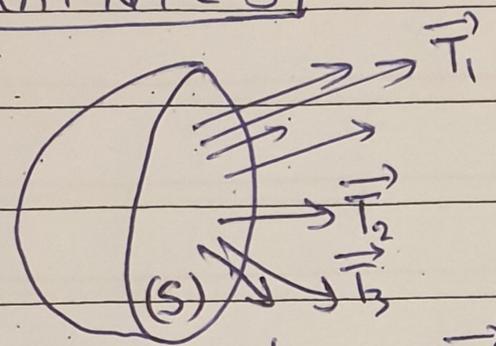


1

L'essentiel de ce qui il faut savoir
MMC - Elasticité - Plasticité

CONTRAINTES

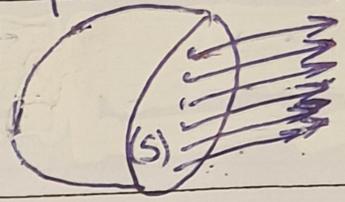


Contraintes non homogènes (\vec{T} varie d'un point à l'autre)

$$\vec{T} = \frac{d\vec{F}}{dS} \quad \text{ou} \quad \vec{F} = \iint_{(S)} \vec{T} \cdot dS$$

contraintes homogènes: \vec{T} est le même quel que soit le point de (S)

$$\vec{F} = \vec{T} \iint_{(S)} dS \Rightarrow \vec{F} = \vec{T} \cdot S$$



\vec{T} (\vec{T} est le même en tout point)

\vec{n} étant un vecteur unitaire normal à (S):

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = \vec{\sigma} \cdot \vec{n}$$

$\vec{\sigma}$ est le tenseur des contraintes

(représenté par une matrice d'ordre 3 réelle et symétrique)

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad \forall i, \forall j \text{ de } 1 \text{ à } 3$$

Au point M, il existe une infinité de facettes donc une infinité de vecteur contrainte $\vec{T}(M)$. Pour qu'il soit unique, il faut fixer le point M mais également la facette (c'est à dire son vecteur normal unitaire \vec{n}): $\vec{T}(M, \vec{n}) = \vec{\sigma} \cdot \vec{n}$ avec $\|\vec{n}\| = 1$.

Au point M il existe un repère dit repère principal de contraintes, dans lequel: le tenseur est diagonal, sa matrice est alors:

$$\vec{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}$$

$(\sigma_1; \sigma_2; \sigma_3)$ sont les contraintes principales qui ne sont autres que les valeurs propres de la matrice $\vec{\sigma}$; on adopte la convention: $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$

Invariants: Toute matrice d'ordre 3 possède 3 invariants indépendants: Un invariant est un scalaire qui a la même valeur quelle que soit la base adoptée (dans laquelle on le calcule)

On utilise souvent les 3 invariants suivants :

$$I_1 = \text{Trace } \bar{\sigma} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$$

$$I_2 = \text{Trace comatrice } \bar{\sigma} = \sigma_{11} \begin{vmatrix} \sigma_{22} & \sigma_{32} \\ \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{vmatrix} + \sigma_{22} \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{31} \\ \sigma_{13} & \sigma_{33} \end{vmatrix} + \sigma_{33} \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{21} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{vmatrix}$$

$$= \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1$$

$$I_3 = \det \bar{\sigma} = \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_3$$

Pour calculer les contraintes principales σ_1, σ_2 et σ_3 on résout l'équation caractéristique : $\det(\bar{\sigma} - \sigma I) = 0$

Rappel: Une direction \vec{n} est dite principale lorsque :

$\vec{T}(M, \vec{n})$ est colinéaire (parallèle) à \vec{n} c'est-à-dire :

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = \bar{\sigma} \cdot \vec{n} = \sigma \cdot \vec{n} ; \sigma \text{ est un réel}$$

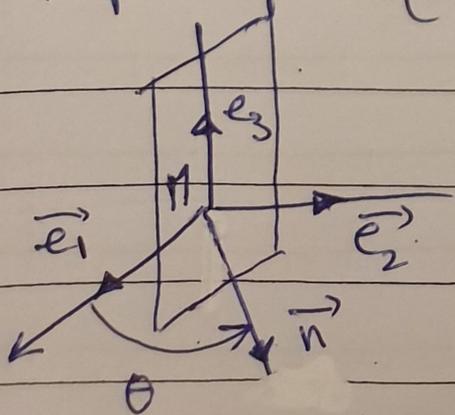
qu'on appelle contrainte principale correspondante à la direction principale \vec{n}
Cercle de MOHR des contraintes ; Tricercle de MOHR :

On considère le repère principal : $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$; la matrice du tenseur des contraintes s'écrit alors :

$$\bar{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}$$

Considérons une face qui pivote autour de \vec{e}_3 (c'est à dire qui contient \vec{e}_3) ; son vecteur normal unitaire \vec{n} se trouve dans le plan principal (\vec{e}_1, \vec{e}_2) ; soit $\theta = (\vec{e}_1, \vec{n})$

$\vec{n} = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}$ soit \vec{n} le vecteur unitaire normal à \vec{n} et contenu dans le plan (\vec{e}_1, \vec{e}_2)



ses coordonnées sont donc $\vec{n} = \begin{pmatrix} \cos(\theta + \pi/2) \\ \sin(\theta + \pi/2) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix}$

On appelle plan de MOHR, le plan ayant pour axe des abscisses σ_{nn} et pour axe des ordonnées τ_{nr} (c'est à dire les projections de $\vec{T}(M, \vec{n})$ respectivement sur \vec{n} et sur \vec{r})

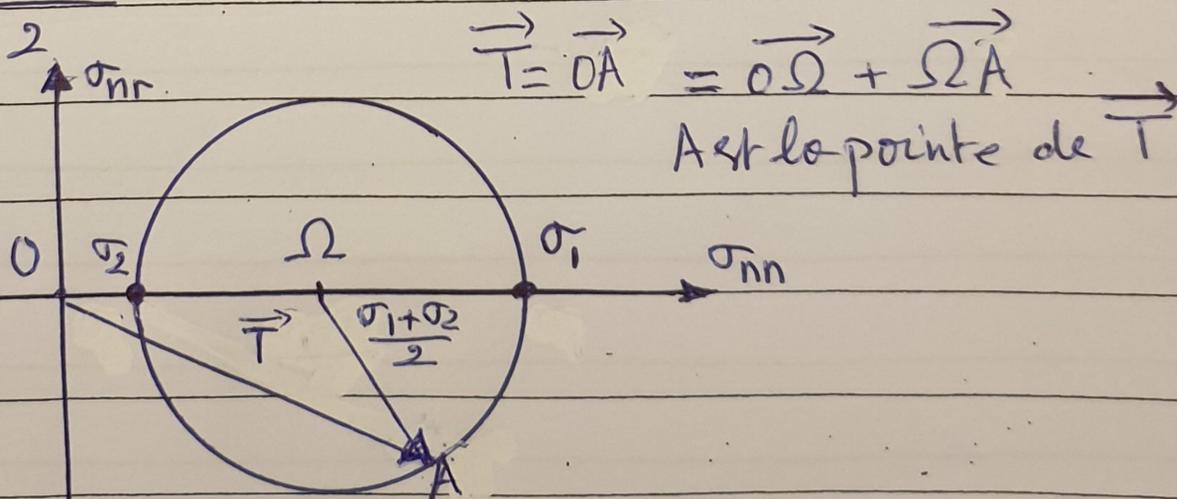
$$\vec{T}(M, \vec{n}) = \begin{cases} \sigma_{nn} = \vec{t}_{\vec{n}} \cdot \vec{T} = (\cos\theta \ \sin\theta \ 0) \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} \\ \tau_{nr} = \vec{t}_{\vec{r}} \cdot \vec{T} = (-\sin\theta \ \cos\theta \ 0) \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

tout calcul fait (voir cours):

$$T(M, \vec{n}) = \begin{cases} \sigma_{nn} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos(-2\theta) \\ \tau_{nr} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin(-2\theta) \end{cases}$$

Dans le plan de MOHR, la pointe du vecteur $\vec{T}(M, \vec{n})$ décrit donc un cercle (dit cercle de MOHR) ayant pour centre $\Omega = \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}, 0 \right)$

et pour rayon: $R = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$



le raisonnement fait pour la facette qui pivote autour de \vec{e}_3 , peut être fait également pour la facette pivotant autour de \vec{e}_2 et on obtient le cercle d'équations paramétriques:

$$\begin{cases} \sigma_{nn} = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \cos(-2\theta) \\ \tau_{nr} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \sin(-2\theta) \end{cases}$$

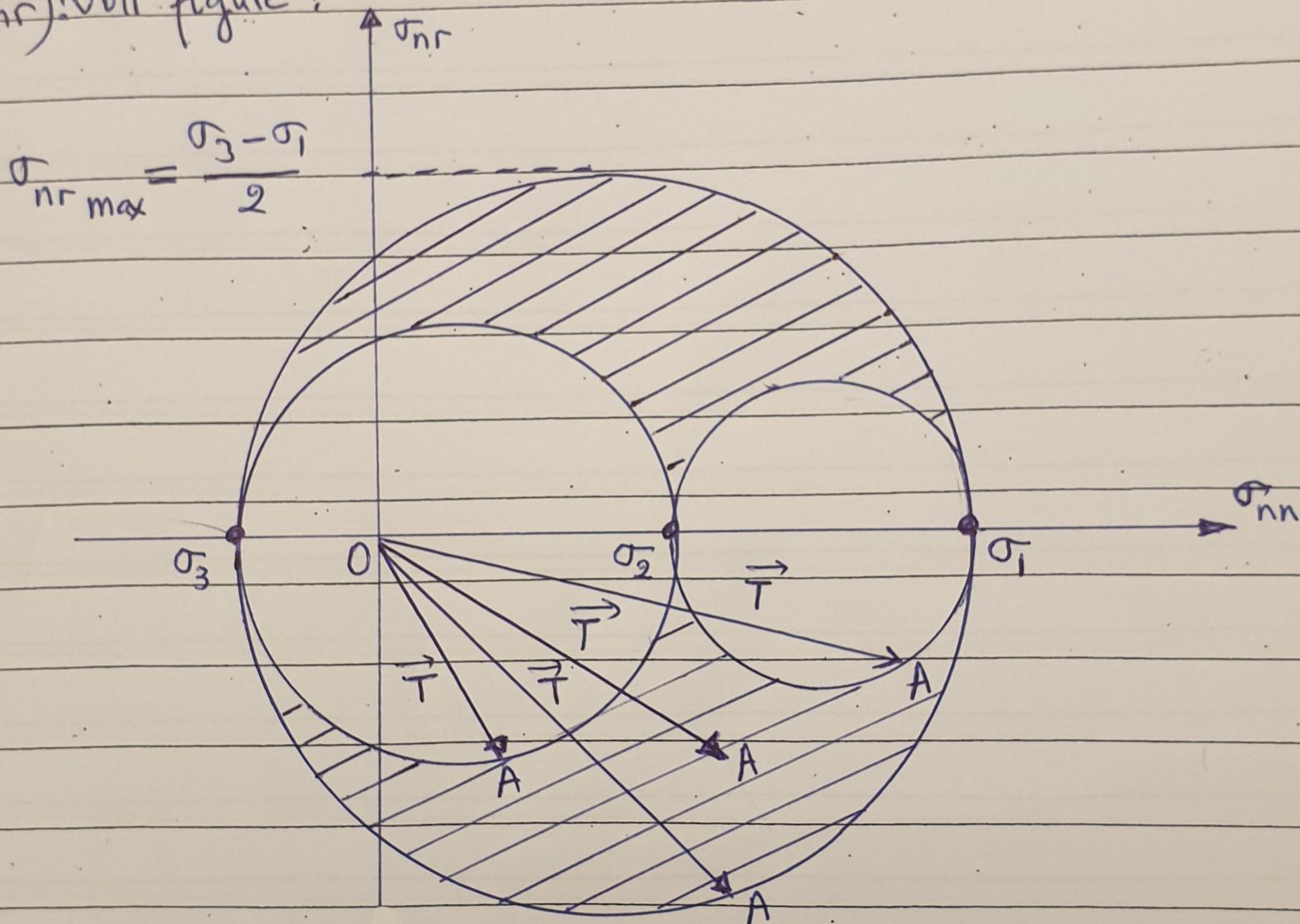
On obtient le 2^{ème} cercle de MOHR.

On refait le même calcul pour la facette qui pivote autour de \vec{e}_1 /4
 et on obtient le 3^{ème} cercle de MOHR d'équations paramétriques :

$$\begin{cases} \sigma_{nn} = \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2} + \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \cos(-2\theta) \\ \sigma_{nr} = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \sin(-2\theta) \end{cases}$$

On obtient alors le tricercle de MOHR, dessiné dans le même plan de MOHR :

$(\sigma_{nn}, \sigma_{nr})$: voir figure :



On montre et nous l'admettons que pour les facettes quelconques qui
 aucun des vecteurs \vec{e}_1 , \vec{e}_2 ou \vec{e}_3 , l'extrémité du vecteur
 \vec{T} est dans la zone hachurée.

Le tricercle de MOHR est très important dans la pratique :

- * il permet d'avoir une vue globale plane sur l'état mécanique d'une pièce à 3 dimensions (ce qui est le cas le plus fréquent)
- * il permet de connaître le cisaillement maximum $\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\right)$, valeur extrême du cisaillement au delà de laquelle il y a risque de rupture (ou amorce de rupture).

Equations d'Equilibre

Question : est-ce que toute matrice d'ordre 3 symétrique, réelle peut être considérée comme représentant d'un état mécanique, c'est à dire d'un tenseur de contraintes ?

La réponse est NON : C'est une condition nécessaire mais non suffisante.

Il faut que les équations d'équilibre (traduisant le principe fondamental de la dynamique) soient satisfaites : il faut que la somme de forces extérieures (force superficielles + forces volumiques et autres) soit égale à $m\vec{\gamma}$.

Cette condition se traduit par :

$$\text{div } \bar{\sigma} + \rho \vec{X} = m\vec{\gamma} \quad \text{ou encore}$$

$$\sum_j \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho X_i = m\gamma_i \quad \forall i = 1, 2, 3$$

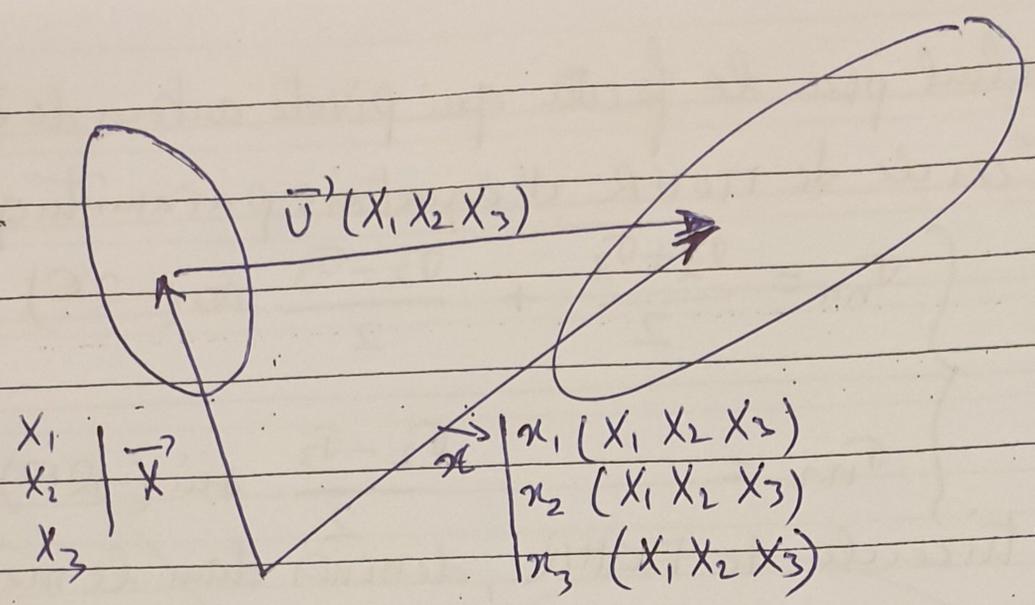
avec ρ : la masse volumique ; $\vec{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}$ la résultante des forces volumiques par unité de masse et $\vec{\gamma} = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix}$ le vecteur accélération par unité de masse.

Cas particuliers importants (fréquent)

• Les forces de volume sont négligeables devant les forces superficielles
• le corps est en équilibre ($\vec{\gamma} = \vec{0}$)

Cette condition s'écrit plus simplement :

$$\boxed{\text{div } \bar{\sigma} = 0} \quad \text{ou encore ;}$$



Notons alors: $\vec{u} = \vec{x} - \vec{x}$ donc

$$d\vec{u} = d\vec{x} - d\vec{x}$$

$$d\vec{u} = \bar{\gamma} d\vec{x} - d\vec{x} = (\bar{\gamma} - \bar{\delta}) d\vec{x}$$

$$d\vec{u} = \bar{G} \cdot d\vec{x} \quad \bar{\delta} \text{ est la matrice identité}$$

$$\boxed{\bar{G} = \bar{\gamma} - \bar{\delta}}$$

\bar{G} s'appelle le tenseur gradient de déplacement

Comme précédemment

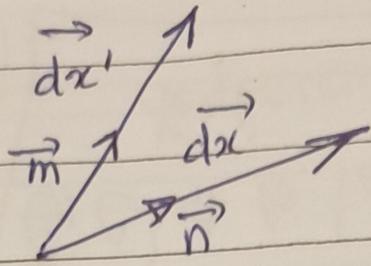
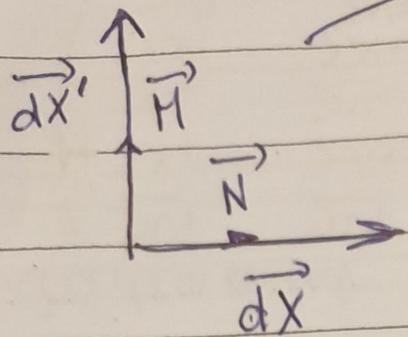
avec $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1(x_1, x_2, x_3) \\ u_2(x_1, x_2, x_3) \\ u_3(x_1, x_2, x_3) \end{pmatrix}$; $\bar{G} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}$

En augmentant \vec{x} de $d\vec{x}$; \vec{u} passe à $\vec{u} + d\vec{u}$

$$\vec{u}(\vec{x} + d\vec{x}) = \vec{u}(\vec{x}) + d\vec{u} = \vec{u}(\vec{x}) + \bar{G} d\vec{x}$$

théorème: Nous savons que toute matrice est la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique et cette décomposition est unique (Rappel: S symétrique: ${}^t S = S$; A antisymétrique: ${}^t A = -A$)

translation
rotation et déformation



$(\vec{N}, \vec{M}, \vec{n}, \vec{m})$ sont unitaires

$$\gamma(M_0, \vec{N}, \vec{M}) = \frac{\pi}{2} - (\widehat{\vec{n}}, \vec{m})$$

Nous allons relier ces grandeurs physiques (mesurables) aux composantes Σ_{ij} du tenseur de déformations tenseur de Green / Cauchy

$${}^t(\vec{dx}')(\vec{dx}) = {}^t(\vec{\delta} dX')(\vec{\delta} dX) \quad (R)$$

$$= {}^t_{dX'} \underbrace{{}^t_{\vec{\delta} \vec{\delta}}}_{\vec{\delta} \cdot \vec{\delta}} dX$$

On appelle tenseur de Green-Cauchy le tenseur:

$$\bar{\bar{C}} = {}^t_{\vec{\delta} \cdot \vec{\delta}}$$

Remarque: $\bar{\bar{C}}$ est symétrique

$$\text{Par ailleurs: } \bar{\bar{C}} = {}^t_{\vec{\delta} \cdot \vec{\delta}} = {}^t(\bar{\bar{G}} + \bar{\bar{S}})(\bar{\bar{G}} + \bar{\bar{S}})$$

$$= ({}^t\bar{\bar{G}} + \bar{\bar{S}})(\bar{\bar{G}} + \bar{\bar{S}})$$

$$= {}^t\bar{\bar{G}} \cdot \bar{\bar{G}} + {}^t\bar{\bar{G}} + \bar{\bar{G}} + \bar{\bar{S}}$$

Lorsque les déplacements sont petits, les composantes de ${}^t\bar{\bar{G}} \cdot \bar{\bar{G}}$ sont négligeables devant celles de ${}^t\bar{\bar{G}}$, de $\bar{\bar{G}}$ et de $\bar{\bar{S}}$.
On peut donc négliger ${}^t\bar{\bar{G}} \cdot \bar{\bar{G}}$ devant $\bar{\bar{G}}$ et ${}^t\bar{\bar{G}}$

d'où: $\bar{\bar{C}} \approx {}^t\bar{\bar{G}} + \bar{\bar{G}} + \bar{\bar{S}}$ or: $2\bar{\bar{S}} = {}^t\bar{\bar{G}} + \bar{\bar{G}}$

donc: $\bar{\bar{C}} \approx 2\bar{\bar{S}} + \bar{\bar{S}}$

Dans le cas de petites déformations :

$$1 + \sqrt{2^t \bar{N}' \bar{\Sigma} \bar{N}'} \approx 1 \text{ et } 1 + \sqrt{2^t \bar{M}' \bar{\Sigma} \bar{M}'} \approx 1$$

et donc :

$$\gamma(\Pi_0 \bar{N}' \bar{M}') \approx 2^t \bar{M}' \bar{\Sigma} \bar{N}' \quad \Delta$$

• Prenons respectivement les directions $\bar{N}' = \bar{e}_1$, puis \bar{e}_2 et puis \bar{e}_3

$$\Sigma(\Pi_0 \bar{e}_1) = (1 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{21} & \Sigma_{31} \\ \Sigma_{12} & \Sigma_{22} & \Sigma_{32} \\ \Sigma_{13} & \Sigma_{23} & \Sigma_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \Sigma_{11} \text{ donc}$$

$$\Sigma(\Pi_0 \bar{e}_1) = \Sigma_{11}; \quad \Sigma(\Pi_0 \bar{e}_2) = \Sigma_{22}; \quad \Sigma(\Pi_0 \bar{e}_3) = \Sigma_{33}$$

les termes diagonaux de $\bar{\Sigma}$ sont les dilatations linéaires dans les directions des axes de la base : \bar{e}_1 , \bar{e}_2 et \bar{e}_3

• Intervenons nous à présent aux termes non diagonaux; que représentent-ils ?

Prenons par exemple : $\bar{N}' = \bar{e}_1$ et $\bar{M}' = \bar{e}_2$; ($\bar{e}_1 \perp \bar{e}_2$)

$$\begin{aligned} \gamma(\Pi_0 \bar{e}_1 \bar{e}_2) &= 2^t \bar{e}_1 \bar{\Sigma} \bar{e}_2 \\ &= 2 (1 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{21} & \Sigma_{31} \\ \Sigma_{12} & \Sigma_{22} & \Sigma_{32} \\ \Sigma_{13} & \Sigma_{23} & \Sigma_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \Sigma_{21} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \gamma(\Pi_0 \bar{e}_1 \bar{e}_2) = 2 \Sigma_{21} \\ \gamma(\Pi_0 \bar{e}_2 \bar{e}_3) = 2 \Sigma_{32} \\ \text{et} \\ \gamma(\Pi_0 \bar{e}_3 \bar{e}_1) = 2 \Sigma_{13} \end{cases}$$

de même

les termes non diagonaux de $\bar{\Sigma}$ représentent les $\frac{1}{2}$ glissements des angles des vecteurs de la base; (initialement droits)

d'où le résultat :

$$\bar{\bar{\epsilon}} = \begin{pmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{21} & \epsilon_{31} \\ \epsilon_{12} & \epsilon_{22} & \epsilon_{32} \\ \epsilon_{13} & \epsilon_{23} & \epsilon_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon(e_1) & \frac{1}{2}\gamma(e_1, e_2) & \frac{1}{2}\gamma(e_1, e_3) \\ \frac{1}{2}\gamma(e_1, e_2) & \epsilon(e_2) & \frac{1}{2}\gamma(e_2, e_3) \\ \frac{1}{2}\gamma(e_1, e_3) & \frac{1}{2}\gamma(e_2, e_3) & \epsilon(e_3) \end{pmatrix}$$

Tenseur des déformations $\bar{\bar{\epsilon}}$ (compléments)

$\bar{\bar{\epsilon}}$ est symétrique, réel par définition. Il est diagonalisable

Il existe en tout point M_0 un repère dit principal où la matrice représentative de ce tenseur s'écrit :

$$\bar{\bar{\epsilon}} = \begin{pmatrix} \epsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3 \end{pmatrix}$$

ϵ_1, ϵ_2 et ϵ_3 sont les valeurs propres de $\bar{\bar{\epsilon}}$ (déformations principales)

Invariants : comme pour le tenseur de contraintes $\bar{\bar{\sigma}}$, le tenseur de déformations $\bar{\bar{\epsilon}}$ a 3 invariants indépendants que sont :

$$\begin{cases} J_1 = \text{Trace } \bar{\bar{\epsilon}} = \epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33} = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 \\ J_2 = \text{Trace matrice } \bar{\bar{\epsilon}} = \epsilon_1 \epsilon_2 + \epsilon_2 \epsilon_3 + \epsilon_3 \epsilon_1 \\ J_3 = \det \bar{\bar{\epsilon}} = \epsilon_1 \cdot \epsilon_2 \cdot \epsilon_3 \end{cases}$$

J_2 joue un rôle fondamental en plasticité. Il est proportionnel à l'énergie nécessaire à plastifier un matériau. Il est à la base du critère de plasticité de VON MISES.

Tenseur sphérique et tenseur déviatorique ?

Tout tenseur $\bar{\bar{\epsilon}}$ de déformation (il en est de même pour le tenseur de contraintes) peut être considéré comme la somme du tenseur dit sphérique : $\bar{\bar{\epsilon}}_S$ et du tenseur dit déviatorique : $\bar{\bar{\epsilon}}_D$: $\bar{\bar{\epsilon}} = \bar{\bar{\epsilon}}_S + \bar{\bar{\epsilon}}_D$

Le tenseur sphérique: $\bar{\bar{\Sigma}}_S = \begin{pmatrix} \Sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \Sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \Sigma_m \end{pmatrix}$ 14

où Σ_m est la déformation moyenne; elle vaut:

$$\Sigma_m = \frac{1}{3} \text{Trace } \bar{\bar{\Sigma}} = \frac{1}{3} (\Sigma_{11} + \Sigma_{22} + \Sigma_{33}) = \frac{1}{3} (\Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3)$$

Le tenseur déviatorique: $\bar{\bar{\Sigma}}_D$

$$\bar{\bar{\Sigma}}_D = \bar{\bar{\Sigma}} - \bar{\bar{\Sigma}}_S = \begin{pmatrix} \Sigma_{11} - \Sigma_m & \Sigma_{21} & \Sigma_{31} \\ \Sigma_{12} & \Sigma_{22} - \Sigma_m & \Sigma_{32} \\ \Sigma_{13} & \Sigma_{23} & \Sigma_{33} - \Sigma_m \end{pmatrix} \text{ ou } \bar{\bar{\Sigma}}_D = \begin{pmatrix} \Sigma_1 - \Sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \Sigma_2 - \Sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \Sigma_3 - \Sigma_m \end{pmatrix}$$

dans un repère quelconque

dans le repère principal

Remarques importantes:

- 1 - $\bar{\bar{\Sigma}}_S$ est responsable du changement de volume
sans changement de forme
- $\bar{\bar{\Sigma}}_D$ est responsable du changement de forme
sans changement de volume

2 - En plasticité et dans les opérations de mise en forme par déformation plastique, seul le tenseur déviatorique intervient. C'est le seul responsable en plasticité.

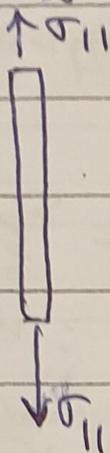
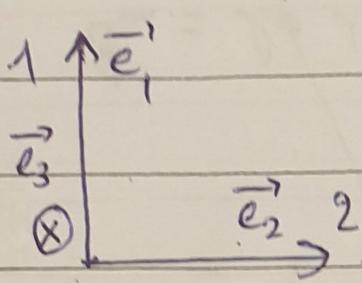
3 - Le 2^{ème} invariant du tenseur déviatorique est à la base du critère de plasticité de VON MISES

Elasticité - Lois de Comportement - Lois de Hooke 15

et Loi de Lamé :

Expériences fondamentales :

① Soit une éprouvette qui subit la contrainte σ_{11} dans la direction \vec{e}_1 seule



• l'expérience montre qu'elle est le siège d'une déformation ϵ_{11} dans la direction \vec{e}_1 et qui

$$\text{vaut : } \epsilon_{11} = \frac{\sigma_{11}}{E}$$

mais subit aussi des déformations

latérales dans les directions \vec{e}_2 et \vec{e}_3

$$\epsilon_{22} = -\nu \epsilon_{11} = -\frac{\nu}{E} \sigma_{11} \quad \text{et} \quad \epsilon_{33} = -\nu \epsilon_{11} = -\frac{\nu}{E} \sigma_{11}$$

• Si on refait la même expérience dans la direction \vec{e}_2 on aurait :

$$\epsilon_{22} = \frac{\sigma_{22}}{E} \quad \text{et} \quad \left(\epsilon_{11} = -\frac{\nu}{E} \sigma_{22} \quad \text{et} \quad \epsilon_{33} = -\frac{\nu}{E} \sigma_{22} \right)$$

• La même expérience dans la direction \vec{e}_3 donnerait :

$$\epsilon_{33} = \frac{\sigma_{33}}{E} \quad \text{et} \quad \left(\epsilon_{11} = -\frac{\nu}{E} \sigma_{33} \quad \text{et} \quad \epsilon_{22} = -\frac{\nu}{E} \sigma_{33} \right)$$

En superposant les 3 états mécaniques (les 3 expériences) et en sommant les déformations dans la direction \vec{e}_1

$$\text{on trouve : } \epsilon_{11} = \frac{\sigma_{11}}{E} - \frac{\nu}{E} \sigma_{22} - \frac{\nu}{E} \sigma_{33} \quad (1)$$

et de même dans la direction \vec{e}_2 et \vec{e}_3 on obtient

$$\epsilon_{22} = \frac{\sigma_{22}}{E} - \frac{\nu}{E} \sigma_{11} - \frac{\nu}{E} \sigma_{33} \quad (2)$$

$$\epsilon_{33} = \frac{\sigma_{33}}{E} - \frac{\nu}{E} \sigma_{11} - \frac{\nu}{E} \sigma_{22} \quad (3)$$

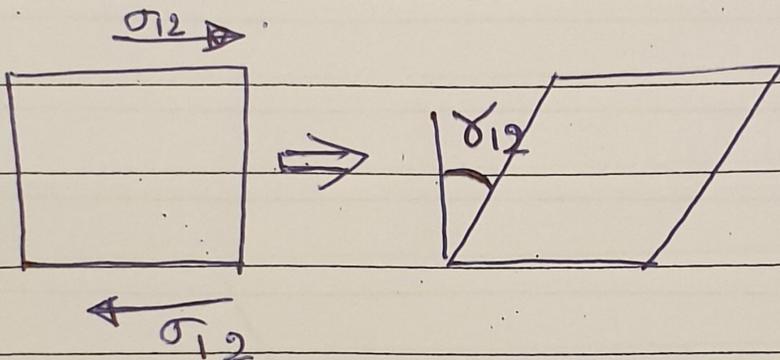
Les 3 équations peuvent être rassemblées sous
forme matricielle (facile à retenir):

16

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{E} \begin{pmatrix} 1 & -\nu & -\nu \\ -\nu & 1 & -\nu \\ -\nu & -\nu & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \end{pmatrix}$$

⑤ Deuxième expérience fondamentale:

On soumet un matériau au cisaillement τ_{12}



On constate qu'il y a proportionnalité entre:

le cisaillement τ_{ij} et le glissement γ_{ij}

$$\begin{cases} \gamma_{12} = G \tau_{12} \\ \gamma_{13} = G \tau_{13} \\ \gamma_{23} = G \tau_{23} \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} \epsilon_{12} = \frac{G}{2} \tau_{12} \\ \epsilon_{13} = \frac{G}{2} \tau_{13} \\ \epsilon_{23} = \frac{G}{2} \tau_{23} \end{cases}$$

d'où la forme globale:

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ 2\epsilon_{23} \\ 2\epsilon_{31} \\ 2\epsilon_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix}$$

On montre que: $G = \frac{2(1+\nu)}{E}$

Loi de Hooke et Loi de Lamé

17

En additionnant les relations (1); (2) et (3) de la page 15 nous obtenons:

$$\text{Tr } \bar{\Sigma} = \frac{1}{E} \text{Tr } \bar{\sigma} - \frac{2\nu}{E} \text{Tr } \bar{\sigma}$$

d'où:

$$\boxed{\text{Tr } \bar{\Sigma} = \frac{1-2\nu}{E} \cdot \text{Tr } \bar{\sigma}}$$

Remarque: Si $\nu = \frac{1}{2}$; $\text{Tr } \bar{\Sigma} = 0$

c'est le cas en plasticité: $\nu = 0,5$

En plasticité; $\text{Tr } \bar{\Sigma} = 0$ or $\text{Tr } \bar{\Sigma} = \text{div } \vec{u} = 0 \left(= \frac{\Delta V}{V} \right)$

donc incompressibilité du milieu

En plasticité il n'y a pas de changement de volume (c'est le cas des procédés de mise en forme par déformation plastique: laminage, filage, emboutissage, forgeage, frettage...)

Loi de Hooke:

$$(1): \Sigma_{11} = \frac{\sigma_{11}}{E} - \frac{\nu}{E} (\sigma_{22} + \sigma_{33}) = \frac{\sigma_{11}}{E} + \frac{\nu}{E} \sigma_{11} - \frac{\nu}{E} \text{Trace } \bar{\sigma}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Sigma_{11} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{11} - \frac{\nu}{E} \text{Tr } \bar{\sigma} \text{ de même} \\ \Sigma_{22} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{22} - \frac{\nu}{E} \text{Tr } \bar{\sigma} \text{ et} \\ \Sigma_{33} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{33} - \frac{\nu}{E} \text{Tr } \bar{\sigma} \end{array} \right.$$

$$\text{donc: } \left\{ \begin{array}{l} \Sigma_{ii} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ii} - \frac{\nu}{E} \text{Tr } \bar{\sigma} \text{ avec } i = 1, 2, 3 \\ \Sigma_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} \end{array} \right.$$

expression que l'on peut résumer par:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Sigma_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \left(\frac{\nu}{E} \text{Tr } \bar{\sigma} \right) \delta_{ij} \\ \text{ou} \\ \bar{\Sigma} = \frac{1+\nu}{E} \bar{\sigma} - \left(\frac{\nu}{E} \text{Tr } \bar{\sigma} \right) \bar{\delta} \end{array} \right. \text{ avec } \left\{ \begin{array}{l} \delta_{ij} = 0 \text{ pour } i \neq j \\ \delta_{ii} = 1 \end{array} \right. \bar{\delta} \text{ est la matrice identité}$$

Reprenons (1) : $\Sigma_{11} = \frac{\sigma_{11}}{E} - \frac{\nu}{E} (\sigma_{22} + \sigma_{33}) = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{11} - \frac{\nu}{E} \text{Tr} \bar{\sigma}$

d'où : $\sigma_{11} = \frac{E}{1+\nu} \Sigma_{11} + \frac{\nu}{1+\nu} \text{Tr} \bar{\sigma}$ et comme : $\text{Tr} \bar{\sigma} = \frac{E}{1-2\nu} \text{Tr} \bar{\Sigma}$

nous obtenons : $\sigma_{11} = \frac{E}{1+\nu} \Sigma_{11} + \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \text{Tr} \bar{\Sigma}$

posons : $2\mu = \frac{E}{1+\nu}$ et $\lambda = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$

et nous avons : $\sigma_{11} = 2\mu \Sigma_{11} + \lambda \text{Tr} \bar{\Sigma}$ de même

$\sigma_{22} = 2\mu \Sigma_{22} + \lambda \text{Tr} \bar{\Sigma}$

$\sigma_{33} = 2\mu \Sigma_{33} + \lambda \text{Tr} \bar{\Sigma}$

donc : $\sigma_{ii} = 2\mu \Sigma_{ii} + \lambda \text{Tr} \bar{\Sigma}$

d'autre part : $\sigma_{ij} = 2\mu \Sigma_{ij}$ pour $i \neq j$

Ce qui peut être résumé par la relation :

Loi de Lamé :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{ij} = 2\mu \Sigma_{ij} + (\lambda \text{Tr} \bar{\Sigma}) \delta_{ij} \\ \text{ou} \\ \bar{\sigma} = 2\mu \bar{\Sigma} + (\lambda \text{Tr} \bar{\Sigma}) \bar{\delta} \end{array} \right. \text{ avec } \left\{ \begin{array}{l} \delta_{ij} = 0 \text{ } i \neq j \\ \delta_{ii} = 1 \end{array} \right.$$

$\bar{\delta}$ la matrice identité

Tout matériau isotrope et homogène se caractérise en élasticité par 2 constantes et deux seulement :

E : module de Young

ν : coefficient de Poisson

toutes les autres constantes, par exemple λ et μ s'expriment en fonction de E et ν :

$2\mu = \frac{E}{1+\nu}$ et $\lambda = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$

Le filage à chaud

et

Applications

(Méthode des Blocs Rigides)

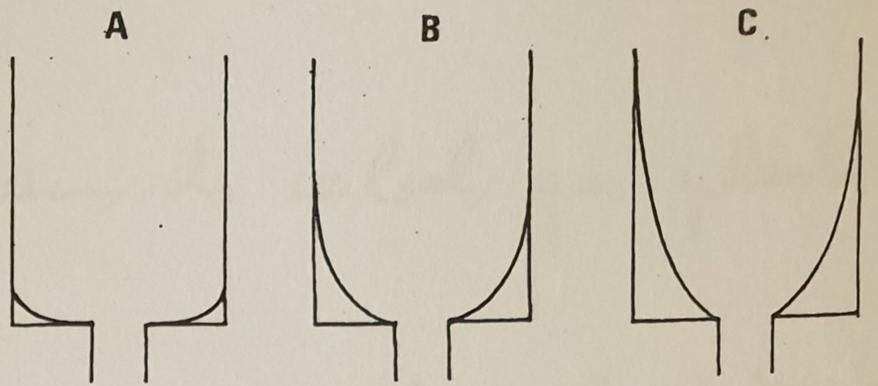
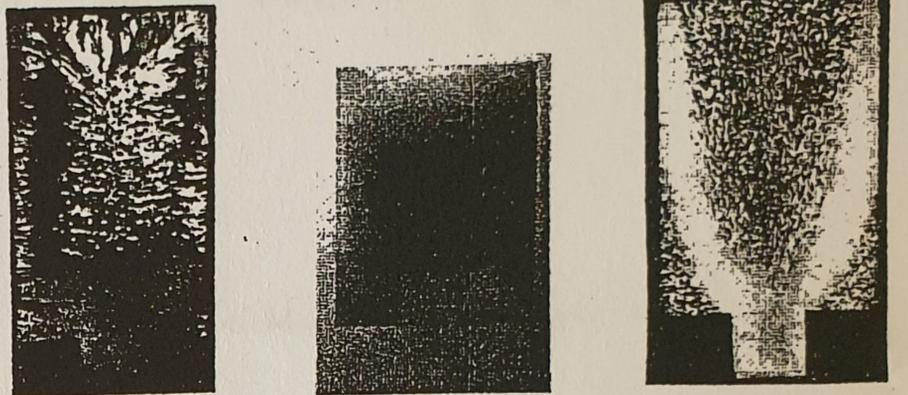


Fig. XI.6.



a) cuivre à 800°C (d'après (1))
 b) AU4 G1 à 450°C
 c) laiton 70-30 à 800°C (d'après (1))

Fig. XI.7.

B – APPLICATION AU FILAGE A CHAUD

XI.5 – Phénomènes physiques du filage à chaud.

XI.5.1 – Ecoulements avec et sans zone morte.

La géométrie de base du filage avant a été décrite précédemment.

Expérimentalement on observe une grande diversité de formes d'écoulement du métal en amont de la filière. Le plus souvent il apparaît une zone morte, qui peut être peu étendue ou au contraire remonter jusqu'au grain de poussée et dans d'autres cas, il n'y a pas de zone morte du tout. Il est difficile d'établir la loi selon laquelle la dimension de la zone morte varie car, en pratique, beaucoup de paramètres changent simultanément :

- la nature du métal, donc son comportement rhéologique, thermique et tribologique (y compris les propriétés des oxydes),

- la lubrification, en général inexistante pour les alliages d'aluminium et de cuivre, et réalisée au verre pour les aciers,

- le rapport de filage qui peut varier de 10 à 1000 selon les fabrications,

- il est probable que la forme du produit (barre, tube, profilé,...) joue aussi. Dans tout ce chapitre, nous nous intéresserons seulement au cas, a priori le plus simple, d'un filage de barre axisymétrique.

Typiquement, on observe les comportements suivants :

- Cas du filage non lubrifié (aluminium, cuivre et leurs alliages respectifs):

Il existe trois formes d'écoulement illustrées par les photos de la figure XI.7.

- Cas du filage lubrifié (filage hydrostatique, aciers lubrifiés au verre) :

La billette ne présente pas de zone morte. La figure XI.8 a illustre le cas d'un rapport de réduction faible. Lorsque ce dernier est plus important, l'angle mort rempli par la gorgousse de verre disparaît presque entièrement.

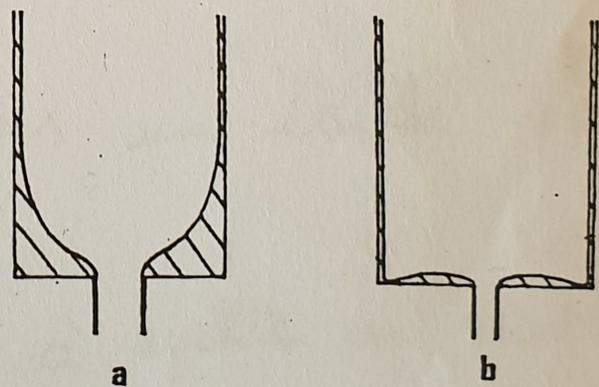


Fig. XI.8.

XI.5.2 – Influence du frottement et des gradients thermiques.

Certains de ces résultats ont été interprétés ([1], [3], [5])

- la dimension de zone morte observée pour l'aluminium serait la dimension naturelle correspondant à un frottement collant sur le conteneur et une température sensiblement homogène dans la billette en amont du convergent ; ceci est d'ailleurs vérifié par les observations faites par simulation plastiline (Cf. Fig. XIII.1).

- la taille beaucoup plus petite observée avec le cuivre serait due à un effet lubrifiant de l'oxyde de cuivre (réf. [1]) ; le métal aurait tendance à glisser le plus longtemps possible le long du conteneur ?

Exercice

Étude de la traction biaxiale. L'éprouvette est soumise à σ_{xx} et à $\sigma_{yy} = k\sigma_{xx}$ (voir figure). L'objet de cette application est de tracer la courbe d'écroutage $\bar{\sigma} = f(\bar{\epsilon})$ et $\bar{\sigma}$ et $\bar{\epsilon}$ étant respectivement la contrainte généralisée et la déformation généralisée.

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{III} - \sigma_I)^2]}$$

$$\bar{\epsilon} = \frac{1}{3} \sqrt{2 [(\epsilon_I - \epsilon_{II})^2 + (\epsilon_{II} - \epsilon_{III})^2 + (\epsilon_{III} - \epsilon_I)^2]}$$

1) Calculer le tenseur déviateur

2) Montrer que :

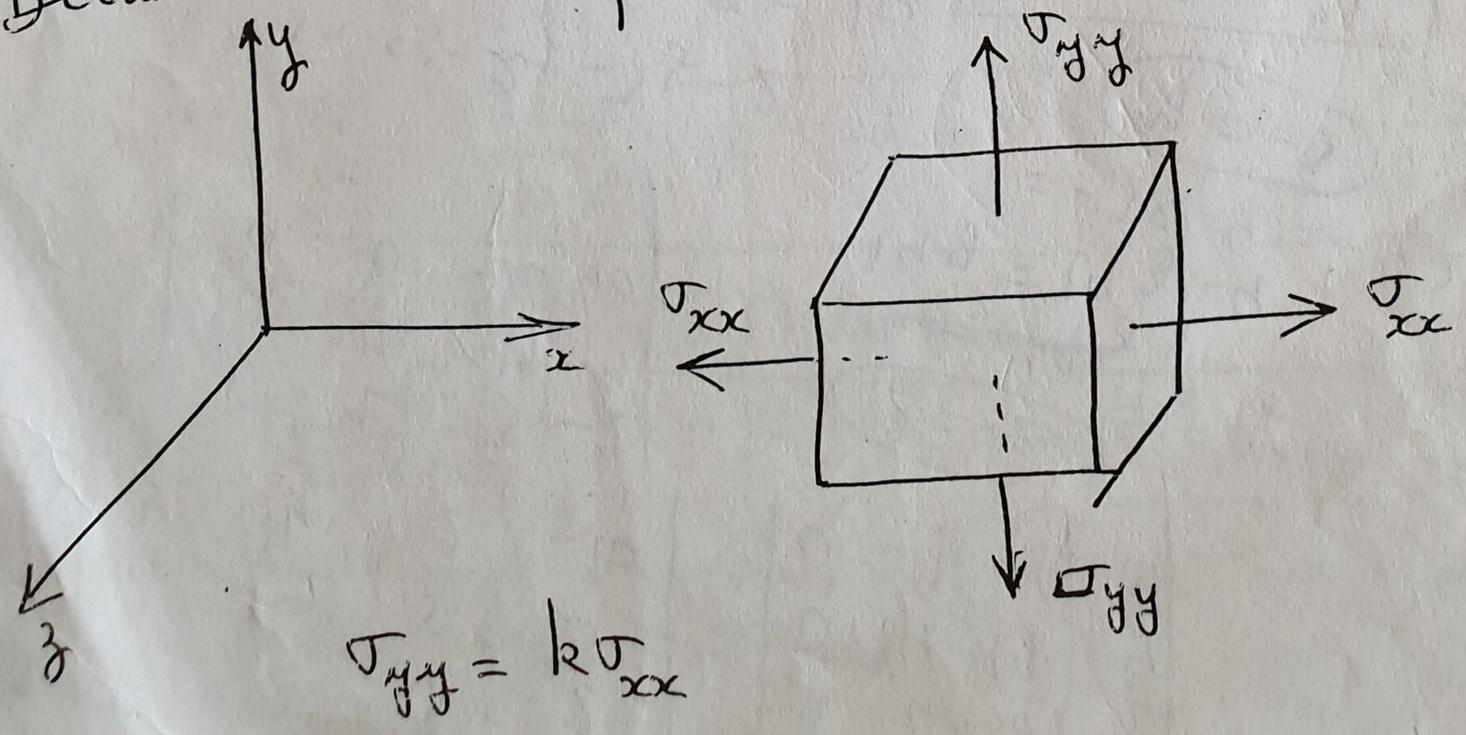
$$\bar{\epsilon} = \frac{2\epsilon_{xx} \sqrt{k^2 - k + 1}}{|2 - k|}$$

(Utiliser les relations de Levy-Mises)

3) Calculer $\bar{\sigma}$ et montrer qu'elle vaut :

$$\bar{\sigma} = \sigma_{xx} \sqrt{k^2 - k + 1}$$

Écrire comment peut-on alors tracer $\bar{\sigma} = f(\bar{\epsilon})$



IV Expression du critère de Von-Mises en déformation plane:

Solution:

Le critère de plasticité n'est:

$$(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 = 2\sigma_0^2 \quad (1)$$

Les lois de comportement de Levy-Mises donnent:

$$\frac{d\epsilon_{xx}}{2\sigma_{xx} - \sigma_{yy} - \sigma_{zz}} = \frac{d\epsilon_{yy}}{2\sigma_{yy} - \sigma_{zz} - \sigma_{xx}} = \frac{d\epsilon_{zz}}{2\sigma_{zz} - \sigma_{xx} - \sigma_{yy}} = \text{constant}$$

$$d\epsilon_{zz} = 0 \quad \text{donc} \quad 2\sigma_{zz} - \sigma_{xx} - \sigma_{yy} = 0 \Rightarrow \sigma_{zz} = \frac{1}{2}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$$

(on peut écrire: $d\epsilon_{zz} = \frac{2\sigma_{zz} - \sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2\sigma_{yy} - \sigma_{zz} - \sigma_{xx}} d\epsilon_{yy} = 0$ et

comme $d\epsilon_{yy} \neq 0$: $2\sigma_{zz} - \sigma_{xx} - \sigma_{yy} = 0$) :

(1) s'écrit alors:

$$(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + \left(\frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} - \sigma_{yy}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} - \sigma_{xx}\right)^2 = 2\sigma_0^2$$

$$(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + \frac{1}{4}(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + \frac{1}{4}(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 = 2\sigma_0^2$$

soit:

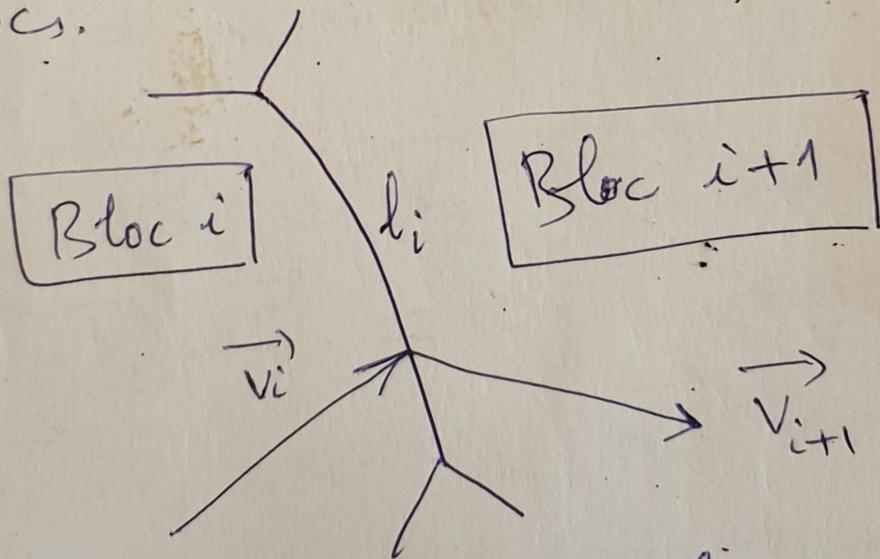
$$\boxed{|\sigma_{xx} - \sigma_{yy}| = \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}}}$$

Méthode des Blocs Rigides

La méthode consiste à décomposer (virtuellement!) la matière à plastifier en blocs (en général de triangles d'épaisseur 1).

Ces blocs sont rigides c'est à dire indéformables. Les particules composant un bloc se déplacent donc à la même vitesse (celle du bloc en question).

Puisque les blocs sont indéformables, la puissance nécessaire à la plastification de la matière est fournie par le frottement au niveau des interfaces entre les différents blocs.



le frottement au niveau des interfaces est supposé de type TRESCA collant ; $\tau = \frac{m\sigma_0}{\sqrt{3}}$ avec $m = 1$

(c'est la même matière)

donc la puissance nécessaire au niveau de l'interface i :

$$\dot{W} = \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \times l_i \times 1 \times \|\Delta \vec{v}_i\| ; \quad \Delta \vec{v}_i = \vec{v}_i - \vec{v}_{i+1}$$

pour toutes les interfaces, on a donc :

$$\dot{W}_t = \sum_i W_i = \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \sum_i l_i \|\Delta \vec{v}_i\|$$

La méthode des Blocs Rigides qui part d'un champ de vitesse et donc une borne supérieure; la puissance ainsi calculée est supérieure à la puissance réelle.

Pour calculer cette puissance, il suffit donc de connaître les longueurs de différentes interfaces (l_i) et $\|\Delta \vec{v}_i\|$ les variations de vitesse à la traversée de l'interface i :

Propriétés

1) pour l'interface i ; la variation de vitesse $\Delta \vec{v}_i$ est portée par cette interface; en effet; à la traversée d'une interface i ; le débit se conserve;

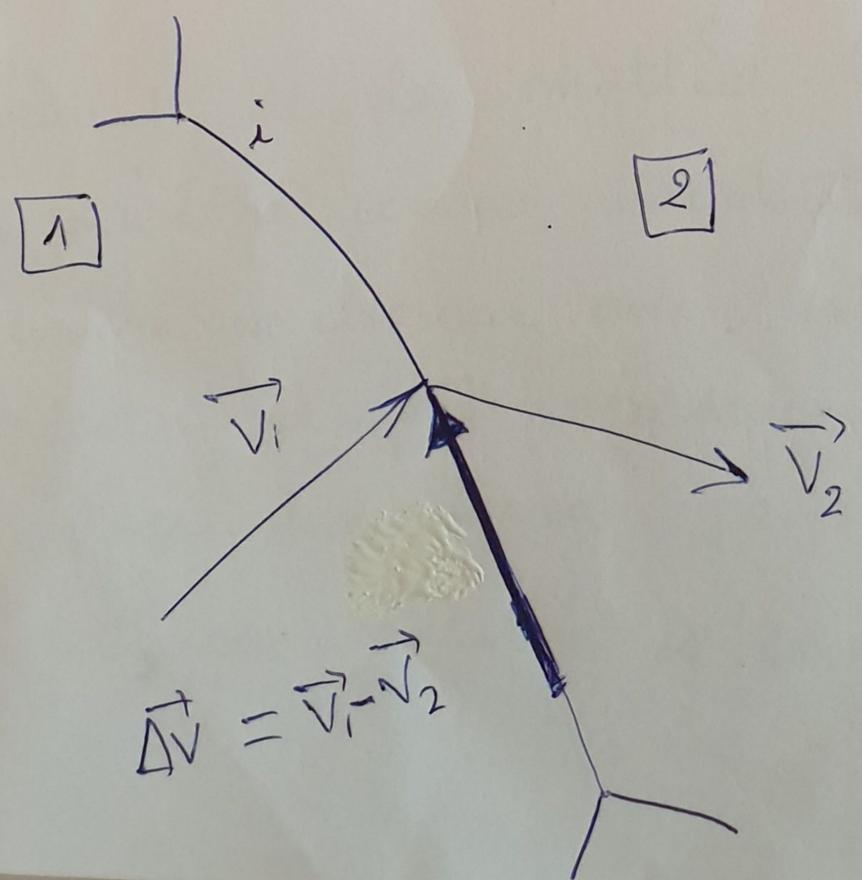
$$\vec{v}_1 \cdot d\vec{S} = \vec{v}_2 \cdot d\vec{S} \iff$$

$$(\vec{v}_1 - \vec{v}_2) \cdot d\vec{S} = 0 \iff$$

$\Delta \vec{v} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$ est $\perp d\vec{S}$ donc

parallèle à l'interface (et donc est porté par celle-ci)

($d\vec{S}$ est $\perp i$)



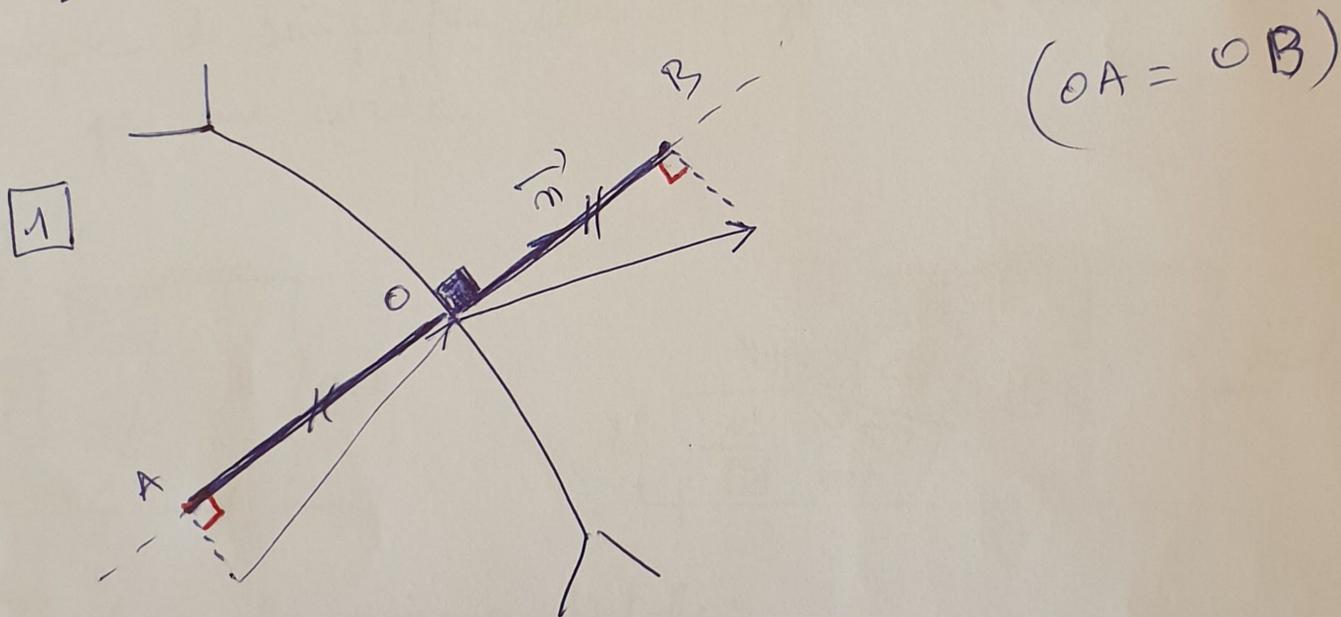
33

2) A la traversée d'une interface, la composante normale de la vitesse se conserve; en effet; il y a conservation du débit; donc:

$$\vec{V}_1 \cdot d\vec{S}_1 = \vec{V}_2 \cdot d\vec{S} \quad \text{donc}$$

$$\vec{V}_1 \cdot \vec{n} = \vec{V}_2 \cdot \vec{n} \quad (\vec{n} \text{ le vecteur normal de l'interface})$$

donc: $V_{1n} = V_{2n}$
 \vec{V}_1 et \vec{V}_2 ont donc la même composante normale



3) A la traversée d'une interface, il y a dissipation d'énergie qui s'accompagne d'un échauffement de la matière. Cet échauffement peut être considéré comme adiabatique (c'est à dire sans échange de chaleur avec l'extérieur) à condition que l'opération se fait rapidement, ce qui est le cas du filetage et du forage par exemple. En outre les transferts par radiation et conduction sont insignifiants.