Système d’équation algébrique

A. Ramadane, Ph.D.

Introduction

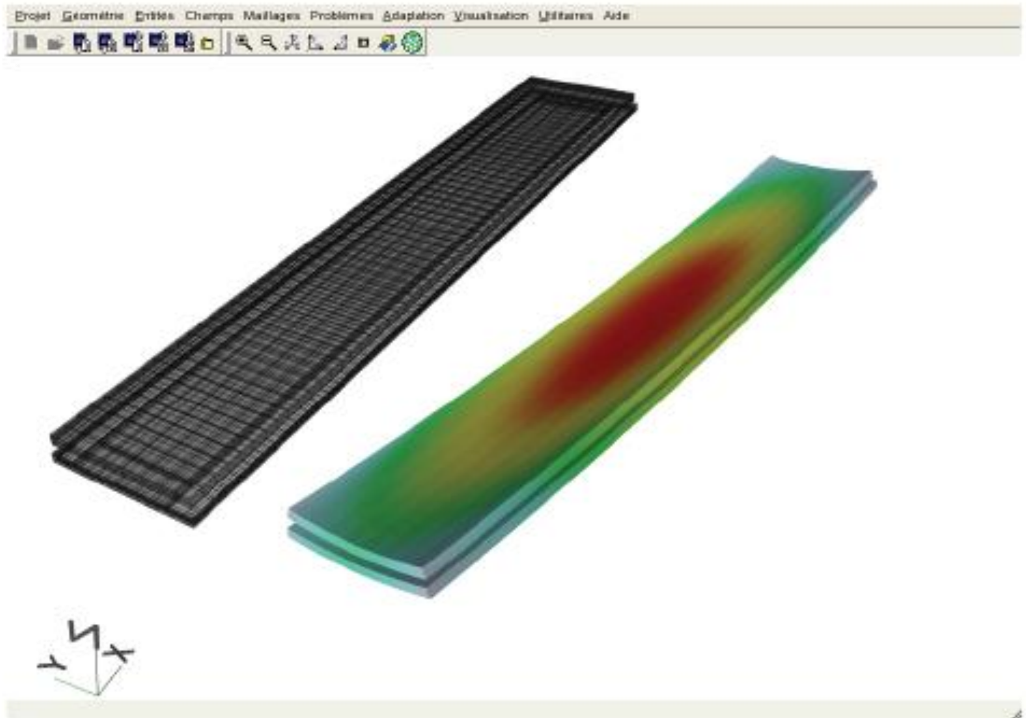
Deux grandes familles :

- les systèmes linéaires : $Ax = b$ où A est une matrice carrée inversible et b un vecteur. (Ou encore $F(x) = Ax - b = 0$)
- les systèmes non linéaires : $F(x) = 0$ où $F : \mathbb{R}^n \to: \mathbb{R}^n$ est une application à n variables.

Beaucoup d'applications dans le domaine de l'ingénierie exigent de résoudre des systèmes d'équations qui comportent souvent un grand nombre d'inconnues. On rencontre ces applications, par exemple, dans les domaines suivants :

- la mécanique des fluides : écoulement de l'air autour d'un avion, écoulement dans une turbine hydraulique, etc.
- la mécanique des solides : déformation d'un matériau soumis à des contraintes extérieures, analyse des structures complexes, etc.

Comportement hygro-mécanique de lames de parquet en services (période de 42 jours, humidité relative augmentée de 20%).



Ce calcul exige de résoudre un premier système linéaire de 35890 équations pour le mouvement de l'humidité puis un système de 107670 équations pour la déformation. Ces deux résolutions sont faites au total 129 fois pour décrire le comportement à divers moment dans le temps.

Système linéaire

Un système d'équations linéaires est un système de n équations linéaires à n inconnues

$$\left\{\begin{array}{lcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & = & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \ldots + a_{nn}x_n & = & b_n \end{array}\right.$$

Exemple :

$$\left\{\begin{array}{c} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 5 \\ 4x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 3 \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \end{array}\right.$$

Écriture matricielle :

$$Ax = b$$

où A dénote la matrice carrée d'ordre n des coefficients du système linéaire et b le vecteur du second membre.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ii} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Exemple : Trouver $x \in \mathbb{R}^3$ solution de

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 4 & -3 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Etude théorique :

Trois énoncés équivalents :

- Le système $Ax = b$ admet une solution unique si et seulement si A est inversible.
- Le système $Ax = b$ admet une solution unique si et seulement si $\det A \neq 0$
- Le système $Ax = b$ admet une solution unique si et seulement si la matrice A est de rang maximal (autant d'inconnues que d'équations et pas d'équation qui se répète).

Dans ce cas la solution est fournie par

- $x = A^{-1}b$
- La formule de Cramer : $x_i = \dfrac{\det A_i}{\det A}$
  où A_i est la matrice A dont la colonne i est remplacée par b.

Les méthodes directes sont basées sur l'observation suivante : si le système a la forme suivante

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1, \\ a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n & = & b_2, \\ a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n & = & b_3, \\ \ddots \quad \vdots & = & \vdots \\ a_{nn}x_n & = & b_n. \end{array}\right.$$

la résolution est immédiate.

$$x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}$$

Pour $k = n-1, \ldots, 1$, faire

$$x_k = \frac{b_k - \sum_{j=k+1}^{n} a_{kj} x_j}{a_{kk}}$$

Cet algorithme nécessite :

- $\frac{n(n-1)}{2}$ additions,
- $\frac{n(n-1)}{2}$ multiplications,
- n divisions.

Rappel des propriétés des matrices

D est une matrice diagonale. L est une matrice triangulaire inférieure. U est une matrice triangulaire supérieure.

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Pour ces matrices, on a $\det D = \det L = \det U = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$

Pour n'importe quelle matrice $n \times n$ inversible (ou non-singulière) A. (c'est-à-dire la matrice A^{-1} existe avec $AA^{-1} = A^{-1}A = I$)

- A^{-1} est unique
- A^{-1} est non-singulière et $(A^{-1})^{-1} = A$
- Soit B une matrice $n \times n$ non-singulière. Alors $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Notons le déterminant d'une matrice carrée A par $\det A$

- Si $A = [a]$ est une matrice 1×1, alors $\det A = a$,
- Si A est une matrice $n \times n$, le mineur M_{ij} est le déterminant de la sous-matrice $(n-1) \times (n-1)$ de A, obtenue en supprimant la i-ième ligne et la j-ième colonne de la matrice A,
- Le cofacteur Aij associé avec M_{ij} est défini par $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$,
- Le déterminant de la matrice $A_{n \times n}$, lorsque $n > 1$ est donné par $\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}$; pour n'importe quel $i = 1, 2, ..., n$

Opération élémentaire

Décrivons les 3 opérations élémentaires sur les lignes pour réduire un système linéaire à la forme triangulaire.

- Multiplication d'une ligne L_i par un scalaire λ non nul :

$$\lambda L_i \longrightarrow L_i$$

- Addition de deux lignes :

$$L_j + \lambda L_i \longrightarrow L_j$$

- permuter deux lignes :

$$L_i \longleftrightarrow L_j$$

A l'opération $\lambda L_i \longrightarrow L_i$ correspond la matrice élémentaire notée par M

$$M = \begin{matrix} \\ \\ \text{ligne } i \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \lambda & \dots & 0 \\ 0 & & \dots & 1 & \dots \\ 0 & \dots & & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Cette matrice est obtenue à partir de la matrice identité I en lui appliquant l'opération $\lambda L_i \longrightarrow L_i$.

A l'opération $L_i \longleftrightarrow L_j$ correspond la matrice élémentaire notée par P (matrice de permutation)

$$P = \begin{array}{r} \\ \\ \text{ligne } j \\ \text{ligne } i \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & & 1 & 0 & \dots \\ 0 & \dots & & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Cette matrice est obtenue à partir de la matrice identité I en lui appliquant l'opération $L_i \longleftrightarrow L_j$.

Soit A une matrice $n \times n$ et notons le i-ième ligne de A par L_i

- Si une ligne ou une colonne de la matrice A n'a que des zéros, alors $\det A = 0$
- Si A a deux lignes ou deux colonnes identiques, alors $\det A = 0$,
- Si $\tilde{A}$ est obtenue de A par l'échange des lignes $L_i \longleftrightarrow L_k$ avec $i \neq k$, alors $\det \tilde{A} = -detA$,
- Si $\tilde{A}$ est obtenue de A par l'opération $\lambda L_i \longrightarrow L_i$, alors $det\tilde{A} = \lambda detA$,
- Si $\tilde{A}$ est obtenue de A par l'opération $L_i + \lambda L_k \longrightarrow L_i$ avec $i \neq k$, alors $det\tilde{A} = detA$,
- Si B est aussi une matrice $n \times n$, alors $\det AB = \det A \det B$,
- $\det A^T = \det A$
- Si A^{-1} existe, alors $\det A^{-1} = (\det A)^{-1}$

Dans l'application de la méthode de Gauss on procède par élimination des termes sous la diagonale en utilisant la notion de la matrice augmentée.

Définition

La matrice augmentée du système $Ax = b$ est la matrice de dimension $n \times n+1$ obtenu en ajoutant le membre de droite b à la matrice A :

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ a_{i1} & \dots & a_{ii} & \dots & a_{in} & b_i \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ a_{n1} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nn} & b_n \end{array}\right]$$

Cette notation est très utile puisque les opérations élémentaires doivent être faites sur la matrice A et sur b simultanément.

La méthode d'élimination de Gauss consiste à utiliser les opérations élémentaires afin de réduire le système sous la forme triangulaire supérieure.

On distingue deux cas :

- Sans pivotement : on ne permet pas la permutation de deux lignes ; pas toujours possible.
- Avec pivotement : on permet la permutation des lignes ; toujours possible si la matrice est inversible.

Soit le système linéaire

$$\left\{\begin{array}{r} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 5 \\ 4x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 3 \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \end{array}\right.$$

La méthode de Gauss donne : soit $\lambda = m_{ji}$ avec $m_{ji} = \frac{a_{ji}}{a_{ii}}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 4 & 4 & -3 & 3 \\ -2 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} (\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots) \\ (L_2 - m_{21}L_1 \longrightarrow L_2) \\ (L_3 - m_{31}L_1 \longrightarrow L_3) \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & -1 & -7 \\ 0 & 6 & -2 & 6 \end{array}\right]$$

$$m_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}} = \frac{4}{2} = 2, \quad m_{31} = \frac{a_{31}}{a_{11}} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & -1 & -7 \\ 0 & 6 & -2 & 6 \end{array}\right] \begin{array}{l} (\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots) \\ (\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots) \\ (L_3 - m_{32}L_2 \longrightarrow L_3) \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & -5 & 15 \end{array}\right]$$

$$m_{32} = \frac{a_{32}}{a_{22}} = \frac{6}{-2} = -3$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 4 & -3 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$U = T_3 \; T_2 \; T_1 \, A = \text{ la matrice triangulaire recherchée}$$

ou encore

$$A = T_1^{-1} \; T_2^{-1} \; T_3^{-1} \; U$$

Or il est facile de calculer l'inverse d'une matrice T correspondant à l'opération élémentaire $L_j + \lambda L_i \longrightarrow L_j$

$$T^{-1} = \begin{array}{r} \\ \\ \text{ligne } i \\ \text{ligne } j \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ 0 & & -\lambda & 1 & \dots \\ 0 & \dots & & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

A partir de la relation

$$A = T_1^{-1}\ T_2^{-1}\ T_3^{-1}\ U$$

on obtient

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 4 & -3 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

On peut facilement évaluer les produits matricielles

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 4 & -3 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 4 & -3 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

Factorisation LU

Soit A une matrice carrée d'ordre n. On a

- Si Les sous-matrices diagonales sont toutes inversibles, i.e.

$$\det \Delta_k \neq 0 \quad \text{avec} \quad \Delta_k = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{11} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix}$$

- OU si A est à diagonale strictement dominante

$$(|a_{ii}| > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|, \text{ ou } |a_{ii}| > \sum_{i=1, i\neq j}^{n} |a_{ij}|, i = 1, \cdots, n)$$

alors il existe une unique décomposition de la forme $A = LU$ où L est triangulaire inférieure et U triangulaire supérieure avec la condition que L soit normalisée, $L_{ii} = 1$, ou bien que U soit normalisée.

Factorisation LU

C'est une factorisation de la matrice A de la forme

$$A = LU$$

où L est une matrice triangulaire inférieure et U est une matrice triangulaire supérieure.

Les avantages de la factorisation $A = LU$:

- permet de résoudre plusieurs systèmes $Ax = b$ avec différents b.
- permet de tenir compte de la structure particulière de la matrice : symétrie, définie positive, tridiagonale, etc.

Soit une factorisation de A sous la forme $A = LU$.

On cherche la solution de $Ax = b$ en deux étapes :

1. On détermine y en résolvant par descente triangulaire
$$Ly = b$$
2. On détermine x en résolvant par remontée triangulaire
$$Ux = y$$

- Par la méthode d'élimination de Gauss : $A = \tilde{L}\ U$ où $\tilde{L}$ est normalisée. (méthode de Doolittle)
- Par la méthode de Crout : $A = L\ \tilde{U}$ où $\tilde{U}$ est normalisée.

L'idée consiste à écrire

$$A = L\,U$$

et de calculer progressivement les ℓ_{ij} et u_{ij}.

Doolittle

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 4 & -3 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \ell_{21} & 1 & 0 \\ \ell_{31} & \ell_{32} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}$$

Crout

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 4 & -3 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ell_{11} & 0 & 0 \\ \ell_{21} & \ell_{22} & 0 \\ \ell_{31} & \ell_{32} & \ell_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Factorisation
  - $\ell_{i1} = a_{i1} \quad i = 1, \dots, n, \; u_{1i} = \frac{a_{1i}}{\ell_{11}} \quad i = 2, \dots, n$
  - $i = 2, \dots, n-1$
    - $\ell_{ii} = a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} \ell_{ik} u_{ki}$
    - $j = i+1, \dots, n$
$$\ell_{ji} = a_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} \ell_{jk} u_{ki}$$
$$u_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} \ell_{ik} u_{kj}}{\ell_{ii}}$$
  - $\ell_{nn} = a_{nn} - \sum_{k=1}^{n-1} \ell_{nk} u_{kn}$
- descente sur $Ly = b$
  - $y_1 = \frac{b_1}{\ell_{11}} \quad y_i = \dfrac{b_i - \sum_{k=1}^{i-1} \ell_{ik} y_k}{\ell_{ii}} \quad i = 2, \dots, n$
- remonté sur $Ux = y$
  - $x_n = y_n \quad x_i = y_i - \sum_{k=i+1}^{n} u_{ik} x_k \quad i = n-1, \dots, 1$

La factorisation LDU d'une matrice A consiste à écrire

$$A = \tilde{L} \; D \; \tilde{U}$$

où $\tilde{L}$ est une matrice triangulaire inférieure normalisée ($\tilde{l}_{ii} = 1$), D est une matrice diagonale et $\tilde{U}$ est une matrice triangulaire supérieure normalisée ($\tilde{u}_{ii} = 1$). Cette factorisation est unique.
A l'aide de la factorisation LU fournie par la méthode de Gauss ou celle de Crout, on peut toujours calculer la factorisation LDU.

Exemple :

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 4 & -3 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si la matrice A est symétrique, la factorisation LDU s'écrit toujours sous la forme

$$A = \tilde{L}\, D\, \tilde{L}^t$$

où $\tilde{L}$ est une matrice triangulaire inférieure normalisée ($\tilde{l}_{ii} = 1$) et D est une matrice diagonale.

Exemple :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Remarques :

- Dans la pratique, on calcule la factorisation LDU par Gauss ou Crout et ensuite on forme la factorisation LDL^t.
- Le stockage de la factorisation LDL^t est le même que celui de A.

Si la matrice A est **symétrique** ($A = A^T$) et **définie-positive** ($x^T Ax > 0, \forall x \neq 0$), on utilise une factorisation de la forme

$$A = L\,L^t$$

connue sous le nom de **factorisation de Cholesky** où L est une matrice triangulaire inférieure, pas nécessairement normalisée.

Exemple :

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ell_{11} & 0 & 0 \\ \ell_{21} & \ell_{22} & 0 \\ \ell_{31} & \ell_{32} & \ell_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell_{11} & \ell_{21} & \ell_{31} \\ 0 & \ell_{22} & \ell_{32} \\ 0 & 0 & \ell_{33} \end{pmatrix}$$

Remarques :

- La factorisation de Cholesky est unique si les $\ell_{ii} > 0$ pour tous les $i = 1, 2, \ldots, n$.
- Sous l'hypothèse que A soit symétrique et définie-positive, on ne peut rencontrer un pivot nul.

Soit A une matrice symétrique carrée d'ordre n. Les énoncés suivants sont équivalents :

- A est une matrice définie positive
- Les déterminants des sous-matrices diagonales de A est strictement positive, i.e.

$$\det \Delta_k > 0 \quad \text{avec} \quad \Delta_k = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{11} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & a_{kk} \end{pmatrix}$$

- Il existe une unique décomposition de la forme $A = LL^t$ où L est triangulaire inférieure avec $\ell_{ii} > 0$
- Il existe une unique décomposition de la forme $A = LDL^t$ où D est une matrice diagonale avec $d_{ii} > 0$ et $\ell_{ii} = 1$.

Si A est à diagonale strictement dominante et si $(a_{ii} > 0)$ alors la matrice A est définie positive.

- Factorisation Cholesky
    - $\ell_{11} = \sqrt{a_{11}}$
    - $i = 2, ..., n$
        - $\ell_{i1} = a_{i1}/\ell_{11}$
    - $k = 2, ..., n$

$$\ell_{kk} = \sqrt{a_{kk} - \sum_{j=1}^{k-1} l_{kj}^2}$$

$$\ell_{ik} = \frac{a_{ik} - \sum_{j=1}^{k-1} \ell_{ij}\ell_{kj}}{\ell_{kk}} \quad i = k+1, ..., n$$

Calcul de la factorisation LU par la méthode de Crout :

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & c_1 & 0 & \dots\dots\dots\dots\dots & & \\ b_1 & a_2 & c_2 & 0 & \dots\dots\dots\dots & \\ 0 & b_2 & a_3 & c_3 & 0 & \dots \\ \vdots & \dots & \ddots & \ddots & \ddots & \dots \\ 0 & \dots\dots\dots & & b_{n-2} & a_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & \dots\dots\dots\dots\dots & & & b_{n-1} & a_n \end{pmatrix} = LU$$

$$\begin{pmatrix} \ell_1 & 0 & 0 & \dots\dots\dots & \\ b_1 & \ell_2 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & b_2 & \ell_3 & 0 & \dots \\ \vdots & \dots & \ddots & \ddots & \dots \\ 0 & \dots\dots\dots & & b_{n-1} & \ell_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & u_1 & 0 & \dots\dots\dots\dots & & \\ 0 & 1 & u_2 & 0 & \dots\dots & \\ 0 & 0 & 1 & u_3 & \dots\dots & \\ \vdots & \dots & \ddots & \ddots & \dots\dots & \\ 0 & \dots\dots\dots\dots & & & 1 & u_{n-1} \\ 0 & \dots\dots\dots\dots & & & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi, on obtient les relations récursives :

$$\begin{array}{rcll} \ell_1 & = & a_1 & \\ \ell_i u_i & = & c_i & \forall i = 1, 2, \ldots, n-1 \\ b_{i-1} u_{i-1} + \ell_i & = & a_i & \forall i = 2, 3, \ldots, n. \end{array}$$

Exemple :(matrice tridiagonale symétrique et définie positive)

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ell_1 & 0 & 0 \\ \ell_4 & \ell_2 & 0 \\ 0 & \ell_5 & \ell_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_4 & 0 \\ 0 & \ell_2 & \ell_5 \\ 0 & 0 & \ell_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$