# Construction métallique

Notes du cours

Pr. Z. EL MASKAOUI elmaskaoui@gmail.com

# Sommaire

Partie 1 : Ge	énéralités	1
1. Re	églementations	1
2. Le	es dangers de la construction métalliques	1
3. Le	e matériau acier	1
4. Le	es produits sidérurgiques	2
5. Le	es poutrelles	2
6. Es	ssais de contrôle des aciers	4
7. Ad	cier/Béton : avantages et inconvénients	4
Partie 2 : Vé	érification de la résistance des sections	6
1. De	émarche des calculs	6
2. Et	tats limites	6
3. Le	es actions	7
4. Co	ombinaisons d'actions aux états limites ultimes ELU	7
5. Co	ombinaisons d'actions aux états limites de service ELS	7
6. El	léments tendus ou comprimés	8
7. El	léments fléchis et comprimés ou tendus	8
Partie 3 : Le	e flambement	.2
1. De	éfinition1	.2
2. As	spect réglementaire du flambement - Règles CM 66 1	.4
Partie 4 : Le	e déversement 1	.5
1. De	éfinition :1	.5
2. Pa	aramètre influençant le déversement : 1	.5
3. As	spect réglementaire du déversement des pièces fléchies1	.6
4. De	éversement des poutres symétriquement appuyées et chargées 1	.6
5. De	éversement des poutres consoles2	20
Partie 5 : Le	es assemblages boulonnés2	12
1. G	énéralités	12
2. Ca	alcul des assemblages par boulons non précontraints2	22
3. Ca	alcul des assemblages par boulons HR (haute résistance) 2	25
Partie 6 : Le	es assemblages soudés2	<u>'</u> 7
1. G	énéralités	<u>'</u> 7
2. Ca	alculs des cordons de soudures2	28
3. Ca	alcul des assemblages des pièces fléchies3	30
Références	bibliographiques	3

# Partie 1 : Généralités

# 1. Réglementations

La conception et le calcul des constructions métalliques sont régis par diverses réglementations :

- Les règles de calcul des constructions en acier dites règles CM66, qui réglemente tous les bâtiments en acier et qui sont fondées sur le seul comportement élastique de l'acier : contrainte de ruine  $\sigma_e$ .
- L'additif 80 qui introduit les notions de plasticité de l'acier et d'états limites (autorise le dépassement du seuil d'élasticité σ<sub>e</sub>).
- Des normes NF, qui régissent les calculs des assemblages et des éléments à parois minces.
- Les Eurocodes qui constituent un ensemble de 58 normes européennes, harmonisant les méthodes de calcul utilisables pour vérifier la stabilité et le dimensionnement des différents éléments constituant des bâtiments ou ouvrages de génie civil, quels que soient les types d'ouvrages ou de matériaux (structures en béton, en métal, structures mixtes acier/béton, maçonnerie, bois, aluminium, règles de calcul pour les ouvrages de géotechnique et règles parasismiques).

# 2. Les dangers de la construction métalliques

Les constructions métalliques exigent qu'une attention toute particulière soit portée sur certains points :

- Les assemblages (boulonnages, soudages) afin de se prémunir contre leurs risques de rupture brutale la ruine de l'ouvrage par effondrement -.
- Les phénomènes d'instabilité élastique (flambement, déversement, voilement), qui amplifient les contraintes redoutables en cas d'utilisation de pièces de faible épaisseur et de grand élancement.

#### 3. Le matériau acier

Les 3 nuances utilisables en construction métallique sont :

- S235 ou E 24 (toute structure de bâtiment) à  $\sigma_e$  = 235 MPa
- S275 ou E 28 à  $\sigma_e$  = 275 MPa
- S355 ou E 36 (ponts ouvrages d'art) à  $\sigma_e$  = 355 MPa

Leurs caractéristiques mécaniques sont :

■ Module d'élasticité longitudinale : E = 2,1.10<sup>5</sup> MPa

• Coefficient de Poisson : v = 0.3

Module d'élasticité transversale : G = 8,1.10<sup>4</sup> MPa

• Masse volumique :  $\rho = 7.850 \text{ daN/m}^3$ 

#### 4. Les produits sidérurgiques

Les produits sidérurgiques employés en construction métallique sont obtenus par laminage à chaud. Les dimensions et caractéristiques sont normalisées et répertoriées sur catalogues.

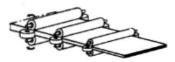
Les sections réelles présentent 4 types principaux de défauts :

- Défauts de dimension : les tolérances sur la hauteur et sur l'épaisseur des ailes des poutrelles.
- Défaut d'équerrage : perpendicularité aile âme
- Défaut de symétrie.
- Défaut de dressage : flèche de la fibre moyenne (de 2 à 3 % de la portée).

Les calculs peuvent être influencés par ces défauts, (diminution de I, augmentation des contraintes - apparition des  $M_t$ , voilement ... -). D'où on majore les charges – coefficients de pondération (exemple 4/3 pour charges permanentes).



Train de laminage de profilés



Train de laminage continu

Figure 1 : Procédée du laminage

# 5. Les poutrelles



Figure 2: Profilés laminés

#### Critères de choix :

Les critères fondamentaux de choix d'un produit sidérurgique sont ses :

- Caractéristiques mécaniques :
  - Limite conventionnelle d'élasticité  $\sigma_e$  pour un allongement de 0,2%
  - Limite de rupture  $\sigma_r$
  - Limite d'allongement A<sub>r</sub> à la rupture évaluée en %
- Caractéristiques de forme :

Moment d'inertie I en cm<sup>4</sup>, module d'inertie I/v en cm<sup>3</sup> Section A en cm<sup>2</sup>, rayon de giration  $i = \sqrt{I/A}$  en cm

- Possibilité d'approvisionnement :
  - Dans des délais normaux à un prix de revient raisonnable
  - Tolérances d'utilisation
  - Possibilités particulières

#### Utilisations des IPE - IPN:

IPN et IPE sont essentiellement destinée à travailler en FLEXION seule (poutres de planchers, solives, pannes, lisses...) mais également en FLEXION-COMPRESSION lorsque cette dernière est faible vis –à– vis de la flexion (poteaux de portiques légers, potelet de bardages...)

#### **Utilisation des poutrelles HE:**

A hauteur égale, les poutrelles HE présentent une inertie maxi plus grande que les IPE ou IPN, et sont retenues à la place de ces derniers dans le cas de sollicitations importantes.

Ces profils présentent une bonne résistance à la compression.

#### **Utilisation des UAP et UPN:**

Ces poutrelles sont en général utilisées en parallèle avec les I et les HE, leur emploi se justifiant souvent pour des questions de conception : Éléments de rive, chevêtres, bordures, limons d'escalier.... A noter leur très grande faiblesse en compression simple.

#### **Utilisation des cornières :**

Elles sont utilisées pour réaliser des poutres à treillis et des éléments d'assemblages (éclisses). Elles sont rarement utilisées seules mais plutôt associées deux à deux.

Nota: Ne pas utiliser en structure de bâtiment des cornières inférieures à 35×35×3.5

#### Plats pour usages généraux :

- Semelles de poutres reconstituées soudées (attention aux tolérances);
- Suspentes ...
- Eléments travaillant en traction
- Contrairement aux tôles, les plats ne sont laminés que dans une seule direction, ils résistent donc en principe moins bien au cisaillement.

#### Poutrelles reconstituées soudées (PRS) :

Elles sont fabriquées à partir de tôles assemblées par soudage automatique. Elles sont retenues et avantageuses dans le cas d'une réalisation de poutre ou poteaux à section variable le long de son axe.

#### Poutrelles alvéolaires ou ajourées :

Appelées aussi poutrelles ajourées, expansées, en nids d'abeille...Elles sont obtenues à partir de poutrelles laminées à chaud, par découpage de l'âme suivant une ligne polygonale, et reconstitution par soudage.

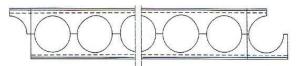


Figure 3 : Exemple de poutrelle alvéolaire

Elles présentent les avantages suivants :

- Très bonne résistance à la flexion (grande inertie).
- Possibilité de traverser les poutres au droit des alvéoles.
- Elles sont recherchées dans le cas de planchers et de traverses, de portiques de grande portée.

#### Profilés à froid en tôle minces :

Ces produits de faible épaisseur sont à utiliser avec précaution. Ils présentent comme avantages :

- Une économie de transport
- Une économie de main d'œuvre (légèreté)

- Une économie de mise en œuvre (montage)

On les rencontre dans le cadre d'ossatures légères (entrepôts, dépôts, hangars,...), comme :

- Pannes de couverture et lisses de bardage : PROFILCO Z
- Poutres de plancher : POUTRELCO



Figure 4: Profilés à froid en tôle minces

#### 6. Essais de contrôle des aciers

Les essais normalisés de contrôle des aciers sont de 2 types :

- Les essais destructifs qui renseignement sur les qualités mécaniques des aciers, comme :
  - L'essai de traction, détermine E,  $\nu$ ,  $\epsilon_R$ ,  $\sigma_e$ ,  $\sigma_R$
  - L'essai de dureté, définit des degrés de dureté
  - L'essai de résilience, mesurer l'aptitude d'un acier à rompre par choc
- Les essais non destructifs qui renseignent sur la composition et la structure des aciers, comme :
  - La macrographique : examen visuel d'une surface polie traitée à l'acide.
  - La micrographie : examen au microscope des cristaux détermine la teneur en carbone –.
  - La radiographie, par rayon x, rayon gamma : décèle les défauts des fissures internes.

#### Essai de traction:

Module d'élasticité longitudinale :

$$E = tg \alpha = \frac{\sigma}{\Delta L/L}$$

Le palier de ductilité AA' représente une réserve de sécurité.

Lorsqu'une pièce est excessivement sollicitée  $\,\sigma > \sigma_e,\,$  deux types de

ruines peuvent se produire :

- Rupture brutale (sans grande déformation);
- Rupture ductile.

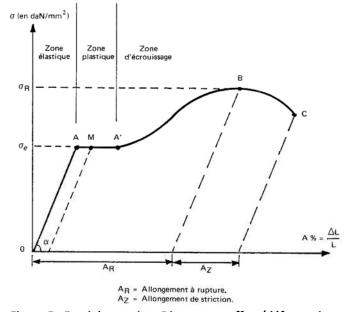


Figure 5 : Essai de traction, Diagramme effort/déformation

# 7. Acier/Béton : avantages et inconvénients

Principaux avantages des structures métalliques :

- Industrialisation totale.
- Préfabrication intégrale des bâtiments en atelier (à partir des laminés)
- Le montage simple et rapide sur site.
- Transport aisé (exportation).
- Grande résistance de l'acier à la traction.
- Possibilité d'adaptation plastique offre une grande sécurité.

- Modifications, transformations, adaptation ultérieure sont possibles.

# Principaux inconvénients :

- Résistance en compression moindre que le béton.
- Phénomènes d'instabilité élastique : minceur des profils.
- Mauvaise tenue au feu.
- Nécessité d'entretien régulier contre la corrosion.

# Partie 2 : Vérification de la résistance des sections

#### 1. Démarche des calculs

Les règles CM66 adoptent la valeur  $\sigma_e$  comme critère de base de ruine d'une pièce. Les calculs sont menés en élasticité pure.

La démarche des calculs consiste à :

- Déterminer les valeurs des actions agissant sur les éléments à calculer : charges permanents et variables, fixes et mobiles.
- Examiner les combinaisons possibles d'action les plus défavorables, après pondération (4/3, 1, 3/2, 17/12 selon les cas).
- Calculer les sollicitations correspondantes : efforts normaux et tranchants, moment de flexion et de torsion.
- Vérifier les déformations.
- Calculer les contraintes. (σ<sub>e</sub> valeur de référence).

 $\begin{array}{lll} \text{-} & \text{en traction/compression}: & \sigma \leq \sigma_e \\ \\ \text{-} & \text{au cisaillement simple}: & \tau \leq 0,6 \; \sigma_e \\ \\ \text{-} & \text{en flexion simple}: & \sigma_f \leq \sigma_e \\ \\ \text{-} & \text{en flexion composée}: & \sigma_{fy} + \sigma_{fz} \leq \sigma_e \\ \\ \text{-} & \text{en flexion et traction/compression}: & \sigma + \sigma_{fy} + \sigma_{fz} \leq \sigma_e \end{array}$ 

■ Dans le cas d'instabilité :  $k\sigma \le \sigma_e$  (k : coefficient de flambement ou déversement)

#### 2. Etats limites

Un état limite est un état au-delà duquel la structure ne satisfait plus aux exigences pour lesquelles elle a été conçue. On en distingue deux types d'états limites :

#### Etats limites Ultimes (E.L.U.)

Les états limites ultimes sont associés à la ruine de la structure, ils comprennent

- La perte d'équilibre de la structure ou de l'une de ses parties
- La ruine de la structure ou de l'un de ses éléments.

#### **Etats Limites de Services (E. L.S.)**

Les états limites de service correspondent aux dépassements des critères spécifiés d'exploitation, ils comprennent :

- Les déformations et les flèches affectant l'aspect ou l'exploitation de la construction, ou provoquant des dommages à des éléments non structuraux ;
- Les vibrations incommodant les occupants, endommageant le bâtiment ou son contenu.

#### 3. Les actions

Ce sont les forces appliquées sur l'élément à dimensionner. Il faut identifier la nature des actions (variations dans le temps) :

Charges permanentes : GSurcharges d'exploitations : Q

Surcharges de neige : SSurcharge de vent : W

#### 4. Combinaisons d'actions aux états limites ultimes ELU

Ce sont ces combinaisons qui interviendront pour la vérification de la résistance des section, la stabilité des éléments, la vérification des assemblages...

Dans ce cas il faut pondérer les charges. Le but est de rechercher la combinaison la plus défavorable pour l'élément à vérifier.

Catégorie	Coefficient de Pondération
G	1.33 ou 1 suivant le cas le plus défavorable
Q, S, et W	1.5 si on a une seule de ces actions ou 1.42 si on a deux de ces actions ou 1.33 si on a les trois actions

#### Exemple de combinaisons

```
1.33 G + 1.5 Q

1.33 G + 1.5 W_n

G + 1.75 W_n

G + Q + 1.75 W_n

1.33 G + 1.42 Q + 1.42 W_n
```

 $W_n$  est la pression dynamique pour une valeur normal du vent

#### 5. Combinaisons d'actions aux états limites de service ELS

Ce sont ces combinaisons qui interviendront pour le calcul des flèches  $\boldsymbol{\delta}$  .

La vérification des éléments qui composent la structure doit être effectuée en considérant les combinaisons les plus défavorables des actions NON PONDEREES conformément au règlement.

#### Exemple de combinaisons

$$G + Q$$
  
 $G + W_n$   
 $G + Q + W_n$ 

 $W_n$  est la pression dynamique pour une valeur normal du vent

# 6. Eléments tendus ou comprimés

Lorsqu'un élément de construction rectiligne est sollicité par un effort de traction **N** dirigé suivant son axe, sa section transversale est soumise uniformément à une contrainte normale de traction :

$$\sigma_n = \frac{N}{A}$$

A : Section brute de la barre

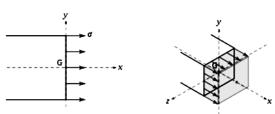


Figure 6 : Distribution des contraintes normales dans une section transversale

Dans le cas d'un assemblage boulonné ou riveté, il faut vérifier que :

$$\sigma_{\scriptscriptstyle n} = \frac{N}{A_{\scriptscriptstyle n}}$$
 A<sub>n</sub>: section nette au droit des boulons

Sous l'action de cet effort de traction, l'élément s'allonge d'une valeur  $\delta$ :

$$\frac{\delta}{l} = \frac{\sigma_n}{E} = \frac{N}{E A}$$
 E: Module de Young   
 I: longueur de la barre

Il faut s'assurer que

 $\delta_{\it ad}\,$  : Valeur du déplacement maximal fixé par le cahier des charges

# 7. Eléments fléchis et comprimés ou tendus

#### a. Flexion simple

 $\delta \leq \delta_{ad}$ 

Une poutrelle laminée est soumise à une flexion lorsque dans une section quelconque A d'axe yy' et zz' se développent :

- Un moment fléchissant M exprimé en daN.m.
- Un effort tranchant T exprime en daN
- Une rotation de la section exprime en Rad.

Le moment fléchissant M engendre une contrainte normale :  $\sigma_f$ 

$$\sigma_{\rm f} = \frac{M}{I/v} \qquad \qquad \text{I /v : Module d'inertie de de la section}.$$

La répartition des  $\sigma_f$  est triangulaire (Fig. 7), la moitié de la section A est tendue. L'autre est comprimée et présente de ce fait un risque d'instabilité élastique.

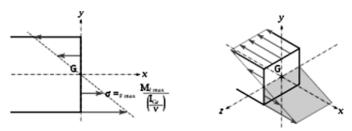


Figure 7: Distribution des contraintes de flexion dans une section transversale

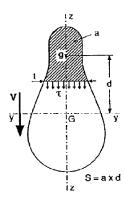
#### **L'effort tranchant** V engendré une contrainte tangente $\tau$

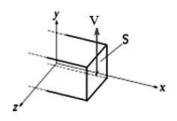
I : Moment d'inertie de la section transversale autour de l'axe principale perpendiculaire à l'effort tranchant.

$$\tau = \frac{V.S}{t.I}$$

S : Moment statique par rapport à ce même axe de la section hachurée.

t: La largeur de la section au niveau du point considéré.





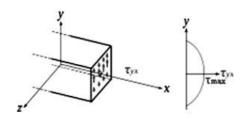


Figure 8 : Distribution des contraintes de cisaillement dans une section transversale

La flèche maxi engendrée par les déformations est :

 $\delta_{maxi} \leq \delta_{ad}$  Valeur du déplacement maximal fixé par le cahier des charges

La condition de déformation s'exprime par un facteur K = 1/200, 1/300, 1/500... et est fonction de la portée L de la poutre  $\delta_{max\,i} \leq K.L$ 

#### Conditions de flèches (Exemples) :

Plancher: 1/300Couverture: 1/200

- La flèche due aux seules surcharges rapidement variables ne doit pas dépasser 1/500

- Conditions de déplacement poteaux : 1/150 de la hauteur

- En cas de poutre consoles la flèche maximum est égale au double de la flèche autorisée pour une poutre sur deux appuis

#### b. Flexion déviée

On a de la flexion déviée lorsque la poutre est fléchie suivant deux plans de symétrie (Fig. 9).

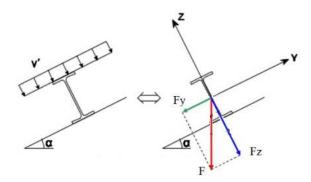


Figure 9 : Exemple de flexion déviée dans poutre de section I

#### Critère de résistance des sections :

$$\sigma_{fy} + \sigma_{fz} = \frac{M_y}{I_y / v_y} + \frac{M_z}{I_z / v_z} \le \sigma_e$$

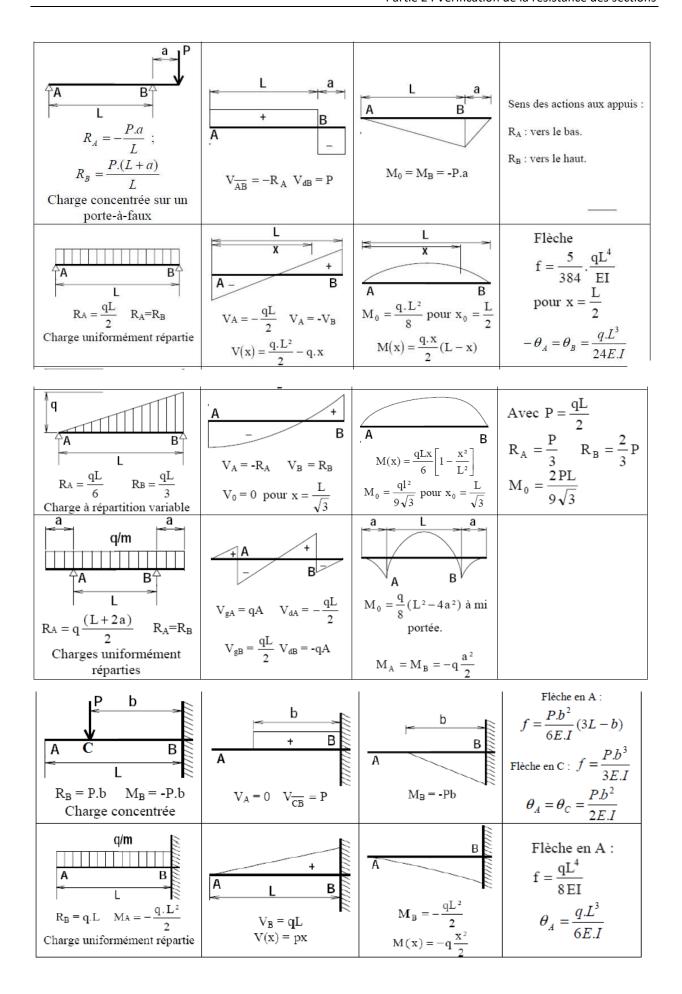
#### c. Flexion composée

Dans le cas où un élément sollicité par un effort normal est des moments de flexion, le critère de vérification des sections est :

$$\sigma + \sigma_{fv} + \sigma_{fz} \leq \sigma_e$$

# d. Formulaire des cas de charges courants en flexion

	Effort tranchant	Moment de flexion	Observations
$A  C \qquad B$ $C  B  C  B$ $C  C  B  C  B$ $C  C  B  C  C  B$	$\begin{array}{c cccc} A & & + & \\ & - & C & & B \\ \hline V_{\overline{AC}} = -R_A & V_{\overline{CB}} = R_B \end{array}$	$ \begin{array}{c}                                     $	La flèche est maximale $pour \ x = \sqrt{\frac{L^2 - b^2}{3}}$ $f = -\frac{Fb(L^2 - b^2)^{3/2}}{9\sqrt{3}E.I.L}$ $\theta_A = \frac{F.a.b.(L+b)}{E.I.L}$ $\theta_B = \frac{F.a.b.(L+a)}{E.I.L}$
P a a P $A = P$ $A = P$ Charges concentrées sur porte- $A = A = B$	$\begin{bmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{L} & \mathbf{a} \\ + & & \\ \mathbf{A} & \mathbf{B} & \\ V_{gA} = \mathbf{P} & V_{dB} = -\mathbf{P} \\ V_{\overline{AB}} = 0 \end{bmatrix}$	$\begin{array}{c ccccccccccccccccccccccccccccccccccc$	Moment constant de A à B.



# Partie 3: Le flambement

#### 1. Définition

Lorsqu'une pièce élancée est comprimée, une flexion parasite se produit à partir d'une certaine contrainte. Cette contrainte est appelée contrainte critique de flambement ou contrainte d'Euler. Lors du flambement on se trouve dans le cas de grandes déformations où la linéarité contrainte-déformations n'est plus assurée, voire on se trouve dans le domaine plastique.

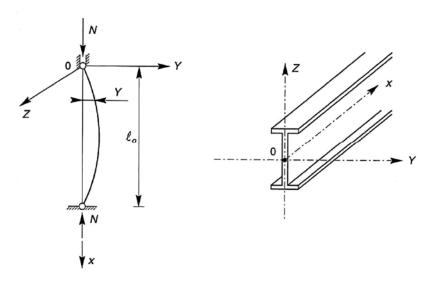


Figure 10 : Phénomène de flambement

La valeur critique de N pour que la poutre soit fléchie est :

$$N_k = \frac{\pi^2 EI}{\ell_k^2}$$
 avec  $\ell_k$  : Longueur de flambement

La contrainte critique est donc :

$$\sigma_{_k} = \frac{N_{_k}}{A} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$$

 $\lambda = \frac{\ell_k}{i}$ : Elancement maximal.

 $i = \sqrt{\frac{I}{A}} \;$  : Rayon de giration minimal, correspondant à l'inertie I minimale.

Lorsque  $\sigma_{\rm k} > \sigma_{\rm e}$  aucun risque de flambement, la ruine survient pour  $\sigma = \sigma_{\rm e}$ 

Lorsque  $\sigma_k^{} < \sigma_e^{}$  il y a ruine par flambement dès que  $\sigma \! = \! \sigma_k^{}$ 

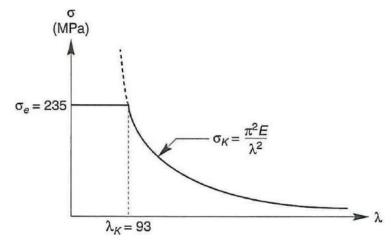


Figure 11 : Evolution de la contrainte critique en fonction de l'élancement

La longueur de flambements pour des poutres courantes est :

$$\ell_{\,k} = \frac{\ell_{\,0}}{\sqrt{m}} \qquad \qquad \ell_{\,0} \, : \text{Longueur r\'eelle de la barre.}$$
 
$$\ell_{\,k} \, : \text{Longueur de flambement.}$$

CONDITIONS D'APPUIS	m	ℓĸ
N $\ell_0 = \ell_K$	1	$\ell_{\rm o}$
N encastrement parfait	2	0,7 l <sub>o</sub>
N - R	4	0,5 ℓ <sub>0</sub>
N encastrement élastique	1 < m < 2	>0,7 ℓ₀
N —	1/4	2 Å <sub>0</sub>

Figure 12 : Langueur de flambement

# 2. Aspect réglementaire du flambement - Règles CM 66

#### a. Flambement simple

Pour une poutre soumise à une contrainte de compression  $\sigma$ , les règles CM66 (chapitre 3,411) précisent que pour les poutres à âme pleine, la condition de non-flambement est :

$$\begin{aligned} & \text{k } \sigma \leq \sigma_{\text{e}} \\ & \text{avec} \end{aligned} \qquad & \text{k} = (0.5 + 0.65 \frac{\sigma_{\text{e}}}{\sigma_{\text{K}}}) + \sqrt{(0.5 + 0.65 \frac{\sigma_{\text{e}}}{\sigma_{\text{K}}})^2 - \frac{\sigma_{\text{e}}}{\sigma_{\text{K}}}} \\ & \sigma_{k} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \quad \text{et } \lambda = \max{(\lambda_{y}, \lambda_{z})} \end{aligned}$$

#### b. Flambement flexion

Pour une poutre soumise à une contrainte de compression  $\sigma$  et une contrainte de flexion  $\sigma_f$  autour de l'axe y, les règles CM 66 (chapitre 3,521) précisent que pour les poutres à âme pleine, la condition de non-flambement est :

$$k_1 \sigma + k_f \sigma_f \leq \sigma_e$$

 $k_1$  est un coefficient d'amplification des contraintes de compression :

$$k_1=rac{\mu_1-1}{\mu_1-1.3}$$
 avec  $\mu_1=rac{\sigma_k}{\sigma}$  
$$\sigma_k=rac{\pi^2 E}{\iota^2} \ \ ext{et} \ \ \iota=\max{(\lambda_y,\lambda_z)}$$

 $k_f$  est un coefficient d'amplification des contraintes de flexion qui dépond de  $\mu$  et du mode de distributions des efforts engendrant la flexion. Dans la pratique,  $k_f$  est pris pour le cas le plus défavorable qui correspond à un moment constant ou variant linéairement (CM66 3,513) :

$$k_f = rac{\mu + 0.25}{\mu - 1.3}$$
 avec  $\mu = rac{\sigma_{ky}}{\sigma}$  et  $\sigma_{ky} = rac{\pi^2 E}{\lambda_{\mathcal{V}}^2}$ 

# Partie 4 : Le déversement

#### 1. Définition:

Le déversement est lié à la flexion, il s'agit d'un <u>flambement de l'aile comprimée</u> et présente des analogies certaines avec les phénomènes de flambement. La poutre, pour un moment critique entre en flexion et en torsion dans son plan de plus faible inertie. Ce phénomène se produit en général pour des poutres ayant une faible inertie à la flexion transversale et à la torsion.

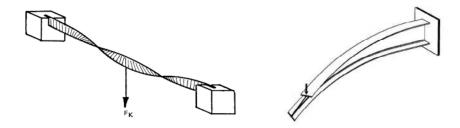


Figure 13 : Phénomène de déversement

#### 2. Paramètre influençant le déversement :

#### Forme de la section :

La résistance au déversement dépend essentiellement de la rigidité de la section en flexion El<sub>y</sub> et de la rigidité de la section à la torsion J.

- ► Augmenter le moment d'inertie en flexion transversale (I<sub>v</sub>)
- Choisir ou créer une section fermée (grande raideur en torsion J)

#### Conditions d'appui et de retenue :

Le déversement peut être évité si l'aile en compression présente une rigidité latérale suffisante ou s'il y a des supports latéraux suffisants stables servant à retenir l'aile comprimée.

- ► Créer des éléments d'entretoisement pour stabiliser la poutre (bracon).
- Les éléments fixés ponctuellement sur la semelle comprimée réduisent le risque de déversement (Solives sur poutre principale, Pannes sur traverse de portique)
- ▶ Les éléments fixés en continu sur la semelle comprimée réduisent le risque de déversement (e.g. dalle béton fixée sur une poutre de plancher par des goujons). A noter que les éléments doivent être fixés et non simplement posés pour constituer des appuis efficaces.

#### Niveau d'application des charges :

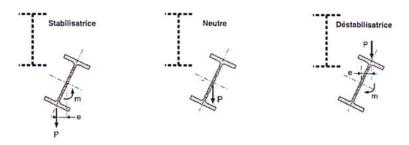


Figure 14: Effet du niveau d'application des charges

# 3. Aspect réglementaire du déversement des pièces fléchies

# a. Cas des poutres en I - Règles CM66 (CM66 art 3.611)

#### Critère général de résistance :

$$k_d \cdot \sigma_f \le \sigma_e$$
 avec  $k_d$  coefficient de déversement.

#### Conditions de la méthode :

- Profil en I doublements symétriques de section constante
- Flexion dans le plan de l'âme
- Rotation (z) bloquée au droit des appuis

#### On distingue trois cas:

- a. Pièces symétriquement appuyées et chargées :
- Poutre de plancher
- Poteau de bardage
- Pannes isostatiques
- b. Poutres avec moments différents au droit des appuis :
- Pannes continues
- Poteaux de portiques
- Arbalétrier
- c. Poutres consoles

# Influence du point d'application de la charge :

- Charge sur l'aile comprimée : cas défavorable
- Charge au centre de gravité : cas neutre
- Charge sur l'aile tendue : cas favorable

#### Dispositions relatives contre le déversement :

Les constructions doivent bloquer la membrure comprimée pour éviter tout risque de déversement transversal, notamment :

- En créant des points fixes : ceux-ci diminuent la longueur de flambement de la membrure ; on peut utiliser des contreventements, bracons, encastrement latéral de la membrure comprimée, etc. (les bracons sont dimensionnés pour reprendre 2% de l'effort capable de compression ou de traction de la semelle inférieure du profil )
- En renforçant la membrure comprimée
- En encastrant latéralement la membrure comprimée

#### Le déversement n'est pas à craindre lorsque :

- La membrure comprimée est maintenue transversalement sur toute sa longueur (e.g. poutre de plancher)
- La membrure comprimée est maintenue en des points suffisamment rapprochés (e.g. poutre avec traverses intermédiaires)

# 4. Déversement des poutres symétriquement appuyées et chargées

#### a. Moment d'inertie de torsion d'une section :

$$J = \frac{\alpha}{3} \sum b_i e_i^3$$

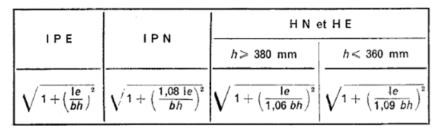
Où  $b_i$  largeur des différents éléments composant la section  $e_i$  épaisseur des différents éléments composant la section  $\alpha$ =1.25 pour les sections en I laminées  $\alpha$ =1.1 pour les sections en U et en T

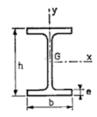
# b. Calcul de D, coefficient caractéristique des dimensions de la pièce

$$D = \sqrt{1 + \frac{4}{\pi^2} \frac{G J}{E l_y} \frac{l^2}{h^2}} = \sqrt{1 + 0.156 \frac{J}{l_y} \frac{l^2}{h^2}}$$

- h la hauteur de la section;
- son moment d'inertie par rapport à l'axe Gy perpendiculaire aux semelles ;
- j son moment d'inertie de torsion, dont le mode de détermination est rappelé dans l'annexe 13,601;
- la longueur de flambement de la membrure comprimée supposée isolée du reste de la pièce;

Pour les poutrelles laminées courantes, on peut utiliser les valeurs de D du tableau ci-après (CM66-3,641):



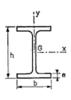


I la longueur de flambement de la membrure comprimée supposée isolée du reste de la pièce;

#### c. Calcul de C, coefficient caractéristique de la répartition longitudinale des charges

Selon le chapitre (CM66 - 3,642)

	Encastrement par rapport à l'axe		Charge concentrée	Charge uniformément	2 charges symétriques		
Gy	Gx	constant	au milieu	répartie	à c des appuis		
sans	sans	1 1,365 1,132		1,132	$1+2,92\left(\frac{c}{l}\right)^3$		
(/ <sub>0</sub> = /)	avec	-	0,938	0,576	$0,1+1,2\frac{c}{l}+1,9\left(\frac{c}{l}\right)^{3}$		
avec	sans	1	1,076	0,972	$1 + \left(\frac{c}{l}\right)^3 \left(\frac{c}{l} - 0.93\right)$		
$(l_0=2l)$	avec	-	0,633	0,425	$0,181 + 0,307 \frac{c}{l} + \left(\frac{c}{l} - 0,474\right)^{3}$		



Lorsque le chargement comporte plusieurs charges agissant dans le même sens et auxquels correspond les coefficients  $c_1$ ,  $c_2$ , etc. et les contraintes  $\sigma_{f1}$ ,  $\sigma_{f2}$ , etc. le coefficient c applicable à l'ensemble est donné par :

$$\frac{\sigma_{\text{fl}} + \sigma_{\text{fl}} + \cdots}{c} = \frac{\sigma_{\text{fl}}}{c_{\text{l}}} + \frac{\sigma_{\text{f2}}}{c_{\text{2}}} + \cdots$$

d. Calcul de B, coefficient caractéristique du niveau d'application des charges, Selon le chapitre (CM66 - 3,643.1)

$$B = \sqrt{1 + \left(\frac{y_a}{h} \frac{8 \beta C}{\pi^2 D}\right)^2 - \frac{y_a}{h} \frac{8 \beta C}{\pi^2 D}}$$

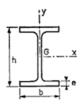
 $y_a$  est la distance du point d'application des charges au centre de gravité de la section, comptée positivement au-dessus du centre de gravité. En particulier, en cas d'application des charges au niveau :

$$B = \sqrt{1 + \left(0,405 \frac{\beta C}{D}\right)^2} - 0,405 \frac{\beta C}{D}$$

$$B = \sqrt{1 + \left(0,405 \, \frac{\beta \, C}{D}\right)^2} + 0,405 \, \frac{\beta \, C}{D}$$

Calcul du coefficient  $\beta$  (CM66 - 3,643.1):

Encastrement par rapport à l'axe		Moment constant	Charge concentrée	Charge uniformément	2 charges symétriques		
Gy	Gy Gx		au milieu répartie		à c des appuis		
sans	sans	0	1	1 .	$6\frac{c}{l}-8\frac{c^2}{l^2}$		
$(I_0 = I)$	avec	_	2	3	$5-2\frac{c}{l}-8\frac{c^2}{l^2}$		
avec	sans	0	1	0,75	$5\left(\frac{c}{l}\right)^3\left(1,2-\frac{c}{l}\right)$		
(/ <sub>0</sub> = 2/)	avec		2	2,25	$\frac{c^2}{I^2}\left(13-11\frac{c}{I}\right)$		



Lorsque le chargement comporte plusieurs charges auxquels correspondent les coefficients  $\beta_1$ ,  $\beta_2$ , etc. et les contraintes  $\sigma_{f1}$ ,  $\sigma_{f2}$ , etc. le coefficient  $\beta$  applicable à l'ensemble est donné par :

$$\beta \left(\sigma_{_{\mathrm{fl}}} + \sigma_{_{\mathrm{f2}}} + \cdots\right) = \beta_{_{1}}\sigma_{_{\mathrm{fl}}} + \beta_{_{2}}\sigma_{_{\mathrm{f2}}} + \cdots$$

#### e. Calcul de la contrainte de déversement

La contrainte de déversement en (daN/mm²) selon le chapitre (CM66 - 3,643.1) est :

$$\sigma_{_{d}} = 40\,000 \frac{I_{_{y}}}{I_{_{y}}} \frac{h^{2}}{\ell^{2}} (D-1) BC$$



D : Coefficient fonction des dimensions de la pièce. (CM66 - 3,641)

C: Coefficient fonction de la répartition des charges. (CM66 - 3,642)

B: Coefficient fonction du niveau d'application des charges. (CM66 - 3,643)

I : longueur de flambement de la semelle comprimée supposée isolée du reste de la pièce

Si  $\,\sigma_{_{\! d}} \geq \! \sigma_{_{\! e}}\,$  aucun risque de déversement

Si  $\,\sigma_{d}^{} < \!\sigma_{e}^{}\,$  on détermine un élancement,  $\,\lambda_{0}^{}\,$  (CM66 - 3,611)

$$\lambda_0 = \frac{\ell}{h} \sqrt{\frac{4}{BC} \frac{I_x}{I_y} (1 - \frac{\sigma_d}{\sigma_e})}$$

On en tire le coefficient de déversement k<sub>d</sub> :

$$k_{d} = \frac{k_{0}}{1 + \frac{\sigma_{d}}{\sigma_{e}}(k_{0} - 1)}$$

$$k_0 = (0, 5 + 0, 65 \frac{\sigma_e}{\sigma_K}) + \sqrt{(0, 5 + 0, 65 \frac{\sigma_e}{\sigma_K})^2 - \frac{\sigma_e}{\sigma_K}}$$
 et  $\sigma_k = \frac{\pi^2 E}{\lambda_o^2}$ 

Et on vérifie que :  $\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{f}}.\boldsymbol{k}_{\mathrm{d}} \leq \boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{e}}$ 

# 5. Déversement des poutres consoles

#### a. Conditions de la méthode :

- Les charges appliquées sont de mêmes sens
- Profils doublements symétriques
- Flexion dans le plan de l'âme
- Poutre parfaitement encastrée

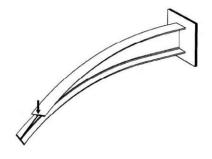


Figure 15

#### b. Vérifications à effectuer :

$$\sigma_f.k_d \leq \sigma_e$$

#### c. Notations:

lo longueur de la poutre libre

I longueur de déversement, l=2lo (Poutre console parfaitement encastrée)

h hauteur du profil

b largeur de l'aile

e épaisseur de la semelle

C coefficient de la répartition longitudinale des charges

#### d. Calcul de C (CM66 - 3,642-3):

■ Charge uniformément répartie : *C=4.93* 

■ Charge concentrée à l'extrémité : C=2.77

• Charge à distance c de l'encastrement :  $C = \frac{1}{c} + 0.19 \frac{l^2}{c^2}$  (c)

• Lorsque le chargement comporte plusieurs charges agissant dans le même sens et auxquels correspond les coefficients  $c_1$ ,  $c_2$ , etc. et les contraintes  $\sigma_{f1}$ ,  $\sigma_{f2}$ , etc. le coefficient c est donné par :

$$\frac{\sigma_{f1} + \sigma_{f1} + \cdots}{c} = \frac{\sigma_{f1}}{c_1} + \frac{\sigma_{f2}}{c_2} + \cdots$$

#### e. Calcul de k<sub>d</sub>:

Charges appliquées au centre de gravité (CM66 - 3,631) :

$$k_d = 0.1 + 2.2 \frac{lh}{1000Cbe} \frac{\sigma_e}{24}$$

• Charges appliquées sur l'aile supérieure (CM66 - 3,632):

On applique la formule précédente en remplaçant l par l+0.375 C h  $\frac{b}{e}$ 

• Charges appliquées sur l'aile inférieure (CM66 - 3,632):

On applique la même formule en remplaçant l par l-0.375 C h  $\frac{b}{e}$ 

# Partie 5: Les assemblages boulonnés

#### 1. Généralités

Le rôle des assemblages est d'assurer la transmission et la répartition des diverses sollicitations entre les pièces, sans générer de sollicitations parasites (torsion).

#### Disposition des pièces à assembler :

- Soit bout à bout.
- Soit concourant.

#### Parmi les assemblages :

- Assemblages articulés transmettent uniquement N, T,
- Assemblages rigides transmettent les efforts et les moments.

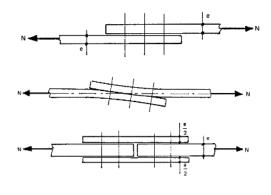
#### Fonctionnement des assemblages :

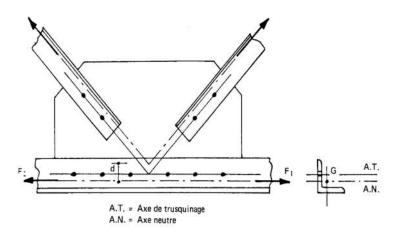
- Fonctionnement par obstacle : boulon ordinaire.
- Fonctionnement par adhérence : soudage, boulonnage par HR.
- Fonctionnement mixte : rivetage (pratiquement abandonnés de nos jours).

#### Précaution constructive :

Il faut un bon dimensionnement et une conception correcte (la transmission des forces sans aucun effort ou moment secondaire parasite.)

- Utiliser un assemblage symétrique par double couvre joint (fig. 16).
- S'assurer que les axes neutres des barres sont concourants aux nœuds des treillis (fig. 17). Ce n'est souvent pas le cas pour les treillis réalisés en cornières.





Moment secondaire :  $M=(F_2-F_1)d$ Figure 16 Figure 17

# Exemple d'assemblages rigides.

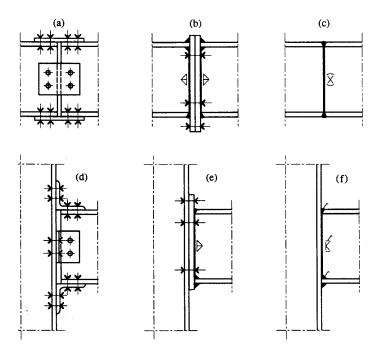
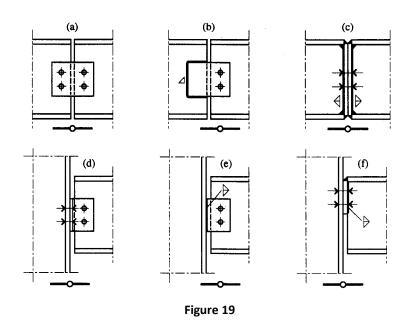


Figure 18

# Exemple d'assemblages articulés



# 2. Calcul des assemblages par boulons non précontraints

Les boulons ordinaires (non précontraints) sont réservés pour des structures démontables ou provisoires. Les efforts sont transmis par les tiges en cisaillement.

#### a. Notation

A<sub>N</sub> : Section nette de la pièce

 $A_s$  : Section résistance de la tige filetée

d : Diamètre nominal du boulon

d<sub>tr</sub> : Diamètre du trouF : Effort dans la barre

Q : Effort pondéré par boulon, exercé sur l'assemblage.

T : Effort pondéré exercé sur un boulon perpendiculairement à son axe, par une pièce

N : Effort normal de traction pondéré exercé sur chaque boulon

m : Nombre de plans de cisaillement

 $\sigma_{\text{red}}~:~$  Contrainte caractéristique de vérification des boulons

σ<sub>e</sub> : Limite élastique du matériau

#### b. Contraintes caractéristiques des boulons

Classe de qualité	4.6	4.8	5.6	5.8	6.6	6.8	6.9	8.8	10.9
$\sigma_{\rm red}$ (N/mm²)	240	280	300	340	350	410	410	550	670

# c. Caractéristiques de la section résistante du boulon

Diamètre nominal d (mm)	8	10	12	14	16	18	20	22	24	27	30
Section résistante A <sub>s</sub> (mm²)	36.6	58	84.3	115	157	192	245	303	353	459	561

#### d. Vérification de la résistance des boulons :

Les principales formules de vérification sont les suivantes :

À la traction (Fig. 20), on vérifie

$$1,25\frac{N}{A_s} \le \sigma_{red}$$

Au cisaillement (Fig. 21 et 22), on vérifie

$$1,54\frac{Q}{mA_s} \le \sigma_{red}$$

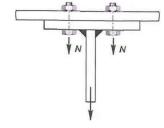


Figure 20

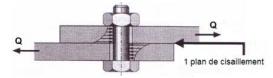


Figure 21 : m=1

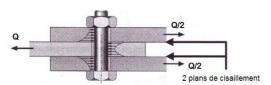


Figure 22 : m=2

A un effort incliné sur le plan du joint (Fig. 23), on vérifie par boulon simultanément :

$$1,25\frac{N}{A_s} \le \sigma_{red}$$
 et 
$$\frac{\sqrt{N^2 + 2,36\left(Q/m\right)^2}}{A_s} \le \sigma_{red}$$

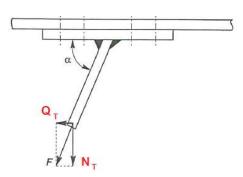


Figure 23

# e. Vérification de la résistance des pièces :

# Pression diamétrale sur les pièces

$$\frac{T}{d_{tr}.e} \le 3 \sigma_e$$

avec :  $d_{tr}$  = d+1mm pour les boulons d  $\leq$  14 d+2mm pour les boulons d  $\leq$  24 d+3 mm pour les boulons d  $\geq$  27

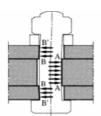
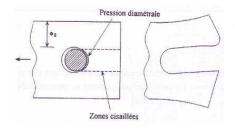
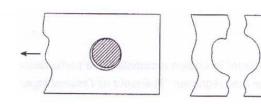


Figure 24



Ruine par arrachement

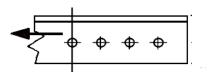


Ruine en section nette

Figure 25

#### Résistance de la section nette des pièces

$$\frac{F}{A_N} \le \sigma_e$$





# Disposition des boulons

 $\begin{array}{ll} \text{Indications sur les valeurs usuelles:} \\ \text{Entraxe des boulons} & p_1 = p_2 = 3d \\ \text{Pince longitudinale} & e_1 = 2d \\ \text{Pince transversale} & e_2 = 1.5d \\ \end{array}$ 

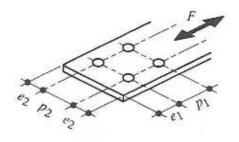


Figure 26

Figure 27

# 3. Calcul des assemblages par boulons HR (haute résistance)

Le serrage très fort développe un effort de précontrainte parallèle à l'axe du boulon. Les boulons HR transmettent les efforts par frottement (adhérence).

# a. Caractéristiques mécaniques des boulons.

Il existe 2 classes de boulons HR.

Repère	Appellation	$\sigma_R$ (daN/mm <sup>2</sup> )	$\sigma_{\text{eb}}$ (daN/mm²)	Allongement Tige (%)
HR 1	HR 10.9	100	90	≥8
HR 2	HR 8.8	80	64	≥ 12

#### b. Précontrainte No du boulon

L'effort de serrage appliqué à un boulon HR est conduit jusqu'à ce que la contrainte limite d'élasticité  $\sigma_{eb}$  de la tige soit atteinte. L'effort de précontrainte dans un boulon est :

 $N_0 = 0.8 \, {\rm A_s} \, \sigma_{\rm eb}$  0.8 : compte tenu des pertes de tension inévitable (20% tension initiale)

# c. Principales formules de vérification

#### Effort de traction admissible :

Lorsque l'assemblage est en traction, l'effort pondéré  $N_a$  par boulon doit vérifier :

$$N_a \leq N_o$$

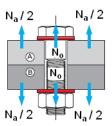


Figure 28

# Effort tangentiel admissible:

Lorsque l'assemblage est sollicité par un effort perpendiculaire à l'axe des boulons, la valeur admissible T<sub>a</sub> de cet effort pondéré, par boulon et par plan de glissement, est donnée par :

$$T_a \le 1.1 N_o \phi$$

 $\phi \; : \;$  coefficient du frottement, 0.30 pour les surface brossée et 0.45 pour le surfaces grenaillées

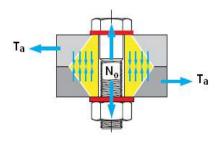
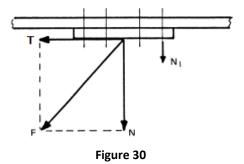


Figure 29

# Résistance à un effort incliné sur le plan du joint :

Lorsque la sollicitation engendre par boulon à la fois un effort  $T_a$  perpendiculaire à son axe et un effort  $N_a$  parallèle à son axe l'assemblage, ces efforts pondérés ne doivent pas dépassés les valeurs :



$$N_a \leq N_o$$

et 
$$T_a \le 1.1 \varphi (N_o - N_a)$$

# Pression diamétrale sur les pièces :

Dans certains cas involontaires, les boulons HR fonctionnent en obstacle (au cisaillement), les tiges viennent au contact des pièces.

La pression diamétrale sur la surface de contact (calculs au niveau des pièces assemblées) doit vérifier :

$$\frac{T}{d.e} \leq 4\sigma_{e} \quad \text{avec T est Effort de glissement repris par le boulon}$$

# Partie 6: Les assemblages soudés

#### 1. Généralités

# Les avantages du soudage :

- Il assure la continuité de matière bonne transmission des sollicitations -.
- Il dispense de pièces secondaires (goussets, attaches, ..).
- Il est de moindre encombrement.

#### Les inconvénients :

- Le métal de base doit être soudable.
- Le contrôle de soudure est nécessaire et onéreux.
- Le soudage exige une main d'œuvre qualifiée.

#### **Dispositions constructives:**

#### Soudures bout à bout

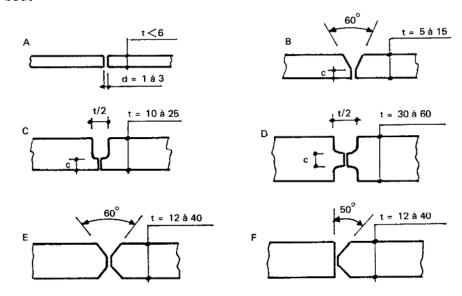
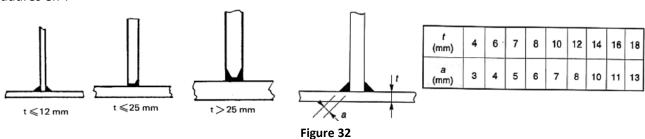


Figure 31





#### 2. Calculs des cordons de soudures

- Les soudures bout à bout ne se calculent pas ; (Il y a continuité de matière).
- Les méthodes de calculs s'appliquent aux soudures d'angle.

#### Notation.

a: Epaisseur utile ou gorge.

I : Longueur utile du cordon.

 $\sigma, \tau_{\perp}, \tau_{//}$  : Composantes de la contrainte moyenne rapportée à la section de gorge du cordon (axl).

N : Effort pondéré appliqué au cordon.

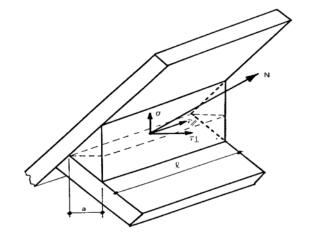


Figure 33

#### a. Formule fondamentale.

Les dimensions du cordon de soudure doivent satisfaire à la condition :

$$k.\sqrt{\sigma^2 + 3(\tau_\perp^2 + \tau_{//}^2)} \le \sigma_e$$

k : coefficient dépendant de la nuance d'acier.

Acier S235 : k = 0.7, S275 : k = 0.87 , S355 : k = 1.0

#### b. Calcul des cordons frontaux reliant des pièces orthogonales

$$\sigma = \frac{N_n}{2\ell a} = \frac{N\sqrt{2}}{4\ell a}$$

$$\tau_{\perp} = \frac{N_{\perp}}{2\ell a} = \frac{N\sqrt{2}}{4\ell a}$$

$$N_{{\scriptscriptstyle //}}=0: au_{{\scriptscriptstyle //}}=0$$

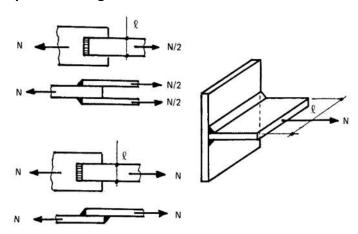
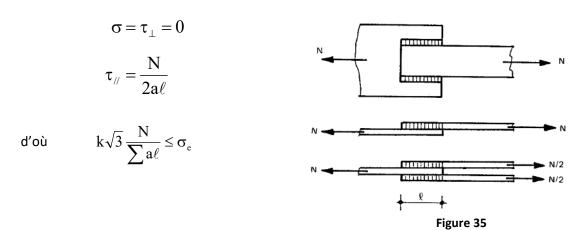


Figure 34

La formule fondamentale s'écrit :

$$k\sqrt{2}.\frac{N}{\sum a.\ell} \leq \sigma_e$$

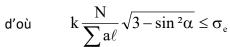
# c. Calcul des cordons latéraux reliant des pièces orthogonales



# d. Calcul des cordons obliques reliant des pièces orthogonales

$$\sigma = \tau_{\perp} = \frac{N \sin \alpha}{2\sqrt{2} a\ell}$$

$$\tau_{\parallel} = \frac{N \cos \alpha}{2a\ell}$$



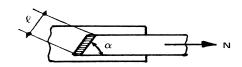


Figure 36

# e. Calcul des cordons reliant des pièces obliques.

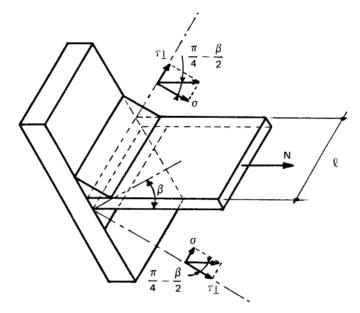


Figure 37

#### **Cordons frontaux**

Pour l'angle obtus

Page 30

$$\sigma = \frac{N}{2a\ell}\cos(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2})$$

$$\tau_{\perp} = \frac{N}{2a\ell} \sin(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2})$$

$$\tau_{\prime\prime}=0$$

D'où

$$k\sqrt{2-\sin\beta}\,\frac{N}{\sum a\ell} \le \sigma_e$$

Pour l'angle aigu

$$k\sqrt{2+\sin\beta}\,\frac{N}{\sum a\ell} \le \sigma_e$$

#### **Cordons latéraux**

Quel que soit l'angle, obtus ou aigu

$$k\sqrt{3}\,\frac{N}{\sum a\ell} \leq \sigma_e$$

#### **Cordons obliques**

 $\alpha$  : angle cordon – direction de l'effort pour un angle obtus

$$k\sqrt{3-(1+\sin\beta).\sin{}^2\alpha}.\frac{N}{\sum a\ell} \leq \sigma_e$$

pour un angle aigu

$$k\sqrt{3-(1-\sin\beta).\sin^2\alpha}.\frac{N}{\sum a\ell} \leq \sigma_e$$

#### f. Formule enveloppe

Quelle que soit l'orientation de l'effort et du cordon de soudure.

$$k\sqrt{3}\,\frac{N}{\sum a\ell} \le \sigma_e$$

Les calculs précédents ne sont pas nécessaires.

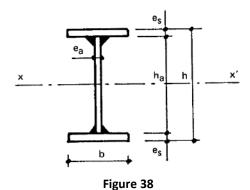
- 3. Calcul des assemblages des pièces fléchies.
- a. Cordons entre âme et semelles d'une poutre à âme pleine.

Pr. Z. EL MASKAOUI

T: effort tranchant

S: moment statique de la semelle/xx'

I : moment d'inertie de la secteurs complète/xx'



On a

$$\sigma=\tau_{\perp}=0$$

$$\tau_{/\!/} = \frac{TS}{2aI}$$

D'où

$$k\sqrt{3}\,\frac{TS}{2aI} \le \sigma_e$$

L'épaisseur utile du cordon est :

$$a \geq \frac{k\sqrt{3}}{2\sigma_e} \frac{TS}{I}$$

# b. Cordons d'attache d'une poutre sur un poteau.

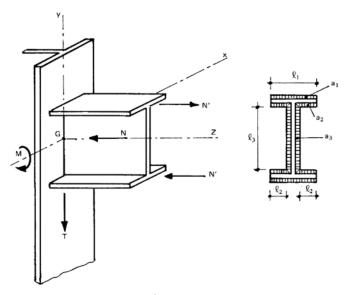


Figure 39

Par simplification, on admet que:

N: uniforme entre tous les cordons

T : uniforme entre tous les cordons de l'âme

M: est repris par les cordons des semelles, avec M = N'.ha

#### Cordons d'ailes :

Sous les efforts N et N' : cordons frontaux

Pour N: 
$$\tau_{\parallel} = 0$$
 et  $\sigma = \tau_{\perp} = \frac{N}{\sqrt{2} \sum (a\ell)}$ 

Pour N' : 
$$\tau'_{\parallel} = 0$$
 et  $\sigma' = \tau'_{\perp} = \frac{N'}{\sqrt{2}\sum (a\ell)'}$ 

#### Cordons d'âmes :

Sous l'effort N : cordons frontaux

$$\sigma = \tau_{\perp} = \frac{N}{\sqrt{2\sum (a\ell)}} \text{ et } \tau_{//} = 0$$

Sous l'effort T : cordons latéraux

$$\sigma = \tau_{\perp} = 0 \ , \ \tau_{//} = \frac{T}{2a_3\ell_3}$$

D'où la formule de la condition de vérification

Pour les cordons d'ailes

$$k\sqrt{2(\frac{N}{\sum (a\ell)}\pm \frac{N'}{\sum (a\ell)'}} \leq \sigma_e$$

Pour les cordons d'âme

$$k\sqrt{2\!\!\left[\frac{N}{\sum (a\ell)}\right]^2+3\!\!\left[\frac{T}{2a_3\ell_3}\right]^2}\leq \sigma_e$$

Avec

$$\sum (a\ell) = 2a_1\ell_1 + 4a_2\ell_2 + 2a_3\ell_3$$
$$\sum (a\ell)' = a_1\ell_1 + 2a_2\ell_2$$

# Références bibliographiques

