Université Internationale de Casablanca
LAUREATE INTERNATIONAL UNIVERSITIES
Université Privée Autorisée par l'Etat UP2/11

Ecole d'ingénierie

Contrôle d'analyse numérique

N° 1

Durée (2h)

Prof. A.Ramadane, Ph.D.

Exercice 1 (5 points)

On considère le système linéaire $A\vec{x} = \vec{b}$ suivant:

$$\begin{bmatrix} 0,780 & 0,563 \\ 0,913 & 0,659 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,217 \\ 0,254 \end{bmatrix} \qquad (9)$$

dont la solution exacte est $\vec{x} = [1\ -1]^T$. En résolvant le système (9) à l'aide d'une méthode numérique, on a trouvé une solution approximative $\vec{x}^*$ dont le résidu est donné par

$$\vec{b} - A\vec{x}^* = \begin{bmatrix} 0,000\,001 \\ 0,0 \end{bmatrix}.$$

Sachant que $\|A^{-1}\|_\infty = 1,693 \times 10^6$, est-ce que la solution approximative $\vec{x}^*$ vous semble acceptable? Justifier votre réponse.

Soit $\vec{x^*}$ une solution numérique du système linéaire $A\vec{x} = \vec{b}$, telle que $\frac{\|\vec{r}\|_\infty}{\|\vec{b}\|_\infty} \leq 10^{-5}$ où $\vec{r} = \vec{b} - A\vec{x^*}$ représente le résidu associé à $\vec{x^*}$. Si on accepte une solution sous l'hypothèse que la valeur de l'erreur relative $E_r(\vec{x}) = \frac{\|\vec{x}-\vec{x^*}\|_\infty}{\|\vec{x}\|_\infty} \leq 10^{-4}$, quelle doit être la valeur maximale du conditionnement de A pour accepter $\vec{x^*}$?

Exercice 2 (5 points)

a) Résoudre le système par la décomposition L U

$$\begin{cases} 2\,X_1 + 3\,X_2 - X_3 = 1 \\ 4\,X_1 + 4\,X_2 - 3X_3 = 0 \\ -2\,X_1 + 3\,X_2 - X_3 = 2 \end{cases}$$

b) En utilisant la question a) résoudre le système

$$\begin{cases} 2\,X_1 + 3\,X_2 - X_3 = 5 \\ 4\,X_1 + 4\,X_2 - 3X_3 = 3 \\ -2\,X_1 + 3\,X_2 - X_3 = 1 \end{cases}$$

c) En utilisant a)

Trouver l'inverse de la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 4 & -3 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

Exercice 3 (6 points)

On considère la méthode du pont fixe $X_{n+1}=g(X_n)$, X_0 donné.

a) Discuter la convergence de la suite vers le point fixe r en donnant le taux de convergence et l'ordre de la méthode du point fixe.

b) La méthode de Newton est utilisée pour résoudre l'équation f(x)=0 est donnée par

$$X_{n+1} = X_n - \frac{f(X_n)}{f'(X_n)}$$

En écrivant la suite sous la forme d'un problème de point fixe, résumer les résultats de cours en donnant le taux de convergence et l'ordre de la méthode selon la nature de la racine (simple ou multiple). (Faite la démonstration pour le cas d'une racine simple seulement)

<u>Application</u> : Dans cette application, nous analysons le comportement de la méthode de Newton pour trouver la racine r =1 de la fonction :

$$f(x) = x^5 - 3x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 3x - 1$$

Le script MATLAB suivant a permis d'obtenir les résultats présentés ci-bas.

```
[x,err] = newton('fonc','dfonc',1.20,20,1.0e-4);
ratio1 = err(2:end-1)./err(1:end-2);
ratio2 = err(2:end-1)./err(1:end-2).^2;
exout()
```

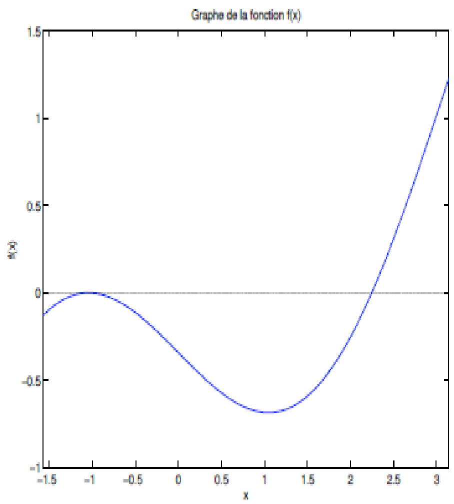
La fonction `exout()` permet d'afficher, dans un tableau de deux colonnes, les valeurs des vecteurs $ratio1$ et $ratio2$.

ratio1	ratio2
6.8695e-01	3.4373e+00
6.8081e-01	4.9590e+00
6.7620e-01	7.2347e+00
6.7278e-01	1.0645e+01
6.7018e-01	1.5761e+01
6.6809e-01	2.3445e+01
6.6619e-01	3.4992e+01
6.6418e-01	5.2368e+01
6.6173e-01	7.8555e+01
6.5839e-01	1.1811e+02
6.5355e-01	1.7808e+02
6.4622e-01	2.6942e+02

Déterminer l'ordre de la convergence de la méthode de Newton à l'aide des résultats présentés dans le tableau et en déduire la nature de la racine r=1

Exercice 4 (4points)

On veut calculer les deux racines de la fonction $f(x) = \frac{x}{2} - \sin(x) + \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}$ dans l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, \pi]$. Le graphe de la fonction f est illustré à la figure suivante:



(a) Peut-on appliquer la méthode de la bissection pour calculer chacune des deux racines? Pourquoi?

(b) À l'aide du graphe de la fonction f, discuter de l'ordre de convergence de la méthode de Newton pour les deux racines.

(c) On considère maintenant la méthode de point fixe:

$$x_{n+1} = \sin(x_n) + \frac{x_n}{2} - \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

pour calculer la racine $r > 0$. En observant que $r \in \left[\frac{2\pi}{3}, \pi\right]$, déterminer la nature du point fixe (attractif, répulsif ou indéterminé).