsilon'_3 = -\nu.\varepsilon_{11} = -\dfrac{\nu}{E}\sigma_{11}$:(déformation dans la direction 3)

Lois de Comportement en élasticité
Lois de Hooke et Lois de Lamé

2ème expérience:



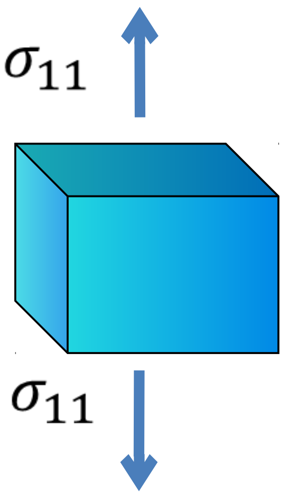
$$\gamma_{12} = G.\,\sigma_{12} = 2.\,\varepsilon_{12} = \frac{2(1+\nu)}{E}\,\sigma_{12}$$

$G = \dfrac{2(1+\nu)}{E}$ est le coefficient d'élasticité transversal;

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E}\,\sigma_{ij}$$

Lois de Comportement en élasticité
Lois de Hooke et Lois de Lamé

Soit un solide subissant les les 3 états de contraintes suivants dans la base principale des contraintes:

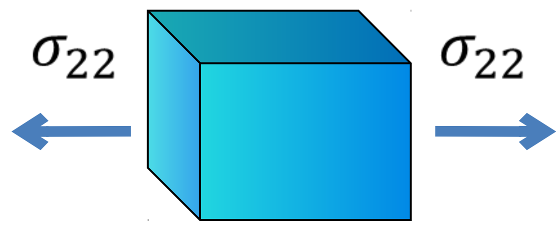


$$\varepsilon'_1 = \frac{\sigma_{11}}{E}$$

$$\varepsilon'_2 = -\nu . \varepsilon_{11} = - \frac{\nu}{E}\sigma_{11}$$

$$\varepsilon'_3 = -\nu . \varepsilon_{11} = - \frac{\nu}{E}\sigma_{11}$$

(1)

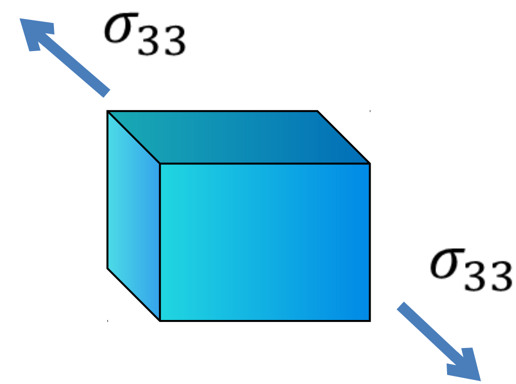


$$\varepsilon''_2 = \frac{\sigma_{22}}{E}$$

$$\varepsilon''_1 = -\nu . \varepsilon_{22} = - \frac{\nu}{E}\sigma_{22}$$

$$\varepsilon''_3 = -\nu . \varepsilon_{22} = - \frac{\nu}{E}\sigma_{22}$$

(2)



$$\varepsilon'''_3 = \frac{\sigma_{33}}{E}$$

$$\varepsilon'''_2 = -\nu . \varepsilon_{33} = - \frac{\nu}{E}\sigma_{33}$$

$$\varepsilon'''_1 = -\nu . \varepsilon_{33} = - \frac{\nu}{E}\sigma_{33}$$

(3)

Superposons les 3 états de contraintes (1), (2) et (3) et ajoutons les déformations respectivement dans la direction (1), la direction (2) et la direction (3):

$$\varepsilon_{11} = \frac{\sigma_{11}}{E} - \frac{\nu}{E}\sigma_{22} - \frac{\nu}{E}\sigma_{33}$$

$$\varepsilon_{11} = -\frac{\nu}{E}\sigma_{22} + \frac{\sigma_{22}}{E} - \frac{\nu}{E}\sigma_{33}$$

$$\varepsilon_{11} = -\frac{\nu}{E}\sigma_{11} - \frac{\nu}{E}\sigma_{22} + \frac{\sigma_{33}}{E}$$

ou encore $\begin{pmatrix}\varepsilon_{11}\\ \varepsilon_{22}\\ \varepsilon_{33}\end{pmatrix} = \frac{1}{E}\begin{pmatrix}1 & -\nu & -\nu\\ -\nu & 1 & -\nu\\ -\nu & -\nu & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sigma_{11}\\ \sigma_{22}\\ \sigma_{33}\end{pmatrix}$

D'autre part, on montre facilement que:

$$\varepsilon_{11} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{11} - \frac{\nu}{E}\mathrm{Tr}\overline{\overline{\sigma}}$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{11} - \frac{\nu}{E}\mathrm{Tr}\overline{\overline{\sigma}}$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{11} - \frac{\nu}{E}\mathrm{Tr}\overline{\overline{\sigma}}$$

$$\varepsilon_{ii} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ii} - \frac{\nu}{E}\mathrm{Tr}\overline{\overline{\sigma}}$$

On adopte souvent la représentation matricielle suivantequi :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{31} \\ 2\varepsilon_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix}$$

En ajoutant les 3 relations précédentes, on obtient:

$$Tr\bar{\bar{\varepsilon}} = \frac{1-2\nu}{E} Tr\bar{\bar{\sigma}}$$

On sait par ailleurs que:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E}\ \sigma_{ij} \quad pour : i \neq j$$

$$\varepsilon_{ii} = \frac{1+\nu}{E}\ \sigma_{ii} - \frac{\nu}{E}\ \mathrm{Tr}\bar{\bar{\sigma}}$$

Les deux dernières relations se résument dans la suivante (**Lois de Hooke**) :

$\boldsymbol{\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E}\mathrm{Tr}\bar{\bar{\sigma}}.\delta_{ij}}$ avec $\delta_{ii}=1$ et $\delta_{ij} = 0\ si\ i \neq j$

Ou encore: $\boldsymbol{\bar{\bar{\varepsilon}} = \frac{1+\nu}{E}\bar{\bar{\sigma}} - \frac{\nu}{E}\mathrm{Tr}\bar{\bar{\sigma}}.\bar{\bar{\delta}}}$ avec $\bar{\bar{\delta}} = I_3 = matrice\ unit\acute{e}$

$$\sigma_{11} = \frac{E}{1+\nu}\varepsilon_{11} + \frac{\nu}{1+\nu} Tr\overline{\overline{\sigma}} = \frac{E}{1+\nu}\varepsilon_{11} + \frac{\nu.E}{(1+\nu)(1-2\nu)} Tr\overline{\overline{\varepsilon}}$$

$$\sigma_{12} = \frac{E}{1+\nu}\varepsilon_{12} \quad \textit{et plus généralement :}$$

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu}\varepsilon_{ij} + \frac{\nu.E}{(1+\nu)(1-2\nu)} Tr\overline{\overline{\varepsilon}}\,.\delta_{ij} \qquad avec : \delta_{ij} = 0 \;\; pour \; i \neq j \;\; et \;\; \delta_{ii} = 1$$

ou encore :

$$\overline{\overline{\sigma}} = \frac{E}{1+\nu}\overline{\overline{\varepsilon}} + \frac{\nu.E}{(1+\nu)(1-2\nu)} Tr\overline{\overline{\varepsilon}}\,.\overline{\overline{\delta}}$$

$$\textit{on note :} \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad et \quad \lambda = \frac{\nu.E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

Ce sont les lois de Lamé :

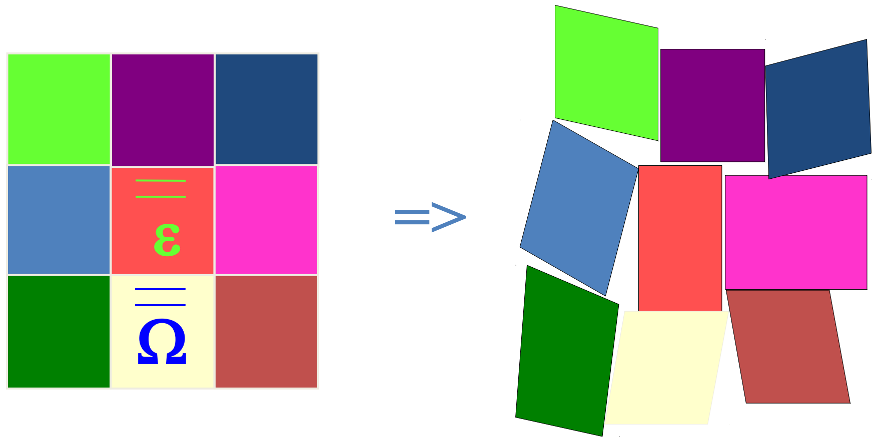
$$\overline{\overline{\sigma}} = 2\mu\overline{\overline{\varepsilon}} + \lambda Tr\overline{\overline{\varepsilon}}\,.\overline{\overline{\delta}} \quad ou \quad \sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda Tr\overline{\overline{\varepsilon}}\,.\delta_{ij}$$

Deux constantes et deux constantes seulement définissent l'état élastique d'un matériau :

E : module de Young et ν : *coeifficient* de Poisson ou encore :

μ : 1er *coeifficient* de Lamé et λ : 2ème *coeifficient* de Lamé

Continuité et Compatibilité des Déformations



Continuité => $\overrightarrow{du}$ intégrable

$$\overrightarrow{du} = \bar{\bar{G}}\,\overrightarrow{dX} = (\bar{\bar{\varepsilon}} + \bar{\bar{\Omega}})\,\overrightarrow{dX}$$

soit $\mathbf{Rot_D}\bar{\bar{\mathbf{G}}} = 0$

$$\mathbf{Rot_D}\,\bar{\bar{\varepsilon}} = \mathbf{-Rot_D}\,\bar{\bar{\Omega}} = {}^t\mathrm{Grad}\,\vec{\omega}$$

Vecteur tourbillon $\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{dX} = \bar{\bar{\Omega}}\,\overrightarrow{dX}$

$$\Rightarrow \mathbf{Rot_G}\,\bar{\bar{\varepsilon}} = \mathrm{Grad}\,\vec{\omega}$$

$d\vec{\omega} = \mathrm{Grad}\,\vec{\omega}\,\overrightarrow{dX}$ **intégrable si** $\mathbf{Rot_D}(\mathrm{Grad}\,\vec{\omega}) = 0$

$$\mathbf{Inc}(\bar{\bar{\varepsilon}}) = \mathbf{Rot_D}(\mathbf{Rot_G}\,\bar{\bar{\varepsilon}}) = \mathbf{Rot_G}(\mathbf{Rot_D}\,\bar{\bar{\varepsilon}}) = 0$$

$$\boxed{[\mathrm{Inc}(\boldsymbol{\varepsilon})]_{rl} = \delta_{rmi}\delta_{lkj}\frac{\partial^2 \varepsilon_{ij}}{\partial x_m \partial x_k} = 0}$$

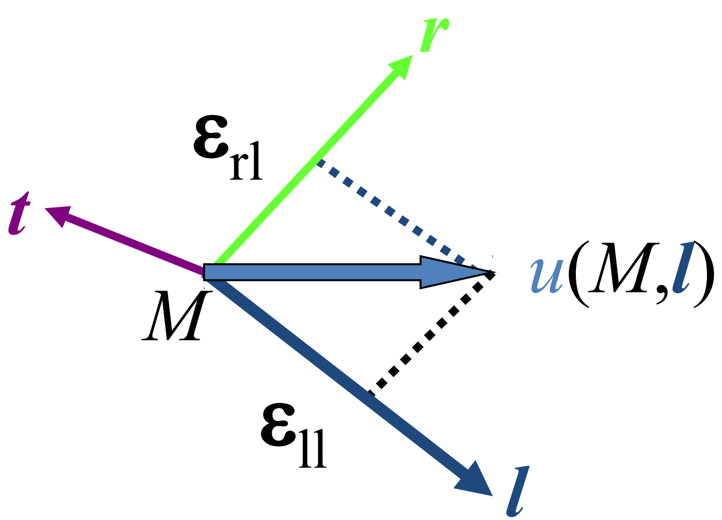
Avec $\mathbf{Div_D Inc}(\bar{\bar{\varepsilon}}) = 0$

V-2 Tenseur des Déformations

- V-2.1 Repère local : Extension, Distorsion
- V-2.2 Tenseur des Déformations : Définition
- V-2.3 Déformations Principales et Axes Propres
- V-2.4 Invariants du Tenseur des Déformations
- V-2.5 Sphérique et Déviateur des Déformations
- V-2.6 Changement de Volume et de Forme

V-2.1 Tenseur des Déformations :

Repère local



Au point ***M*** segment unitaire direction ***l***

$$\overrightarrow{u}(M,\overrightarrow{l}) = \overline{\overline{\varepsilon}}(M)\,\overrightarrow{l}$$

l, ***r***, ***u*** coplanaires

Trièdre local direct ***l***, ***r***, ***t***

$$\varepsilon_{ll} = \boldsymbol{u} \bullet \boldsymbol{l} \quad \text{Extension} > 0 \quad \text{Contraction} < 0$$

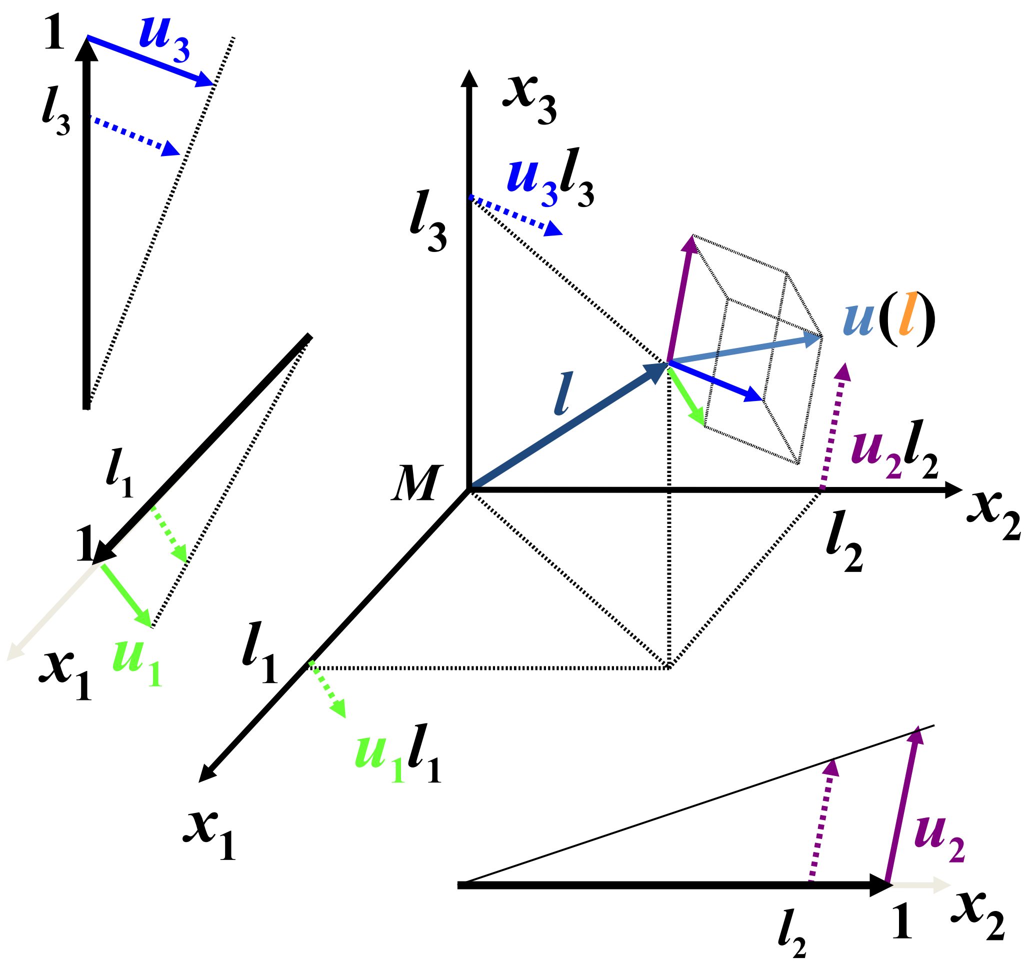
$$\varepsilon_{rl} = \boldsymbol{u} \bullet \boldsymbol{r} \quad \text{Distorsion}$$

$$\varepsilon_{tl} = \boldsymbol{u} \bullet \boldsymbol{t} = 0$$

V-2.2 Tenseur des Déformations :

Définition

$$\vec{u}(M,\vec{l}\,) = \overline{\overline{\varepsilon}}(M)\,\vec{l}$$



$$\vec{u}(\vec{l}\,) = \vec{u}_1 l_1 + \vec{u}_2 l_2 + \vec{u}_3 l_3$$

$$\begin{array}{cccc} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 & \vec{l} \end{array}$$

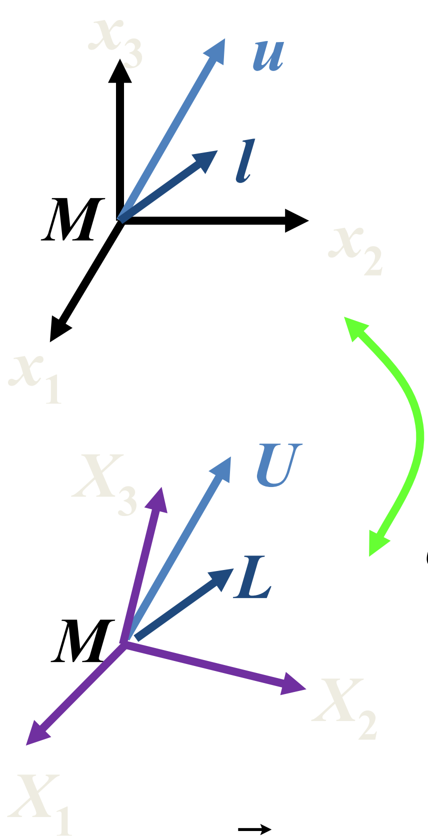
$$\vec{u}(\vec{l}\,) = \begin{vmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{vmatrix}$$

$$\boxed{\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}}$$

Le Tenseur des Déformations $\boldsymbol{\varepsilon}$ est Symétrique

V-2.3 Tenseur des Déformations :

Déformations Principales et Axes Propres



$$\vec{l} = {}^{t}A\vec{L}$$

$$\overline{\overline{\varepsilon}}(M) \begin{Vmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{Vmatrix} \qquad \vec{u} = \overline{\overline{\varepsilon}}\vec{l}$$

$$\vec{U} = A\vec{u}$$

$$\overline{\overline{\mathrm{E}}}(M) \begin{vmatrix} \mathrm{E_I} & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{E_{II}} & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{E_{III}} \end{vmatrix} \qquad \vec{U} = \overline{\overline{\mathrm{E}}}\vec{L}$$

$$\vec{U} = A\vec{u} \qquad = A\overline{\overline{\varepsilon}}\vec{l} \qquad = A\overline{\overline{\varepsilon}}\,{}^{t}A\vec{L} \qquad = \overline{\overline{\mathrm{E}}}\vec{L}$$

$$\overline{\overline{\mathrm{E}}}(M) = A\overline{\overline{\varepsilon}}(M)\,{}^{t}A \qquad \mathbf{E_{il} = a_{ij}\,\varepsilon_{jk}\,a_{kl}}$$

V-2.4 Tenseur des Déformations :

Les Invariants Tensoriels

$$\overline{\overline{\mathrm{E}}}(M)\begin{vmatrix} \mathbf{E_I} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{E_{II}} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{E_{III}} \end{vmatrix} \qquad \overline{\overline{\varepsilon}}(M)\begin{vmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{vmatrix}$$

$$I_1 = \mathrm{E_I} + \mathrm{E_{II}} + \mathrm{E_{III}} = \varepsilon_{kk} = 3\,\varepsilon_m = \mathrm{Tr}(\varepsilon)$$

$$I_2 = \mathrm{E_I}\,\mathrm{E_{II}} + \mathrm{E_{II}}\,\mathrm{E_{III}} + \mathrm{E_{III}}\,\mathrm{E_I} = (\varepsilon_{11}\,\varepsilon_{22} - \varepsilon_{12}^2) + (\varepsilon_{11}\,\varepsilon_{33} - \varepsilon_{13}^2) + (\varepsilon_{22}\,\varepsilon_{33} - \varepsilon_{23}^2)$$

$$I_3 = \mathrm{E_I}\,\mathrm{E_{II}}\,\mathrm{E_{III}} = \mathrm{Det}(\varepsilon)$$

$$\lambda^3 - I_1\lambda^2 + I_2\lambda - I_3 = 0 \qquad \textbf{\textit{Caley-Hamilton}} \qquad \overline{\overline{\varepsilon}}^{\,3} - I_1\overline{\overline{\varepsilon}}^{\,2} + I_2\overline{\overline{\varepsilon}} - I_3\overline{\overline{\delta}} = \overline{\overline{0}}$$

6 Composantes = 3 (Invariants ou Valeurs Propres) + 3 Angles d'Euler

V-2.5 Tenseur des Déformations : Sphérique et Déviateur

$$\bar{\bar{\varepsilon}}(M) = \bar{\bar{S}} + \bar{\bar{D}} = \begin{vmatrix} \varepsilon_m & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_m & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_m \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varepsilon_{11} - \varepsilon_m & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} - \varepsilon_m & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} - \varepsilon_m \end{vmatrix}$$

$$\varepsilon_m = \frac{1}{3}\mathrm{Tr}(\bar{\bar{\varepsilon}})$$

$$\varepsilon_d^2 = \frac{1}{3}\mathrm{Tr}(\bar{\bar{D}}^2)$$

Sphérique *S* Tr(*S*)= Tr(ε) **Déviateur *D* Tr(*D*)= 0**

ε_m Déformation Normale Moyenne (Extension ou Contraction)

ε_d Déformation Déviatorique Moyenne (Distorsion)

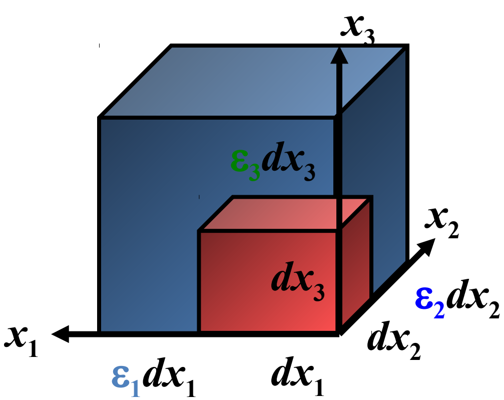
π Tenseur des Directions Tr(π)=0 et Tr(π²)=3

$$\bar{\bar{\varepsilon}}(M) = \bar{\bar{S}} + \bar{\bar{D}} = \varepsilon_m \bar{\bar{\delta}} + \varepsilon_d \bar{\bar{\pi}} = \varepsilon_m \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \varepsilon_d \begin{vmatrix} \pi_1(\mu) & 0 & 0 \\ 0 & \pi_2(\mu) & 0 \\ 0 & 0 & \pi_3(\mu) \end{vmatrix}$$

6 Composantes = $\varepsilon_m + \varepsilon_d + \mu$ +3 Angles d'Euler

V-2.6 Tenseur des Déformations :

Changement de Volume et de Forme

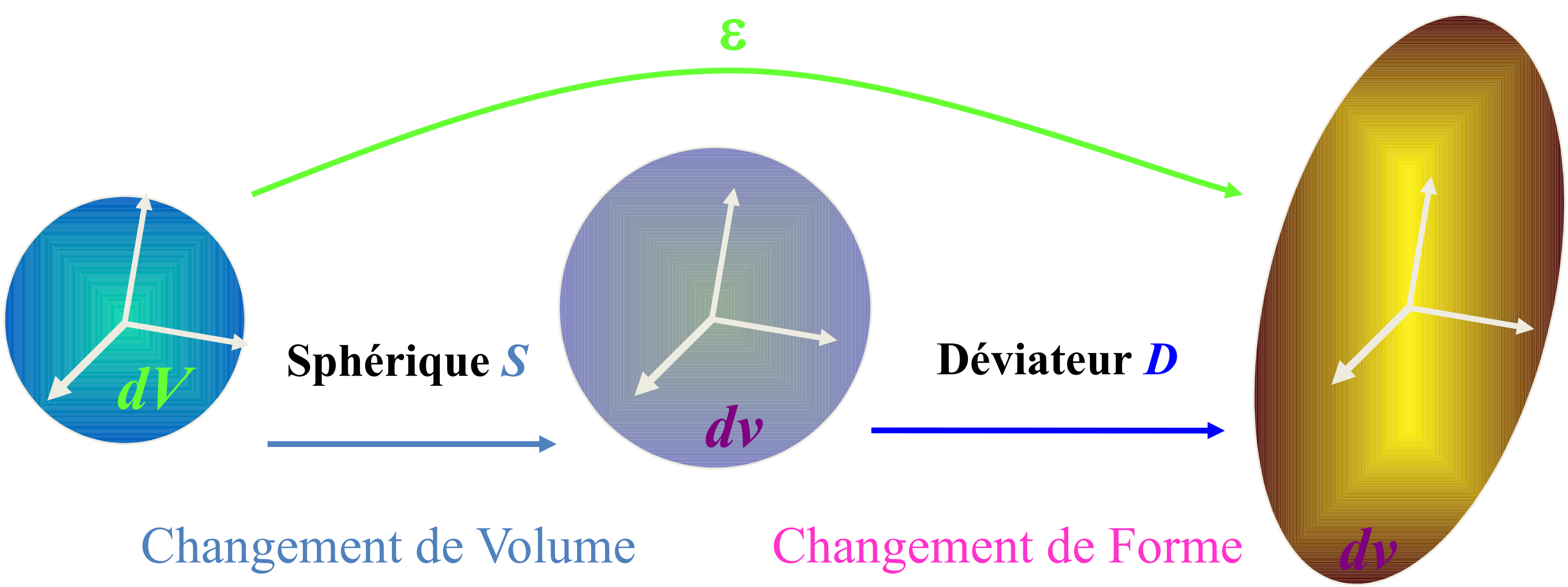


$$\varepsilon = \begin{vmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{vmatrix}$$

$$dV = dx_1\, dx_2\, dx_3$$

$$dv = (1+\varepsilon_1)\, dx_1\, (1+\varepsilon_2) dx_2\, (1+\varepsilon_3) dx_3$$

Variation Relative de Volume $\dfrac{dv - dV}{dV} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \mathrm{Tr}(\varepsilon) = \mathrm{Div}\, \vec{u}$



Changement de Volume
à Forme Constante

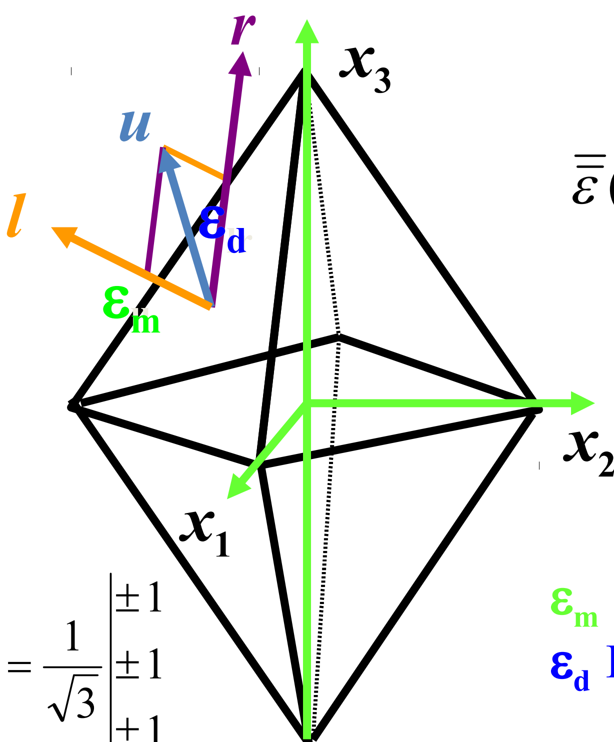
Changement de Forme
à Volume Constant

V-3 Représentation des Déformations

- V-3.1 Déformations Octaédriques
- V-3.2 Ellipsoïde des Déformations
- V-3.3 Cercle de Mohr Principal
- V-3.4 Cercle de Mohr et Déformation
- V-3.5 Cercles de Mohr
- V-3.6 Glissement Pur et Glissement Simple

V-3.1 Représentation des Déformations :

Déformations Octaédriques



$$\vec{l} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{vmatrix} \pm 1 \\ \pm 1 \\ \pm 1 \end{vmatrix}$$

$$\overline{\overline{\varepsilon}}(M) = \overline{\overline{S}} + \overline{\overline{D}} = \varepsilon_m \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{D}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{D}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{D}_3 \end{vmatrix}$$

Sphérique *S* Tr(*S*)= Tr(ε) **Déviateur *D* Tr(*D*)= 0**

$$\varepsilon_m = \frac{1}{3}\mathrm{Tr}(\overline{\overline{S}}) \qquad \varepsilon_d^2 = \frac{1}{3}\mathrm{Tr}(\overline{\overline{\mathrm{D}}}^2)$$

ε_m Déformation Normale Moyenne (Extension - Contraction)

ε_d Déformation Déviatorique Moyenne (Distorsion)

$$\varepsilon_{ll} = \vec{l} \bullet \vec{u} = \vec{l}\,\overline{\overline{S}}\,\vec{l} + \vec{l}\,\overline{\overline{D}}\,\vec{l} = \frac{1}{3}\mathrm{Tr}(\overline{\overline{S}}) + \frac{1}{3}\cancel{\mathrm{Tr}(\overline{\overline{D}})} = \varepsilon_m$$

$$\boxed{\varepsilon_{ll} = \varepsilon_m}$$

$$\varepsilon_{lr}^2 = u \bullet u - \varepsilon_{ll}^2 = \vec{l}\,(\overline{\overline{S}} + \overline{\overline{D}})^2\,\vec{l} - \varepsilon_m^2 = \vec{l}\,(\overline{\overline{S}}^2)\,\vec{l} + 2\vec{l}\,(\overline{\overline{S}}\,\overline{\overline{D}})\,\vec{l} + \vec{l}\,(\overline{\overline{D}}^2)\,\vec{l} - \varepsilon_m^2$$

$$= \cancel{\frac{1}{3}\mathrm{Tr}(\overline{\overline{S}}^2)} + \cancel{2\sigma_m \mathrm{Tr}(\overline{\overline{D}})} + \frac{1}{3}\mathrm{Tr}(\overline{\overline{D}}^2) - \cancel{\varepsilon_m^2} = \varepsilon_d^2$$

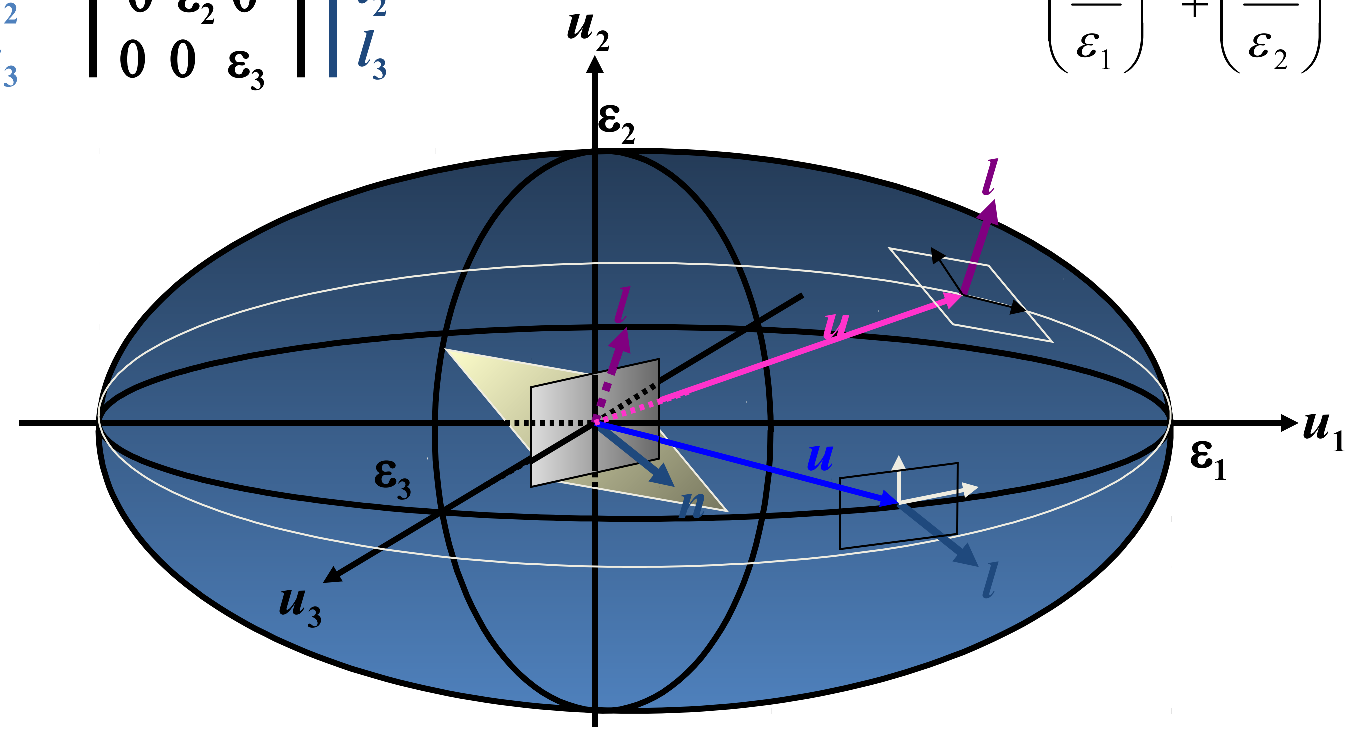
$$\boxed{\varepsilon_{lr} = \varepsilon_d}$$

V-3.2 Représentation des Déformations :

Ellipsoïde des Déformations

$$\begin{vmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{vmatrix}$$

$$\left(\frac{u_1}{\varepsilon_1}\right)^2 + \left(\frac{u_2}{\varepsilon_2}\right)^2 + \left(\frac{u_3}{\varepsilon_3}\right)^2 = 1$$

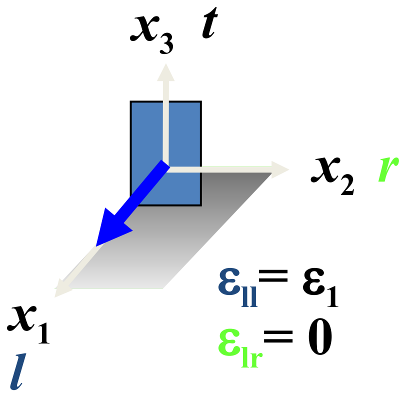


Lorsque $\boldsymbol{l}$ appartient à un plan principal, $\boldsymbol{u}$ appartient au même plan

V-3.3 Représentation des Déformations :

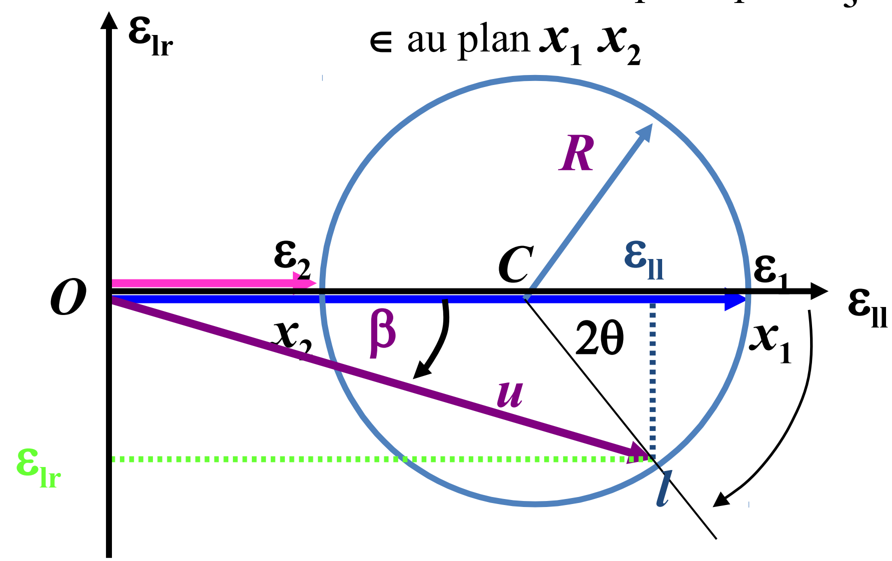
Cercle de Mohr Principal

Direction x_1



Directions $\perp$ à la direction principale x_3

$\in$ au plan $x_1\ x_2$

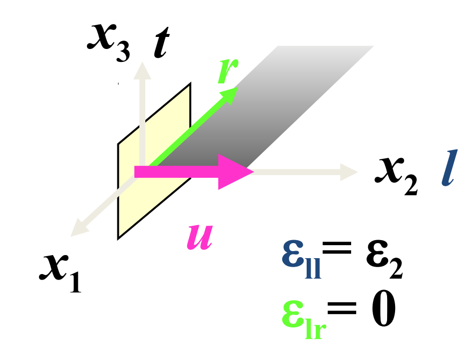


$$\bar{\bar{\varepsilon}}(M) = \begin{vmatrix} \boxed{\begin{matrix}\varepsilon_1 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2\end{matrix}} & \begin{matrix}0 \\ 0\end{matrix} \\ \begin{matrix}0 & 0\end{matrix} & \varepsilon_3 \end{vmatrix}$$

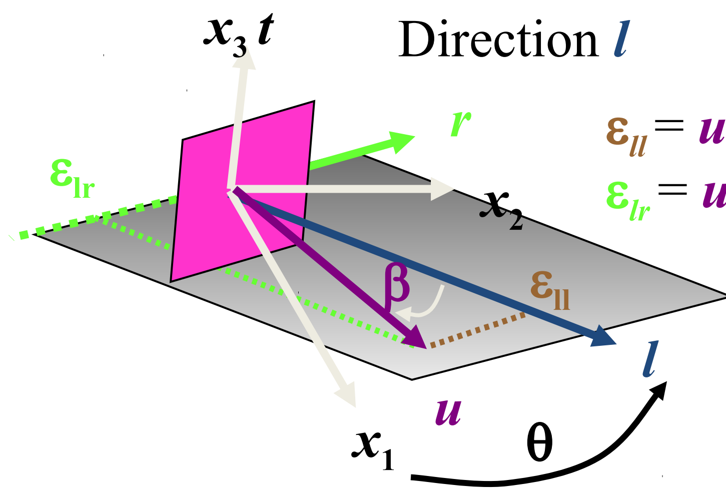
$$R = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2}$$

$$OC = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2}$$

Direction x_2



Direction l



$\varepsilon_{ll} = u \bullet l = l\ \varepsilon\ l = OC + R\cos 2\theta$

$\varepsilon_{lr} = u \bullet r = l\ \varepsilon\ r = -R\sin 2\theta$

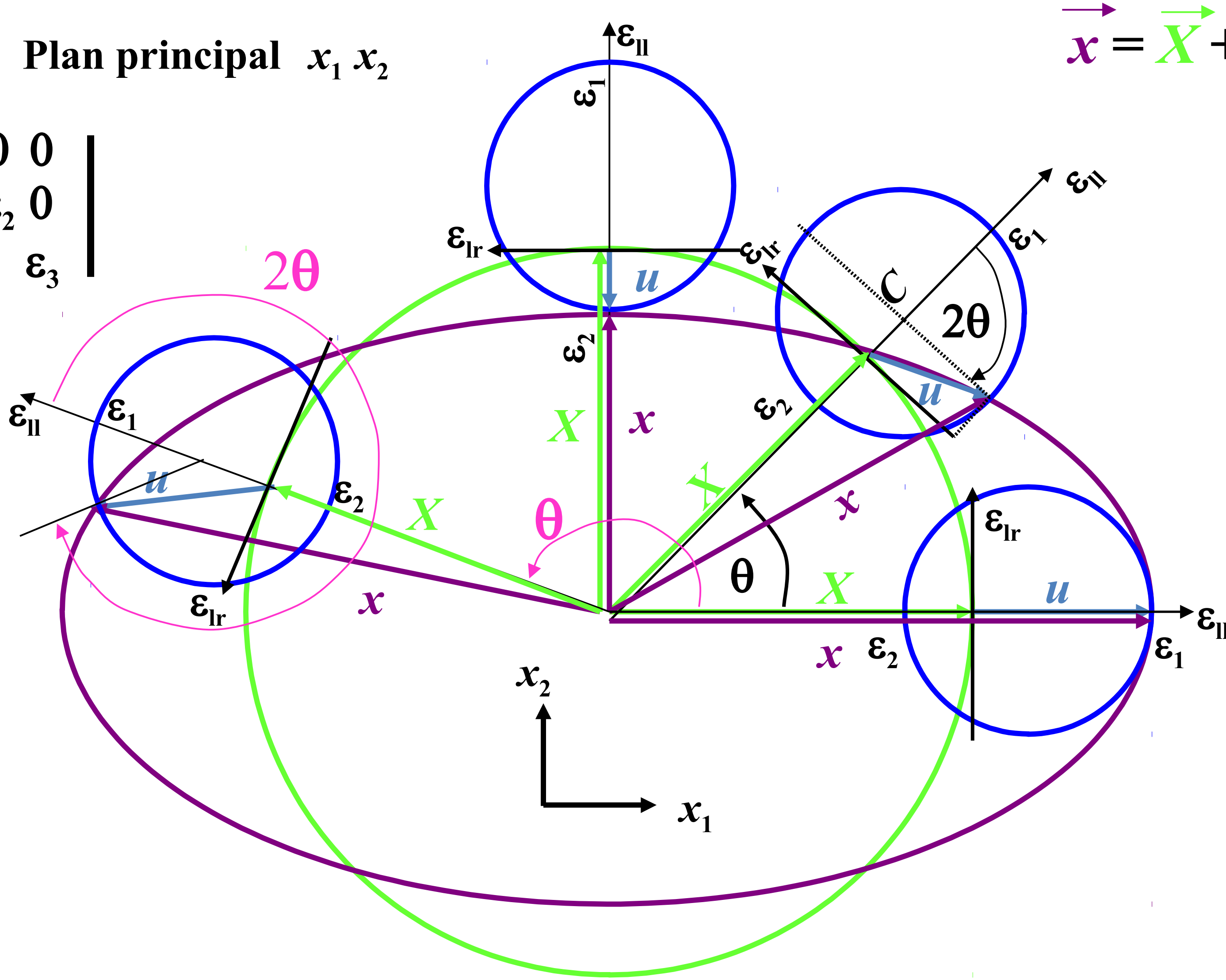
V-3.4 Représentation des Déformations :

Cercle de Mohr et Déformation

Plan principal $x_1\ x_2$

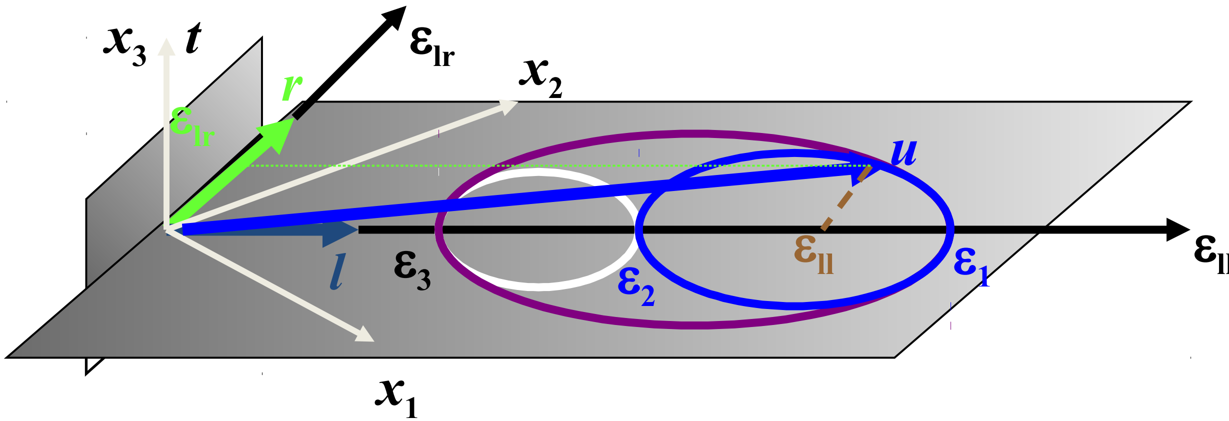
$$\varepsilon = \begin{vmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{vmatrix}$$

$$\vec{x} = \vec{X} + \vec{u}$$

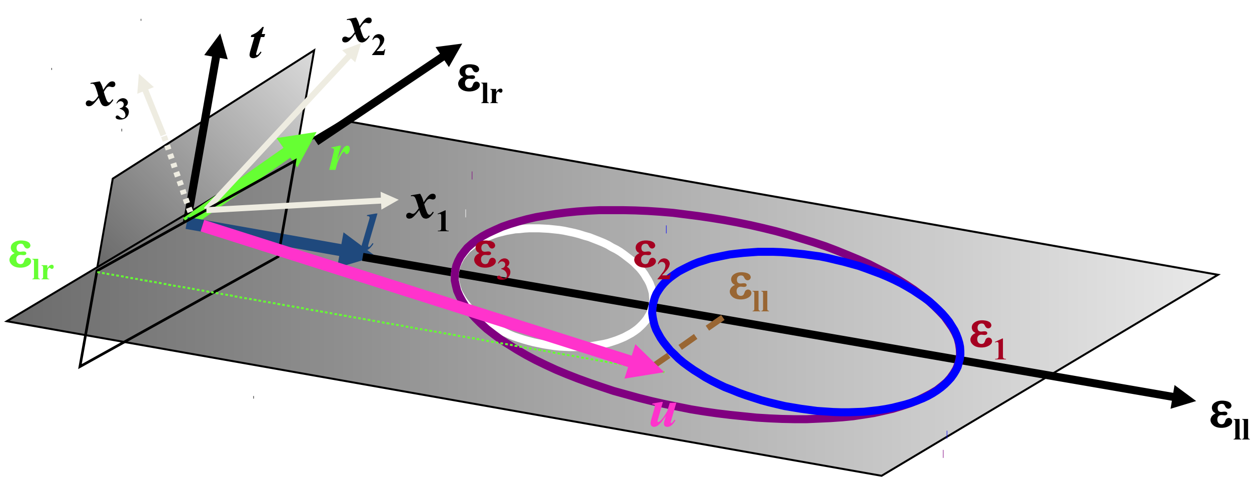


V-3.5 Représentation des Déformations : Cercles de Mohr

Direction $\boldsymbol{l}$ appartenant à un plan principal $(x_1\, x_2)$



Direction $\boldsymbol{l}$ n'appartenant pas à un plan principal

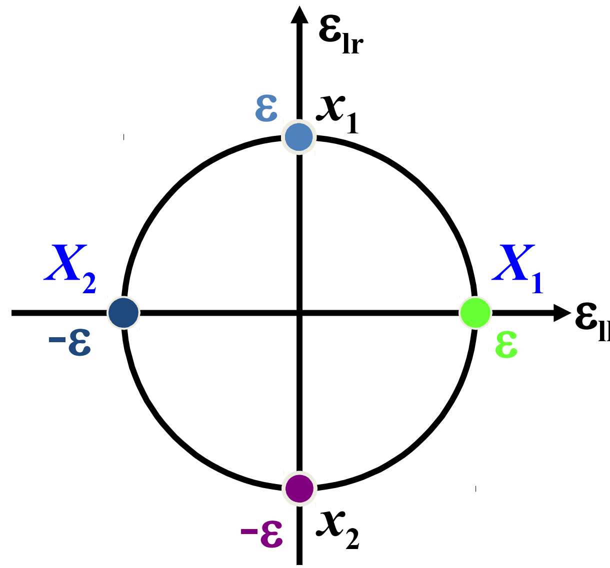


$$\bar{\bar{\varepsilon}}(M) = \begin{vmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{vmatrix}$$

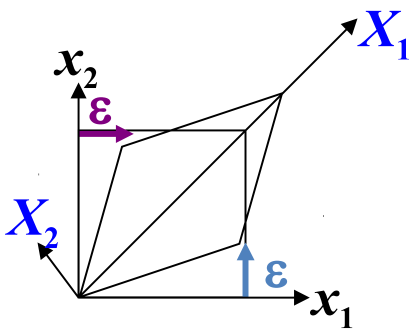
V-3.6 Représentation des Déformations :

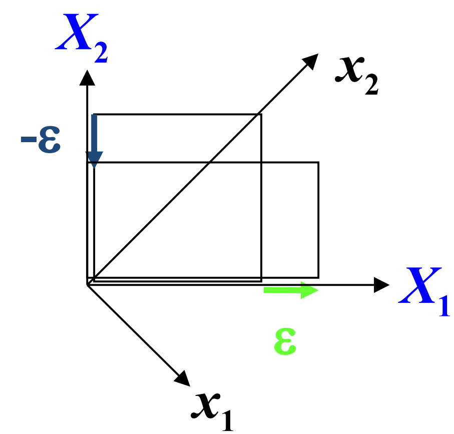
Glissement Pur et Glissement Simple

$$\overline{\overline{\varepsilon}} = \begin{vmatrix} 0 & \varepsilon & 0 \\ \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

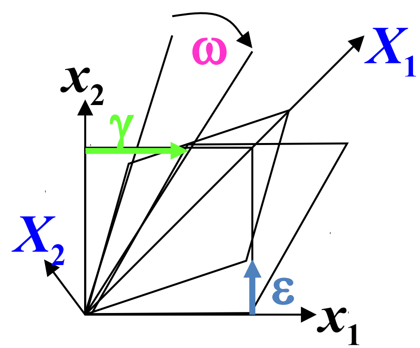


$$\overline{\overline{\varepsilon}} = \begin{vmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & -\varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$





$$\overline{\overline{\Omega}} = \begin{vmatrix} 0 & \varepsilon & 0 \\ -\varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$



$$\overline{\overline{G}} = \begin{vmatrix} 0 & 2\varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

La distorsion est maximale sur les directions orientées à 45° des directions principales

La rotation $\omega = -\varepsilon$ **Le glissement est le double de la distorsion $\gamma = 2\varepsilon$**

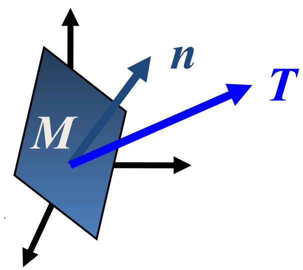
VI Relation Contraintes - Déformation

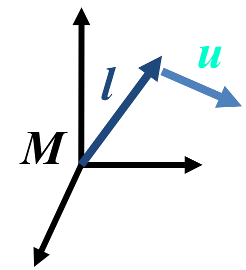
- VI-1 Contraintes et Déformations
- VI-2 Lois de Comportement
- VI-3 σ et ε Nominales et Naturelles
- VI-4 Le Travail de Déformation

VI-1 Contraintes et Déformations

Description de l'État Mécanique Local

Contraintes		Déformations
$\overrightarrow{T}(M, \overrightarrow{n}) = \overline{\overline{\sigma}}(M)\overrightarrow{n}$	Définition	$\overrightarrow{u}(M, \overrightarrow{l}) = \overline{\overline{\varepsilon}}(M)\overrightarrow{l}$
$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$	Symétrie	$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$





Loi Fondamentale de la Dynamique

$$\mathbf{Div_D}\,\overline{\overline{\sigma}} + \rho\overrightarrow{X} = \rho\overrightarrow{\gamma}$$

$$\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho X_i = \rho\gamma_i$$

Conditions aux limites

$$\overline{\overline{\sigma}}(M)\overrightarrow{n} = \overrightarrow{f}(M)$$

$$2\overline{\overline{\varepsilon}} = \overline{\overline{\mathrm{Grad}}}\,\overrightarrow{u} + {}^t\overline{\overline{\mathrm{Grad}}}\,\overrightarrow{u}$$

$$\frac{dV}{V} = \mathbf{Tr}(\varepsilon) = \mathbf{Div}\,\overrightarrow{u}$$

Conservation de la Masse : Continuité

$$\mathbf{Inc}(\overline{\overline{\varepsilon}}) = \mathbf{Rot_D}(\mathbf{Rot_G}\,\overline{\overline{\varepsilon}}) = 0$$

$$\boxed{[\mathrm{Inc}(\varepsilon)]_{rl} = \delta_{rmi}\delta_{lkj}\frac{\partial^2\varepsilon_{ij}}{\partial x_m\,\partial x_k} = 0}$$

Description Indépendante du Comportement du Matériau

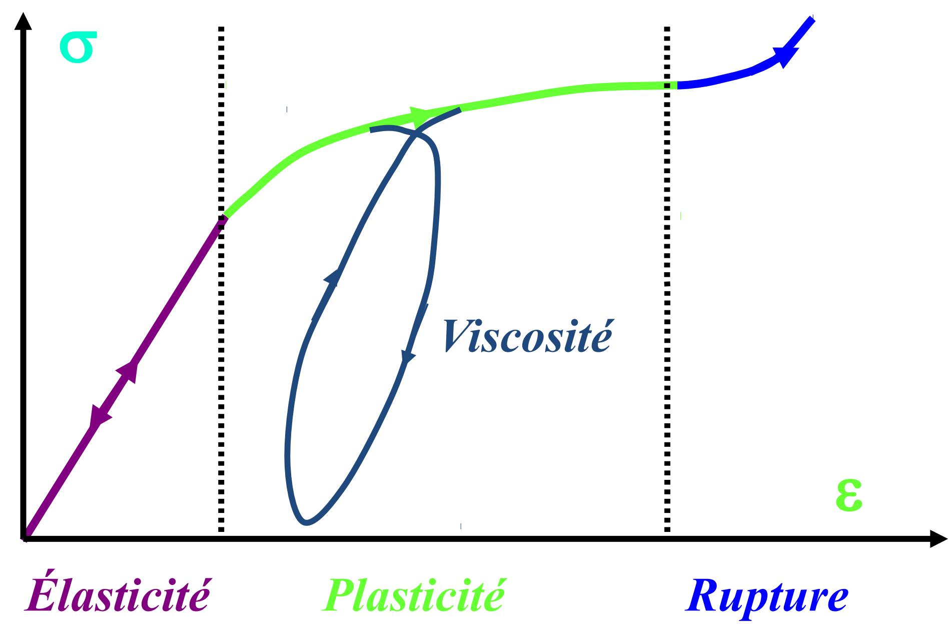
VI-2 Lois de Comportement

Équation d'État du Matériau

Déformations $\qquad \mathcal{F}\left\{\overline{\overline{\varepsilon}}, \frac{d\overline{\overline{\varepsilon}}}{dt}, \overline{\overline{\sigma}}, \frac{d\overline{\overline{\sigma}}}{dt}\right\} = 0 \qquad$ Contraintes

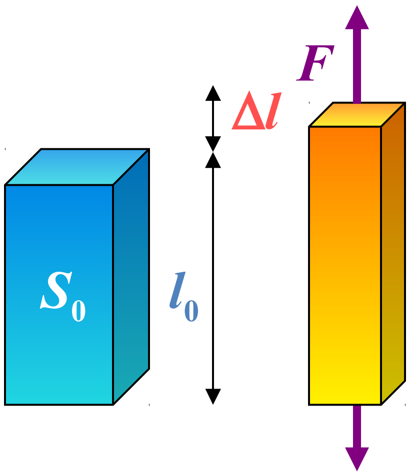
$\Downarrow$

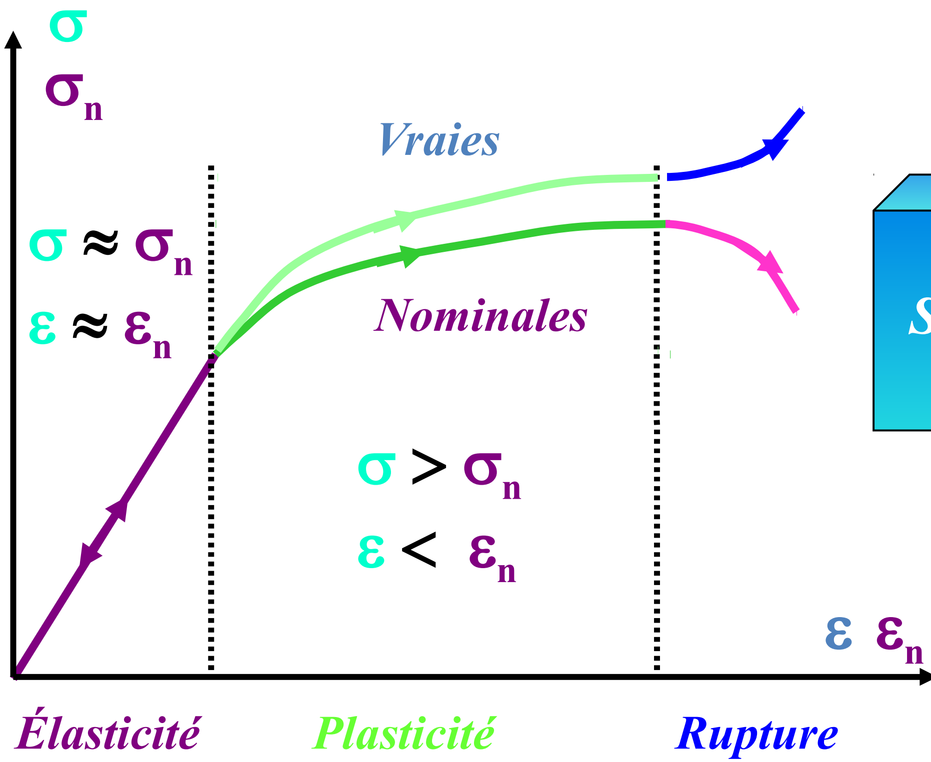
Solution du Problème

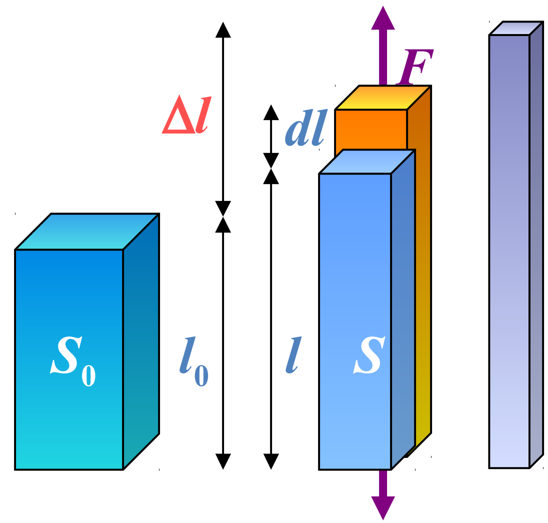


Description du Comportement du Matériau

VI-3 σ et ε Nominales et Naturelles







Nominales

$$\sigma_n = \frac{F}{S_0}$$

$$\varepsilon_n = \frac{\Delta l}{l_0}$$

Naturelles ou Vraies

$$\sigma = \frac{F}{S}$$

$$d\varepsilon = \frac{dl}{l}$$

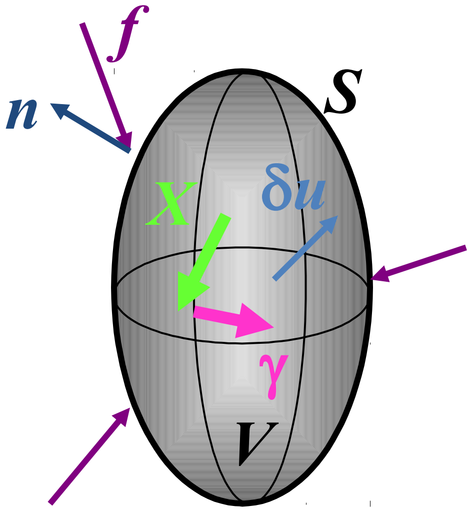
$$\varepsilon = \int_{l_0}^{l_0+\Delta l} \frac{dl}{l} = \mathrm{Ln}\left(1+\frac{\Delta l}{l_0}\right) = \mathrm{Ln}(1+\varepsilon_n)$$

La Loi de Comportement du Matériau relie ε et σ Vraies

VI-4 Le Travail de Déformation

- VI-4.1 Travail des Forces Externes
- VI-4.2 Champs admissibles et Travaux virtuels
- VI-4.3 Relation avec la Thermodynamique
- VI-4.4 Réversibilités Thermique et Mécanique

VI-4.1 Le Travail de Déformation : Travail des Forces Externes



Forces de Surface :

- $\boldsymbol{n}$ Normale Extérieure
- $\boldsymbol{f}$ Force Extérieure Appliquée (/ **unité de surface**)

$$\bar{\bar{\sigma}}(M)\vec{n} = \vec{f}(M)$$

\+ => **Champ de déplacement δu**

Forces de Volume :

- $-\rho\gamma$ Force d'Inertie
- X Force Extérieure Appliquée (/ **unité de masse**)

$$\iiint_V \delta W\, dV = \iiint_V -\rho\vec{\gamma}\bullet\delta\vec{u}\,dV + \iiint_V \rho\vec{X}\bullet\delta\vec{u}\,dV + \iint_S \vec{f}\bullet\delta\vec{u}\,dS$$

$$\iint_S \vec{f}\bullet\delta\vec{u}\,dS = \iiint_V \mathbf{Div}(\bar{\bar{\sigma}}\delta\vec{u})\,dV = \iiint_V \mathbf{Tr}\left(\bar{\bar{\sigma}}(\delta\bar{\bar{\varepsilon}} + \delta\bar{\bar{\Omega}})\right)dV + \iiint_V \mathbf{Div}_{\mathbf{D}}\bar{\bar{\sigma}}\bullet\delta\vec{u}\,dV$$

$$\iiint_V \delta W\, dV = \underbrace{\cancel{\iiint_V (\mathbf{Div}_{\mathbf{D}}\bar{\bar{\sigma}} + \rho\vec{X} - \rho\vec{\gamma})\delta\vec{u}\,dV}}_{\text{Équilibre Dynamique}} + \underbrace{\cancel{\iiint_V \mathbf{Tr}(\bar{\bar{\sigma}}\delta\bar{\bar{\Omega}})\,dV}}_{\text{Anti Symétrie}} + \iiint_V \mathbf{Tr}(\bar{\bar{\sigma}}\delta\bar{\bar{\varepsilon}})\,dV$$

$$\boldsymbol{\delta W = \mathrm{Tr}(\bar{\bar{\sigma}}\delta\bar{\bar{\varepsilon}})}$$

VI-4.2 Le Travail de Déformation :

Champs admissibles et Travaux virtuels

$\bar{\bar{\varepsilon}}'$ **Cinématiquement admissible**

$\vec{u}'$ **Continu dérivable**

$$\mathrm{Inc}(\bar{\bar{\varepsilon}}') = 0$$

Loi de Comportement

$$\bar{\bar{\sigma}}' = \mathcal{F}\{\bar{\bar{\varepsilon}}'\} \Rightarrow \bar{\bar{\sigma}}'\vec{n} \neq \vec{f}$$

$$\text{et} \quad \mathrm{Div}_D\bar{\bar{\sigma}}' + \rho\vec{X} \neq \rho\vec{\gamma}$$

$\vec{u}'$ $\bar{\bar{\varepsilon}}'$ $\bar{\bar{\sigma}}'$ **Virtuels**

$\bar{\bar{\sigma}}^*$ **Dynamiquement admissible**

$$\mathrm{Div}_D\bar{\bar{\sigma}}^* + \rho\vec{X}^* = \rho\vec{\gamma}^*$$

$$\bar{\bar{\sigma}}^*\vec{n} = \vec{f}^*$$

Loi de Comportement

$$\bar{\bar{\varepsilon}}^* = \mathcal{F}\{\bar{\bar{\sigma}}^*\} \Rightarrow \mathrm{Inc}(\bar{\bar{\varepsilon}}^*) \neq 0$$

$\bar{\bar{\sigma}}^*$ $\vec{X}^*$ $\vec{\gamma}^*$ $\vec{f}^*$ $\bar{\bar{\varepsilon}}^*$ **Virtuels**

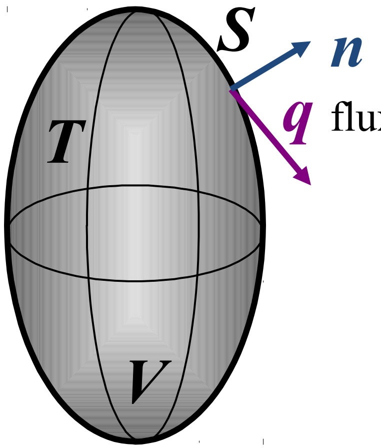
$$\delta W = \mathrm{Tr}(\bar{\bar{\sigma}}^*\delta\bar{\bar{\varepsilon}}')$$

Solution réelle

$\vec{X}$ $\vec{\gamma}$ $\vec{f}$ $\quad \bar{\bar{\sigma}}^* = \bar{\bar{\sigma}}$, $\bar{\bar{\varepsilon}}' = \bar{\bar{\varepsilon}}$ $\quad \vec{u}$

$$\delta W = \mathrm{Tr}(\bar{\bar{\sigma}}\delta\bar{\bar{\varepsilon}}) \begin{cases} \text{Récupérable} & \text{(Élasticité)} \\ \text{Dissipé} & \text{(Viscosité Rupture)} \\ \text{Bloqué} & \text{(Plasticité)} \end{cases}$$

VI-4.3 Le Travail de Déformation :
Relation avec la Thermodynamique



q flux de chaleur sortant

$F = E - TS$

E densité volumique d'énergie interne
F densité volumique d'énergie libre
S densité volumique d'entropie
W densité volumique de travail reçu
Q densité volumique de chaleur reçue

1[er] principe

$$\iiint_V \delta E dV = \iiint_V \delta W dV + \iiint_V \delta Q dV - \delta \iint_S \vec{q} \bullet \vec{n} dS$$

$$\delta W = \mathbf{Tr}(\overline{\overline{\sigma}}\delta\overline{\overline{\varepsilon}}) \text{ et } \iint_S \vec{q} \bullet \vec{n} dS = \iiint_V \mathbf{Div}\vec{q}\, dV \Rightarrow \delta E = \mathbf{Tr}(\sigma\delta\varepsilon) + \delta Q - \delta \mathbf{Div}\, q$$

2[ème] principe

$$\iiint_V \delta S dV - \iiint_V \frac{\delta Q}{T} dV + \delta \iint_S \frac{\vec{q}}{T} \bullet \vec{n} dS \geq 0$$

$$\iint_S \frac{\vec{q}}{T} \bullet \vec{n} dS = \iiint_V \mathbf{Div}\frac{\vec{q}}{T} dV \text{ et } \mathbf{Div}\frac{\vec{q}}{T} = \frac{1}{T}\mathbf{Div}\vec{q} - \frac{\vec{q}\,\mathbf{Grad}T}{T^2} \text{ et } \begin{aligned} &T\delta S - (\delta Q - \delta\mathbf{Div}\vec{q}) = T\delta S - \delta E + \mathbf{Tr}(\overline{\overline{\sigma}}\delta\overline{\overline{\varepsilon}}) \\ &= \mathbf{Tr}(\overline{\overline{\sigma}}\delta\overline{\overline{\varepsilon}}) - (\delta F + S\delta T) \end{aligned} \Rightarrow$$

$$\delta\psi_1 = \mathbf{Tr}(\sigma\delta\varepsilon) - (\delta F + S\delta T)$$ intrinsèque

$$\delta\psi_2 = -\delta\left(\frac{\overrightarrow{q}}{T}\overrightarrow{\mathbf{Grad}}\,T\right)$$ thermique

Incréments de dissipation volumique

$$\delta\psi = \delta\psi_1 + \delta\psi_2 \geq 0$$

VI-4.4 Le Travail de Déformation : Réversibilités Thermique et Mécanique

Dissipation volumique $\delta\psi = \delta\psi_1 + \delta\psi_2$

Thermique $\delta\psi_2 = -\delta\left(\frac{\vec{q}}{T}\overrightarrow{\mathrm{Grad}\,T}\right)$

Mécanique $\delta\psi_1 = \mathrm{Tr}(\sigma\delta\varepsilon) - (\delta F + S\delta T)$

Réversibilité thermodynamique $\delta\psi = 0$

Réversibilité Thermique $\delta\psi_2 = 0$

$$\frac{\vec{q}}{T}\overrightarrow{\mathrm{Grad}\,T} = 0$$

En particulier

$T = Cte$ Isotherme

$q = 0$ Adiabatique

Réversibilité Mécanique $\delta\psi_1 = 0$

$$dF = \mathrm{Tr}(\sigma d\varepsilon) - S\,dT$$

Élasticité parfaite

En Isotherme :

$$dF = \mathrm{Tr}(\sigma d\varepsilon)$$