Université Internationale de Casablanca

LAUREATE INTERNATIONAL UNIVERSITIES

Université Privée Autorisée par l'Etat UP2/11

Ecole d'ingénierie

Contrôle d'analyse numérique

N° 1

Durée (2h)

Prof. A.Ramadane, Ph.D.

Exercice 1 (5 points)

On considère le système linéaire

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1.0001 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6.0000 \\ 6.0005 \end{pmatrix}$$

Dont la solution exacte est $X = (5 \quad 0.2)^T$.

a) Calculer les résidus r_1 et r_2 correspondant respectivement aux solutions approximatives $x_1 = (5.1 \quad 0.3)^T$ et $x_2 = (1 \quad 1)^T$ et en déduire les quantités $|| r_1 ||_{inf}$ et $|| r_2 ||_{inf}$. Commenter les résultats obtenus.

b) Si on perturbe le membre de droite du système en le remplacant par $(6 \quad 6)^7$, on obtient la solution $(0 \quad 1.2)^T$. Quelle conclusion peut-on tirer de ce résultat ?

c) Expliquer les résultats obtenus en (a) et (b) en calculant toutes les quantités pertinentes . Effectuer les calculs en norme $|| \, . \, ||_{inf}$

Exercice 2 (5 points)

a) Résoudre le système par la décomposition L U

$$\begin{cases} 2\,X_1 + 3\,X_2 - X_3 = 1 \\ 4\,X_1 + 4\,X_2 - 3X_3 = 0 \\ -2\,X_1 + 3\,X_2 - X_3 = 2 \end{cases}$$

b) En utilisant la question a) résoudre le système

$$\begin{cases} 2\,X_1 + 3\,X_2 - X_3 = 5 \\ 4\,X_1 + 4\,X_2 - 3X_3 = 3 \\ -2\,X_1 + 3\,X_2 - X_3 = 1 \end{cases}$$

c) En utilisant a)

Trouver l'inverse de la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 4 & -3 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

Exercice 3 (7 points)

On considère la méthode du pont fixe $X_{n+1}=g(X_n)$, X_0 donné.

a) Discuter la convergence de la suite vers le point fixe r en donnant le taux de convergence et l'ordre de la méthode du point fixe.

b) La méthode de Newton est utilisée pour résoudre l'équation f(x)=0 est donnée par

$$X_{n+1} = X_n - \frac{f(X_n)}{f'(X_n)}$$

En écrivant la suite sous la forme d'un problème de point fixe, résumer les résultats de cours en donnant le taux de convergence et l'ordre de la méthode selon la nature de la racine (simple ou multiple). (Faite la démonstration pour le cas d'une racine simple seulement)

Application : Dans cette application, nous analysons le comportement de la méthode de Newton pour trouver la racine r =1 de la fonction :

$$f(x) = x^5 - 3x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 3x - 1$$

Le script MATLAB suivant a permis d'obtenir les résultats présentés ci-bas.

```
[x,err] = newton('fonc','dfonc',1.20,20,1.0e-4);
ratio1 = err(2:end-1)./err(1:end-2);
ratio2 = err(2:end-1)./err(1:end-2).^2;
exout()
```

La fonction `exout()` permet d'afficher, dans un tableau de deux colonnes, les valeurs des vecteurs $ratio1$ et $ratio2$.

ratio1	ratio2
6.8695e-01	3.4373e+00
6.8081e-01	4.9590e+00
6.7620e-01	7.2347e+00
6.7278e-01	1.0645e+01
6.7018e-01	1.5761e+01
6.6809e-01	2.3445e+01
6.6619e-01	3.4992e+01
6.6418e-01	5.2368e+01
6.6173e-01	7.8555e+01
6.5839e-01	1.1811e+02
6.5355e-01	1.7808e+02
6.4622e-01	2.6942e+02

Déterminer l'ordre de la convergence de la méthode de Newton à l'aide des résultats présentés dans le tableau et en déduire la nature de la racine r=1

Exercice 4 (3points)

a) Donner une interpretation graphique de la méthode de Newton.

b) On considère une variante de la méthode de Newton donnée par

$$X_{n+1} = X_n - \frac{f(X_n)}{f'(X_0)}$$

Donner une interprétation géométrique de cette méthode

c) On aimerait se servir de cette méthode pour évaluer la racine de l'équation $x^2-2=0$. Donner une condition nécessaire sur x_0 pour que la méthode converge vers $\sqrt{2}$ à l'ordre 1.

d) Déterminer la valeur de X_0 pour la quelle la convergence est quadratique