Université Internationale de Casablanca
LAUREATE INTERNATIONAL UNIVERSITIES
Nous innovons pour votre réussite !

Exercices de bissections et points fixes

A. Ramadane, Ph.D.

Exercice 1

Faire trois itérations de la méthode de bissection pour les fonctions suivantes et à partir des intervalles indiqués. Déterminer le nombre d'itérations nécessaires pour obtenir une solution dont le chiffre des millièmes est significatif.

(a) $f(x) = -0{,}9x^2 + 1{,}7x + 2{,}5$ dans l'intervalle $[2{,}8\,,\ 3{,}0]$

(b) $f(x) = \frac{1-0{,}61x}{x}$ dans l'intervalle $[1{,}5\,,\ 2{,}0]$

(c) $f(x) = x^2|\sin(x)| - 4{,}1$ dans l'intervalle $[0\,,\ 4]$

(d) $f(x) = x^6 - x - 1$ dans l'intervalle $[1\,,\ 2]$

Solution

(a) $x_m = 2{,}9,\ 2{,}85,\ 2{,}875$ (9 itérations)

(b) $x_m = 1{,}75,\ 1{,}625,\ 1{,}6875$ (10 itérations)

(c) $x_m = 2{,}0,\ 3{,}0,\ 3{,}5$ (13 itérations)

(d) $x_m = 1{,}5,\ 1{,}25,\ 1{,}125$ (11 itérations)

Exercice 2

Le polynôme $p(x) = (x^2 - 1)(x^2 - 4)$ possède 4 racines simples. Pour ce polynôme, déterminer vers quelle racine la méthode de la bissection convergera, s'il y a lieu, en partant de chacun des intervalles suivants

i) $[-1{,}5\,,\,3]$

ii) $[-3\,,\,3]$.

Solution

(a) On obtient la racine $r = -1$.

(b) Pas de convergence car ce n'est pas un intervalle avec changement de signe.

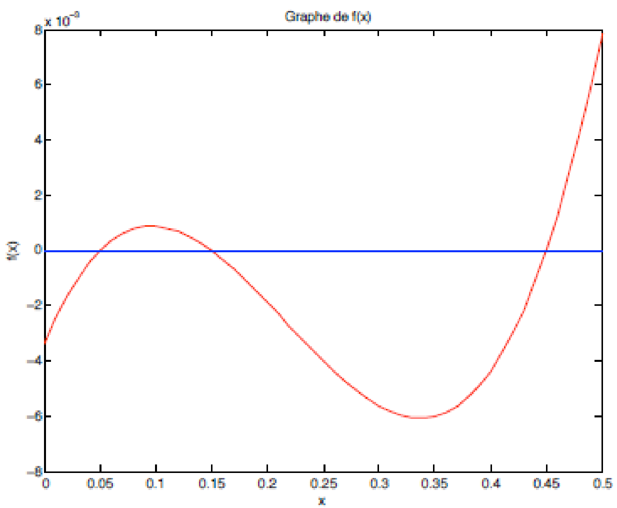
Exercice 3

Soit la fonction $f(x)$ dont le graphe est illustré à la figure suivante.

(a) Un étudiant propose de résoudre l'équation $f(x) = 0$ par la méthode de la bissection à partir de l'intervalle initial $[0\,,\ 0{,}5]$. Expliquer pourquoi cet intervalle est un choix valide pour cette méthode.

(b) Retenant cet intervalle de départ, laquelle des racines est trouvée par la méthode de la bissection? Justifier votre réponse.

(c) Combien d'itérations de la méthode de la bissection seront nécessaires pour obtenir cette racine avec une erreur absolue de 10^{-6} en partant de l'intervalle $[0\,,\ 0{,}5]$?



Solution

(a) $f(0) \times f(0,5) < 0$ donc l'intervalle initial est avec changement de signe.

(b) La racine $r \in [0,25,\ 0,50]$. En effet à la deuxième itération, la méthode de la bissection considère l'intervalle avec changement de signe $[0,25,\ 0,50]$.

(c) Au moins 19 itérations.

Exercice 4

Dans un problème de conjonction de planètes, nous pouvons montrer que la conjocture (ou l'opposition) se produit lorsque le sinus de l'angle entre les deux vecteurs positions des planètes est nul. Sachant que l'angle θ entre les deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ vérifie

$$\sin(\theta) = \frac{\| \vec{u} \times \vec{v} \|_e}{\| \vec{u} \|_e \| \vec{v} \|_e},$$

expliquer pourquoi il est impossible d'utiliser la méthode de la bissection pour résoudre

$$f(x) = \frac{\| \vec{u} \times \vec{v} \|_e}{\| \vec{u} \|_e \| \vec{v} \|_e} = 0$$

et transformer le problème de manière à pouvoir utiliser la méthode de la bissection.

Solution

Soit $u = (u_1, u_2)^t$ et $v = (v_1, v_2)^t$, alors on a $\| \vec{u} \times \vec{v} \|_e = |u_1 v_2 - u_2 v_1|$ et $f(t) = \frac{\|\vec{u}\times\vec{v}\|_e}{\|\vec{u}\|_e\|\vec{v}\|_e} = \frac{|u_1 v_2 - u_2 v_1|}{\|\vec{u}\|_e\|\vec{v}\|_e} \geq 0$, par consequent, il n'existe pas d'intervalle avec changement de signe. Pour pouvoir utiliser la bissection, on pose $f(t) = \frac{(u_1 v_2 - u_2 v_1)}{\|\vec{u}\|_e\|\vec{v}\|_e}$, ou $f(t) = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{u}\|_e\|\vec{v}\|_e} - 1$ (conjoction) ou $f(t) = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{u}\|_e\|\vec{v}\|_e} + 1$ (opposition).

Exercice 5

Considérons la fonction $f(x) = x^3 - x^2 - 1$. Après avoir vérifié que cette fonction possède une racine réelle r dans l'intervalle $[1, 2]$, déterminer le nombre d'itérations de la méthode de bissection qui seront nécessaires (sans les faire) pour obtenir une approximation de r à 10^{-10} près.

Solution

La racine est dans l'intervalle $[1, 2]$, car $f(1) \times f(2) < 0$. Il faut au moins $n = 34$ itérations

Exercice 6

On cherche à résoudre l'équation

$$e^x - 3x^2 = 0,$$

qui possède les deux racines $r_1 = -0,4589623$ et $r_2 = 0,91$ ainsi qu'une troisième racine située près de $x = 4$. On vous propose les méthodes des points fixes suivantes pour obtenir r_1:

- $x = g_1(x) = -\sqrt{\dfrac{e^x}{3}}$;
- $x = g_2(x) = -\left(\dfrac{e^x - 3x^2 - 3,385712869x}{3,385712869}\right)$;
- $x = g_3(x) = -\left(\dfrac{e^x - 3x^2 - 3,76189x}{3,76189}\right)$.

(a) Lesquelles, parmi ces trois méthodes des points fixes, sont susceptibles de converger vers r_1? (Ne pas calculer les itérations.)

(b) Déterminer celle qui produit une convergence quadratique vers r_1.

(c) La méthode de la bissection convergera-t-elle vers l'une des racines si l'on prend $[-1\,,\,0]$ comme intervalle de départ?

Solution

(a) r_1 est attractif ($g_1'(r_1) = -0,2294$), r_1 est attractif ($g_2'(r_1) = 0$) et r_1 est attractif ($g_3'(r_1) = -0,099$).

(b) La fonction $g_2(x)$ converge quadratiquement.

(c) Oui, car il y a un changement de signe.

Exercice 7

On a calculé une racine de

$$f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$$

en utilisant l'algorithme des points fixes

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\sqrt{10 - x_n^3}.$$

On a obtenu les résultats du tableau suivant.

n	x_n	$\lvert e_n \rvert$	$\lvert \frac{e_{n+1}}{e_n} \rvert$
1	1,500 00	0,134 77	0,580 84
2	1,286 95	0,078 28	0,476 62
3	1,402 54	0,037 31	0,529 88
4	1,345 46	0,019 77	0,502 78
5	1,375 17	0,009 94	0,517 10
6	1,360 09	0,005 14	0,509 72
7	1,367 85	0,002 62	0,511 45
8	1,363 89	0,001 34	0,514 92
9	1,365 92	0,000 69	
⋮	⋮	⋮	⋮
17	1,365 23	0,000 00	

Les résultats des deux dernières colonnes ont été obtenus en considérant que la valeur exacte de la racine est $r = 1,365\,23$.

(a) Expliquer pourquoi la méthode itérative précédente a convergé.

(b) Les valeurs de $\lvert \frac{e_{n+1}}{e_n} \rvert$ semblent converger vers $0,51$. Expliquer ce résultat et donner la valeur exacte vers laquelle le quotient $\lvert \frac{e_{n+1}}{e_n} \rvert$ devrait converger.

(c) Quel est l'ordre de convergence de la méthode utilisée?

Solution

(a) $g'(r) \simeq 0,51 < 1$.

(b) $g'(1,365\,23($= $0,511\,96$.

(c) La convergence est linéaire car $g'(1,365\,23) \neq 0$ et $|g'(1,365\,23)| < 1$.

Exercice 6

On vous propose la méthode des points fixes suivante pour évaluer la racine cubique $\sqrt[3]{N}$ d'un nombre N:

$$x_{n+1} = \frac{2x_n}{3} + \frac{N}{3x_n^2}.$$

(a) Est-ce que $\sqrt[3]{N}$ est un point fixe de cet algorithme?

(b) Quel est l'ordre de convergence exact (théorique) de cette méthode des points fixes?

(c) On a appliqué cet algorithme pour le calcul de $\sqrt[3]{100}$ en partant de $x_0 = 5$ et l'on a obtenu le tableau suivant:

n	x_n	$\|e_n\|$
0	5,500 000 000	$0{,}358\,41 \times 10^{+0}$
1	4,666 666 667	$0{,}250\,77 \times 10^{-1}$
2	4,641 723 356	$0{,}134\,52 \times 10^{-3}$
3	4,641 588 837	$0{,}389\,86 \times 10^{-8}$
4	4,641 588 833	

On considérera que la valeur x_4 est la valeur exacte de $\sqrt[3]{100}$. En complétant au besoin le tableau précédent, interpréter ces résultats numériques de manière à confirmer (ou infirmer) les résultats théoriques obtenus en (b).

Solution

(a) On pose $g(x) = \frac{2x}{3} + \frac{N}{3x^2}$ et on vérifie aisément que $g(\sqrt[3]{N}) = \sqrt[3]{N})$.

(b) On a aussi

$$g'(x) = \frac{2}{3} - \frac{2N}{3x^3} \quad g''(x) = \frac{2N}{x^4}$$

de sorte que $g'(\sqrt[3]{N})) =$ et $g''(\sqrt[3]{N})) = \frac{2}{\sqrt[3]{N})} \neq 0$. On a donc une convergence quadratique.

(c) On complète le tableau La colonne $|\frac{e_{n+1}}{e_n}|$ converge vers $g'(r)$ qui est 0. La colonne

n	$\lvert\frac{e_{n+1}}{e_n}\rvert$	$\lvert\frac{e_{n+1}}{e_n^2}\rvert$
0	0,069 9670	0,195 21
1	0,005 3642	0,213 91
2	0,000 0289	0,215 44

$|\frac{e_{n+1}}{e_n^2}|$ converge $\frac{g''(r)}{2} = \frac{1}{\sqrt[3]{100}} = 0,215\,44$. La correspondance est très bonne.