Université Internationale de Casablanca

LAUREATE INTERNATIONAL UNIVERSITIES

Université Privée Autorisée par l'Etat UP2/11

Ecole d'ingénierie

Examen final d'analyse numérique

Durée (1h 40)

Prof. A.Ramadane, Ph.D.

Exercice 1 (6 points)

a) Résoudre le système par la décomposition L U

$$\begin{cases} 2\,X_1 \;+3\,X_2 - \;X_3 \quad = \sqrt{2} \\ 4\,X_1 \;+4\,X_2 - \;3X_3 \;= 0 \\ -2\,X_1 + 3\,X_2 - \;X_3 \;\;= 2 \end{cases}$$

b) Si on perturbe le second membre est ce que la solution change d'une manière significative.

c) Décrire comment peut-on trouver l'inverse de la matrice du système (sans faire beaucoup de calcul).

Exercice 2 (8 points)

On veut calculer une approximation de $r = \ln a$ pour $a > 0$ donné. Pour ce faire, on considère le problème équivalent $f(x) = a - e^x = 0$. On suggère d'utiliser une méthode de point fixe et on propose les 3 fonctions suivantes:

- $g_1(x) = x - (e^x - a)$;
- $g_2(x) = x - \dfrac{(e^x - a)}{a}$;
- $g_3(x) = x - \dfrac{(e^x - a)}{e^x}$.

(a) Pour la fonction $g_1(x)$, caractériser la nature du point fixe $r = \ln a$ (répulsif, attractif ou indeterminé).

(b) Donner le taux et l'ordre de convergence de la méthode de point fixe associée à la fonction $g_1(x)$ pour laquelle $r = \ln a$ est attractif.

(c) En remarquant que la fonction $g_3(x)$ est la méthode de point fixe de Newton pour le problème $f(x) = 0$, donner une interprétation géometrique de la méthode de point fixe appliquée à la fonction $g_2(x)$.

(d) Compte-tenu de l'ordre de convergence et du temps de calcul nécessaire, sur quelle fonction appliquerez-vous la méthode de point fixe pour déterminer le point $r = \ln a$.

(e) Trouver les valeurs de α et β telles que la combinaison linéaire

$$g_{\alpha,\beta}(x) = \alpha g_2(x) + \beta g_3(x),$$

possède $x = \ln a$ comme point fixe super-attractif, c'est à dire de convergence d'ordre 3.

Exercice 3 (6 points)

a) La méthode de Newton est utilisée pour résoudre l'équation f(x)=0 est donnée par

$$X_{n+1} = X_n - \frac{f(X_n)}{f'(X_n)}$$

En écrivant la suite sous la forme d'un problème de point fixe, résumer les résultats de cours en donnant le taux de convergence et l'ordre de la méthode selon la nature de la racine (simple ou multiple). (Faite la démonstration pour le cas d'une racine simple seulement)

b) **Application** : Dans cette application, nous analysons le comportement de la méthode de Newton pour trouver la racine r =1 de la fonction :

$$f(x) = x^5 - 3x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 3x - 1$$

Le script MATLAB suivant a permis d'obtenir les résultats présentés ci-bas.

```
[x,err] = newton('fonc','dfonc',1.20,20,1.0e-4);
ratio1 = err(2:end-1)./err(1:end-2);
ratio2 = err(2:end-1)./err(1:end-2).^2;
exout()
```

La fonction `exout()` permet d'afficher, dans un tableau de deux colonnes, les valeurs des vecteurs $ratio1$ et $ratio2$.

ratio1	ratio2
6.8695e-01	3.4373e+00
6.8081e-01	4.9590e+00
6.7620e-01	7.2347e+00
6.7278e-01	1.0645e+01
6.7018e-01	1.5761e+01
6.6809e-01	2.3445e+01
6.6619e-01	3.4992e+01
6.6418e-01	5.2368e+01
6.6173e-01	7.8555e+01
6.5839e-01	1.1811e+02
6.5355e-01	1.7808e+02
6.4622e-01	2.6942e+02

Déterminer l'ordre de la convergence de la méthode de Newton à l'aide des résultats présentés dans le tableau et en déduire la nature de la racine r=1