On considère le système non-linéaire

$$\begin{cases} y - \sin(\pi x) = 0 \\ y + x^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

(a) Déterminer graphiquement le nombre de solutions et leur position position approximative sur l'intervalle $[-1\,,\,1]$.

(b) Donner le système d'équations *linéaires* à résoudre à la première itération de la *méthode de Newton*, pour l'approximation initiale $(x_0, y_0) = (1/2, 1)$ (ne pas résoudre le système linéaire).

(c) Est-ce que la méthode de Newton va converger rapidement vers la racine $(1, 0)$ de ce système d'équations non linéaires? *Justifier* votre réponse.

(d) Déterminer et identifier graphiquement le lieu des approximations initiales $(x^0\,,\,y^0)$ pour lesquelles la méthode de Newton ne fonctionne pas.

Solution

(a) Il s'agit de trouver graphiquement sur l'intervalle $[-1\,,1]$, les intersections de la courbe $y = \sin(\pi x)$ et la parabole $y = 1-x^2$. On trouve 3 intersections $(-1\,,\,0)$ $(1\,,\,0)$ et proche de $(1/2\,,\,1)$.

(b) Le vecteur résidu et la matrice jacobienne s'écrivent:

$$\vec{R}(x,y) = \begin{pmatrix} y - \sin(\pi x) \\ y + x^2 - 1 \end{pmatrix} \quad J(x,y) = \begin{pmatrix} -\pi\cos(\pi x) & 1 \\ 2x & 1 \end{pmatrix}.$$

Il faut résoudre le système linéaire:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

(c) La matrice jacobienne est inversible en la solution $[1 \quad 0]^T$ donc la méthode de Newton converge á l'ordre 2.

(d) Pour une approximation initiale (x^0, y^0) donnée, la méthode de Newton ne fonctionne pas si $\text{dét}(J(x^0, y^0)) = 0$. Il s'agit de trouver graphiquement l'intersection entre la droite $y = 2x_0$ et la courbe $y = -\pi\cos(\pi x^0)$.