Conditionnement des matrices

A.Ramadane, Ph.D.

Une norme vectorielle associe à chaque vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ une quantité positive notée par $\|x\| \geq 0$ vérifiant les propriétés suivantes :

1. $\|x\| = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 0$
2. $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\| \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ l'inégalité du triangle

- Norme euclidienne : $\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$
- Norme infinie : $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$
- Norme ℓ_1 : $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$

Si $x = (-1, 2, -3)$, on a que

$$\|x\|_2 = \sqrt{14}, \qquad \|x\|_\infty = 3, \qquad \|x\|_1 = 6.$$

Une norme matricielle associe à chaque matrice A une quantité positive notée par $\|A\| \geq 0$ vérifiant les propriétés suivantes :

1. $\|A\| = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad A = 0$
2. $\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\| \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$
3. $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$ l'inégalité du triangle
4. $\|A\, B\| \leq \|A\|\, \|B\|$

- $\|A\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$
- $\|A\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$
- Norme de Frobenius : $\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i,j} a_{ij}^2}$

Exemple : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & -4 \end{pmatrix}$

$\|A\|_\infty = \max\{6, 10, 7\} = 10, \quad \|A\|_1 = \max\{6, 8, 9\} = 9, \quad \|A\|_F = \sqrt{71}$

Une norme vectorielle et une norme matricielle sont dites compatibles si la condition :

$$\|Ax\| \leq \|A\| \, \|x\|$$

est valide quels que soient la matrice A et le vecteur x.

Remarques :

- Les normes $\|x\|_\infty$ et $\|A\|_\infty$ sont compatibles.
- Les normes $\|x\|_1$ et $\|A\|_1$ sont compatibles.
- Aucune norme vectorielle est compatible avec la norme de Frobenius.

Le conditionnement d'une matrice A est défini par

$$\text{cond } A = \|A\| \, \|A^{-1}\|$$

Il s'agit du produit de la norme de A et de la norme de son inverse.

Etant donné un système linéaire $Au = b$, le résidu d'un vecteur x est définie par

$$r = b - Ax$$

Si le résidu est nul ($r = 0$), cela signifie que le vecteur x est la solution du système linéaire $Au = b$.

Soit un système linéaire $Ax = b$ de solution exacte x. Dans les applications, il y a des imprécisons sur les composantes de la matrice et du second membre. Dans ce qui suit, on va considérer seulement l'effet des erreurs sur le vecteur b.
Soit le système perturbé

$$A\hat{x} = A(x - e) = \hat{b} = b - r$$

où $e = x - \hat{x}$ mesure l'écart entre x et $\hat{x}$ et $r = b - A\hat{x}$

Objectif : trouver une relation entre les erreurs relatives

$$\frac{\|r\|}{\|b\|} \qquad \text{et} \qquad \frac{\|e\|}{\|x\|} = \frac{\|x - \hat{x}\|}{\|x\|}$$

On obtient le résultat important suivant :

Bornes du conditionnement

$$\frac{1}{\text{cond } A} \frac{\|r\|}{\|b\|} \leq \frac{\|x - \hat{x}\|}{\|x\|} \leq \text{cond } A \frac{\|r\|}{\|b\|}$$

On a aussi une borne inférieure pour le conditionnement

$$\text{cond } A \geq \max\left(\frac{\|x - \hat{x}\| \|b\|}{\|x\| \|r\|}, \frac{\|r\| \|x\|}{\|b\| \|x - \hat{x}\|}\right)$$

- Si cond A est près de 1, la matrice A est bien-conditionnée.
- Si cond A est grand, la matrice A est mal-conditionnée.

Exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1.0001 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3.0001 \end{pmatrix}$$

La solution exacte est $x = (1,1)^t$. Le résidu pour la solution $x^* = (3,0)^t$ est $r = b - Ax^* = (0, -0.0002)^t$.
On a $\|r\|_\infty = 0.0002$ qui est relativement petit mais la solution $x^* = (3,0)^t$ est erronée, en effet $\|x - x^*\|_\infty = 2$.

$A^{-1} = \begin{pmatrix} -10000 & 10000 \\ 5000.5 & -5000 \end{pmatrix}$, $\|A\|_\infty = 3.0001$ et $\|A^{-1}\|_\infty = 20000$
cond $A = \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty = 60002$

$$1.1e-09 = \frac{1}{\text{cond } A} \frac{\|r\|}{\|b\|} \leq \frac{\|x - \hat{x}\|}{\|x\|} \leq \text{cond } A \, \frac{\|r\|}{\|b\|} = 4$$