Université Internationale de Casablanca

UNIVERSITÉ RECONNUE PAR L'ÉTAT

3A Cycle ingénieur GM

Calcul des structures

Smail ZAKI

Professeur d'enseignement supérieure

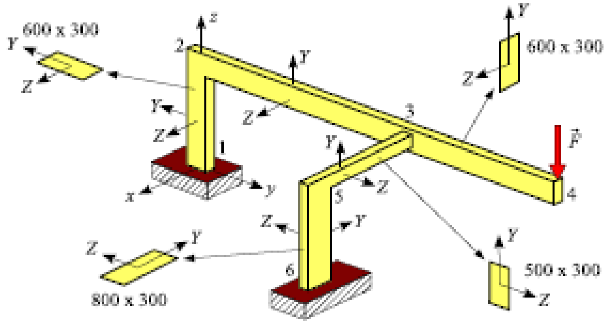
Ing., phd. Arts et Métiers

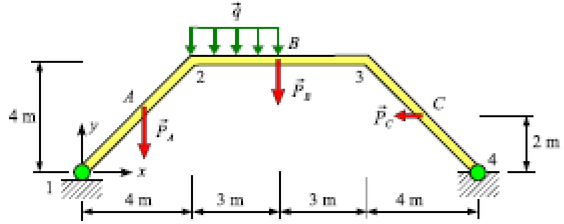
Mobile : 06 67 95 38 67

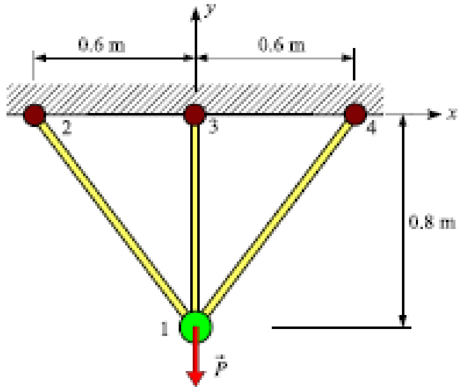
Email : smail.zaki@gmail.com

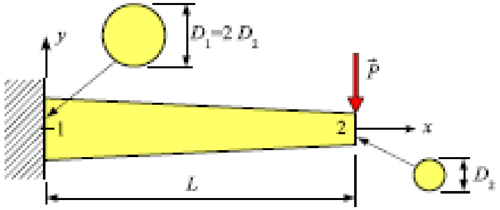
AU: 2019/2020

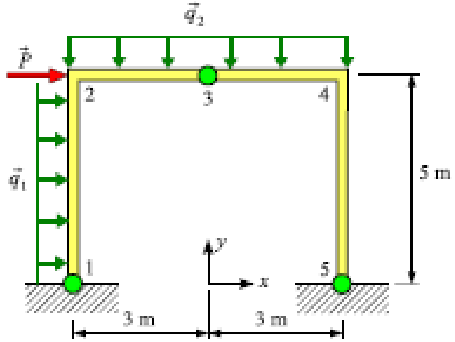
PLAN DE COURS

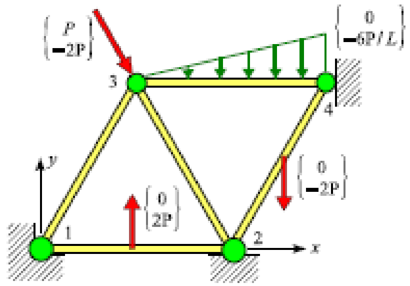

600 x 300
600 x 300
800 x 300
500 x 300

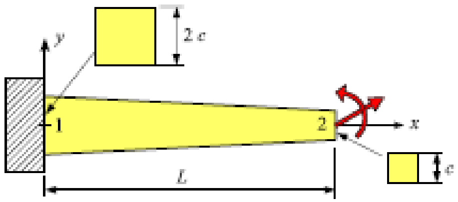

4 m
2 m
4 m
3 m
3 m
4 m

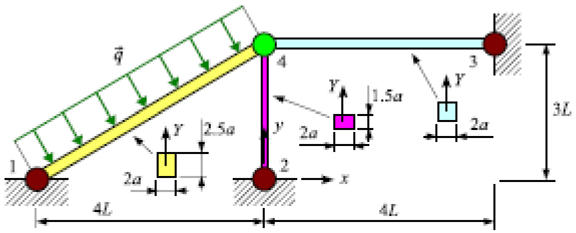

0.6 m
0.6 m
0.8 m

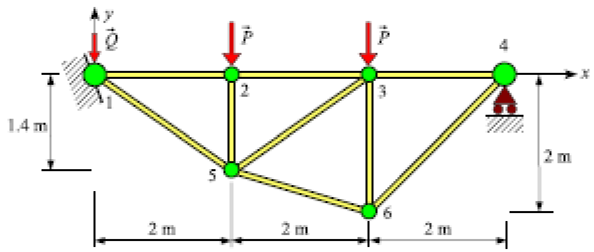

$D_1 = 2\,D_2$
L
D_2

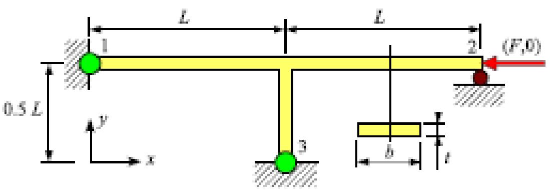

5 m
3 m
3 m

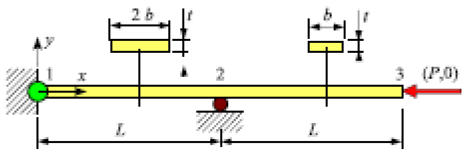

$\begin{Bmatrix} P \\ -2P \end{Bmatrix}$
$\begin{Bmatrix} 0 \\ -6P/L \end{Bmatrix}$
$\begin{Bmatrix} 0 \\ 2P \end{Bmatrix}$
$\begin{Bmatrix} 0 \\ -2P \end{Bmatrix}$

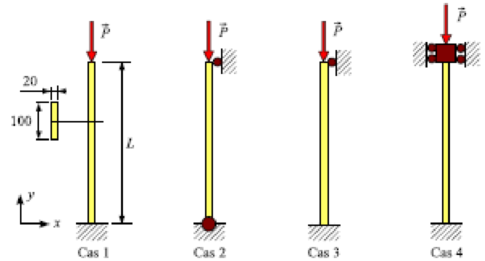

2 c
L
c


2.5a
1.5a
2a
2a
2a
3L
4L
4L


1.4 m
2 m
2 m
2 m
2 m


L
L
(F,0)
0.5 L


2 b
b
(P,0)
L
L

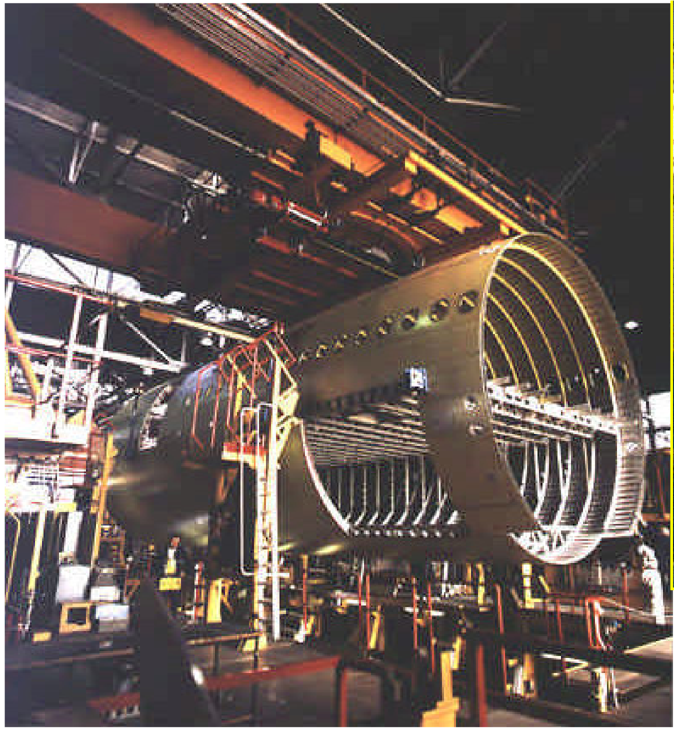

20
100
L
Cas 1
Cas 2
Cas 3
Cas 4

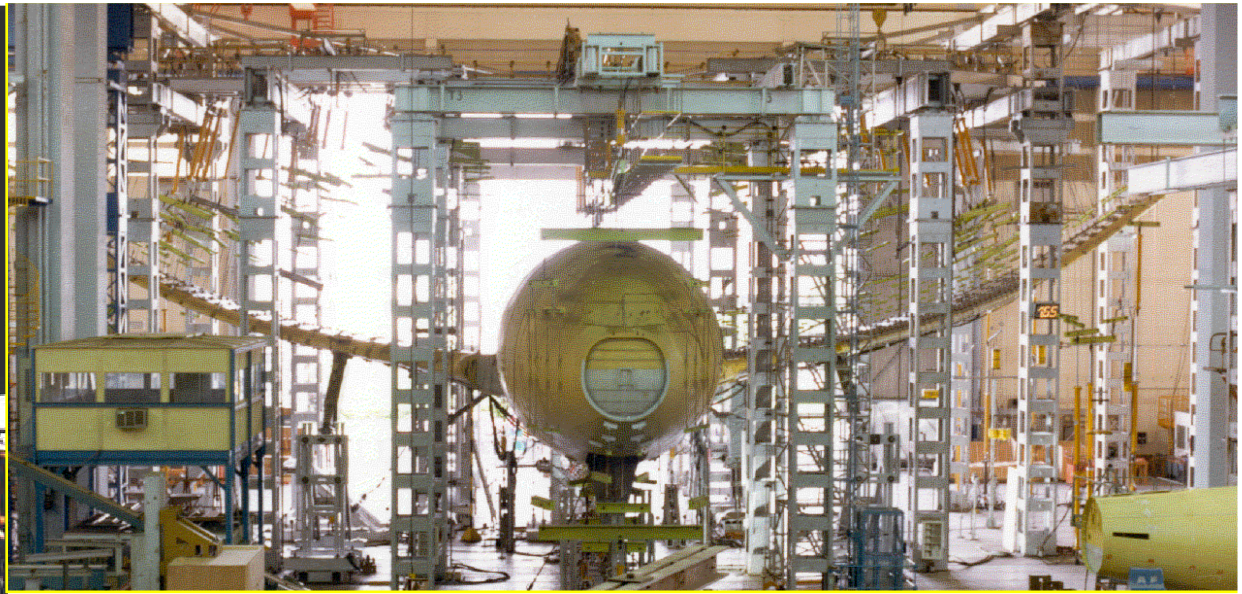
0983865 www.fotosearch.com

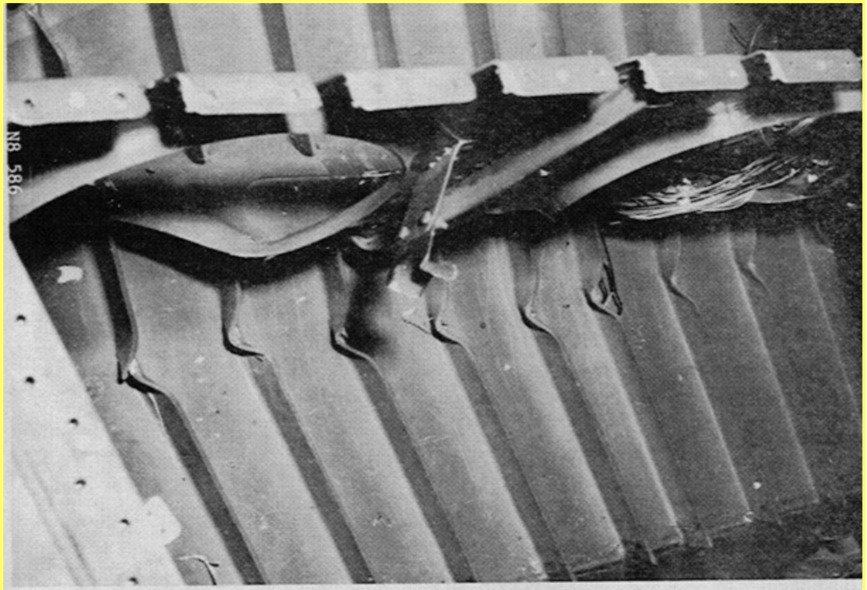
0906633 www.fotosearch.com

0732411 www.fotosearch.com

0779135 www.fotosearch.com







II.5 - Flambage d'un panneau d'extrados de voilure au voisinage d'une nervure courante (vue de l'intérieur du caisson après ouverture).




Chap. 1:
Rappels et prérequis

Plan de Chapitre 1

I. Hypothèses générales

I. Les actions de liaison

II. Sollicitations Simples

III. Sollicitations Composées

IV. Systèmes hyperstatiques

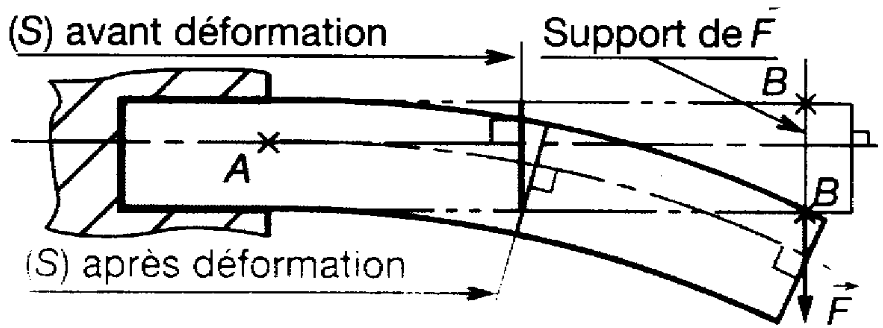
V. Applications

I. Hypothèses générales

Sur les déformations

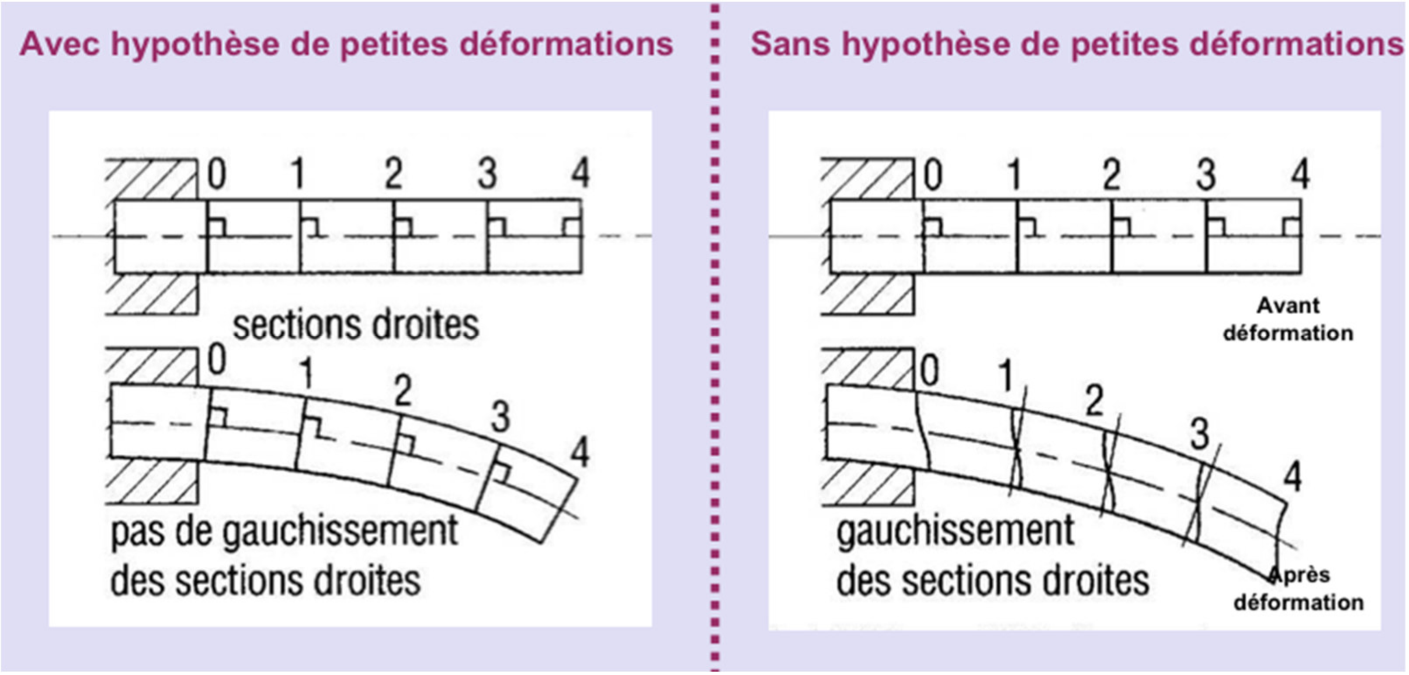
➢ Hypothèse de BERNOUILLI

Les sections droites planes et perpendiculaires à la ligne moyenne, restent planes et perpendiculaires à la ligne moyenne après déformation.



Hypothèses de Bernouilli

Toute section droite avant déformation reste plane et perpendiculaire à la ligne moyenne déformée.

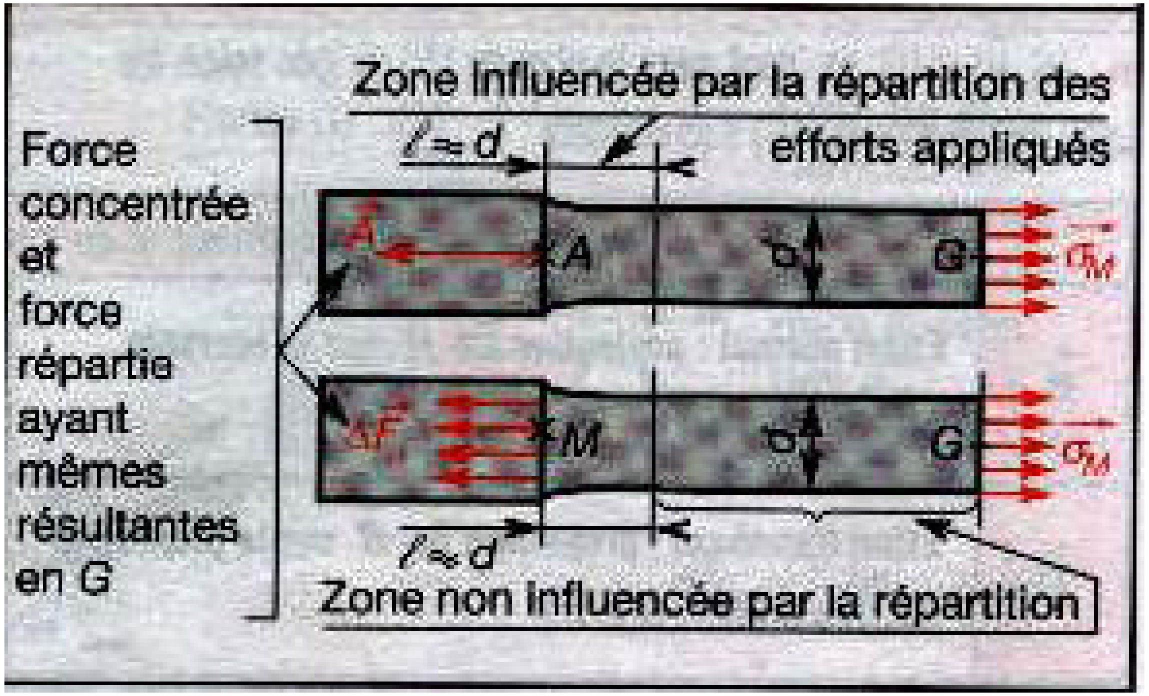


→ les sections droites restent planes selon Navier-Bernoulli (pas de gauchissement).

L'hypothèse de Bernoulli permet de négliger le cisaillement dans le cas de la flexion : le risque de rupture est alors dû à l'extension des fibres situées à l'extérieur de la flexion, et la flèche est due au moment fléchissant

Sur l’application des charges (principe de barre de saint-venant)

«Les contraintes et les déformations dans une région éloignée des points d’application d’un système de forces ne dépendent que de la résultante générale et du moment résultant de ce système de forces.»



II. Les actions de liaison

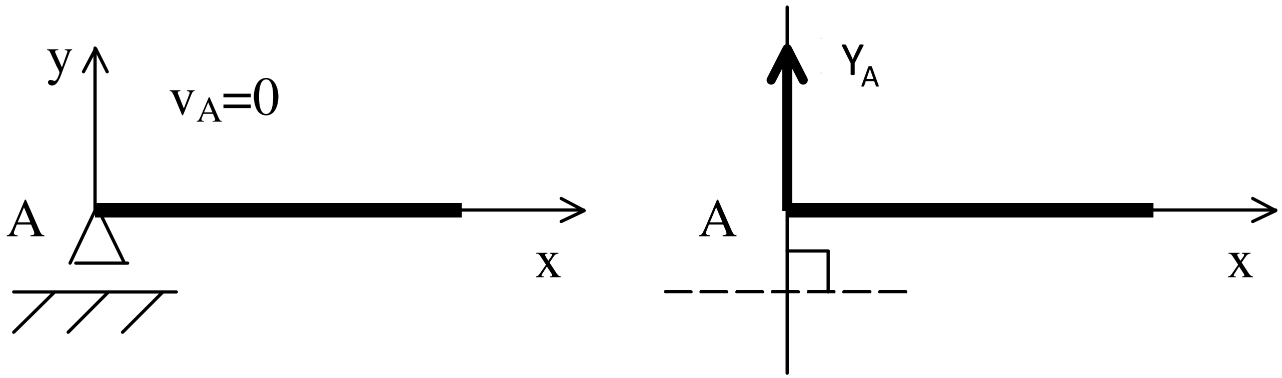
Les actions de liaison

1 L'appui simple

Un système matériel S_1 est en appui simple sur un système matériel S_2 si le contact peut être supposé ponctuel ou suivant une arête, et a lieu sans frottement.

L'appui simple impose un seul blocage en translation dans la direction normale à la surface d'appui. Il fait ainsi naître une force de liaison dans cette direction.

1 L'appui simple



La force de liaison a les caractéristiques suivantes :

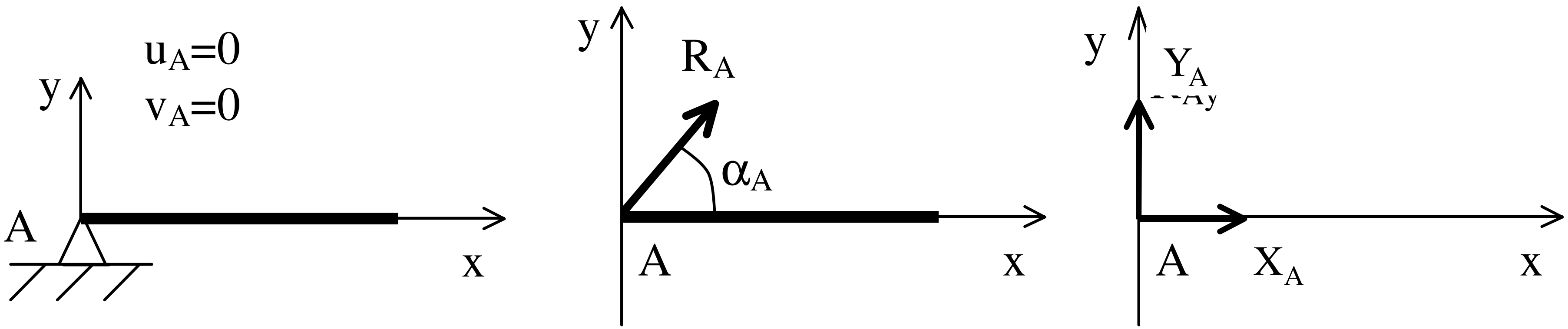
- Point d'application A,
- Droite d'action perpendiculaire à la surface d'appui,
- Composante Y_A inconnue.

L'appui simple introduit donc 1 inconnue.

2 L’articulation

Elle impose deux blocages en translation suivant les axes Ox et Oy, et la rotation reste libre. L’articulation fait donc naître les deux composantes de la force de liaison.

2 L'articulation



La force de liaison a les caractéristiques suivantes :

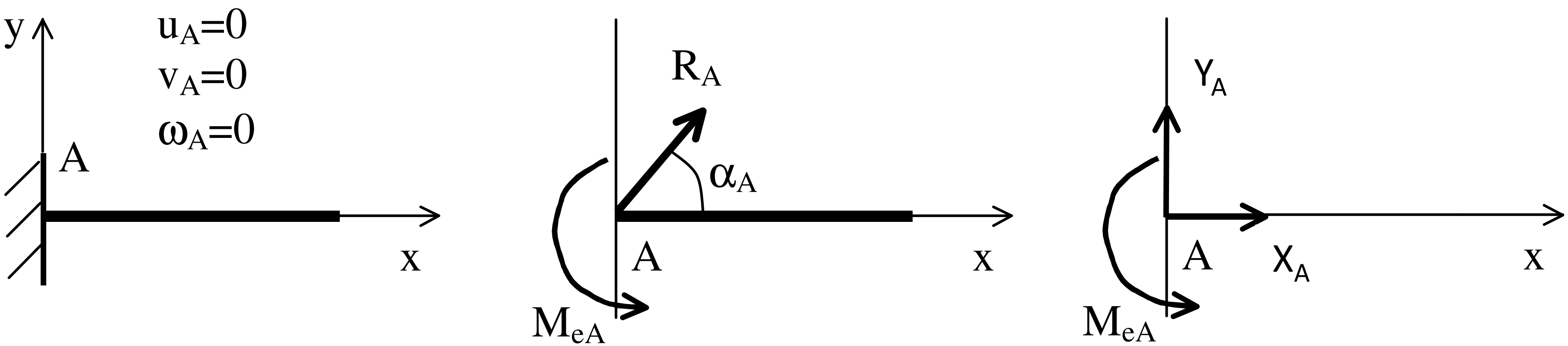
- Point d'application A,
- Composantes X_A et Y_A inconnues.

L'articulation introduit donc 2 inconnues (X_A et Y_A)**.**

3 L’encastrement

Il impose trois blocages (les deux translations et la rotation). Les deux blocages en translation font naître les deux composantes de la force de liaison. Le blocage en rotation fait naître le moment d’encastrement.

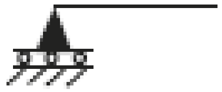
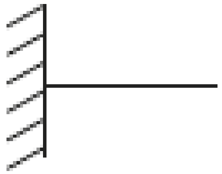
3 L'encastrement



Les actions de liaison ont les caractéristiques suivantes :

- Point d'application A,
- Composantes X_A et Y_A de la force de liaison inconnues,
- Moment d'encastrement M_{eA} inconnu.

L'encastrement introduit donc 3 inconnues (X_A, Y_A et M_{eA})**.**

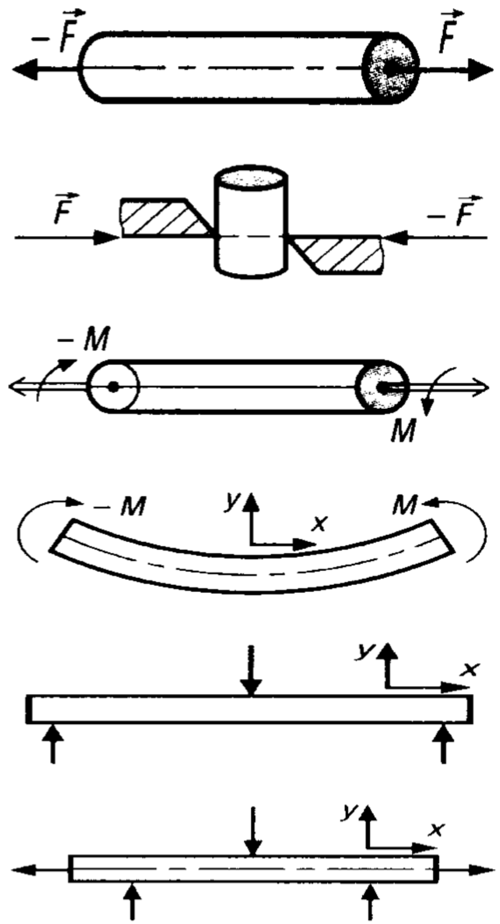
Type de liaisons	Schémas	Réactions d'appuis	Degrés de liberté
Rotule		$H \neq 0, V \neq 0,$ $M = 0$	$u = 0, v = 0, \theta \neq 0$
Appui simple		$V \neq 0, H = 0,$ $M = 0$	$v = 0, u \neq 0, \theta \neq 0$
Encastrement		$V \neq 0, H \neq 0,$ $M \neq 0$	$v = 0, u = 0, \theta = 0$

III. Sollicitations Simples

III. Nature des sollicitations

Sollicitations simples

Nature des sollicitations	Forces de cohésion
Traction ou Compression	N
Cisaillement simple	T
Torsion simple	Mt
Flexion pure	Mf
Flexion simple	T+Mf
Flexion composée	N+T+Mf

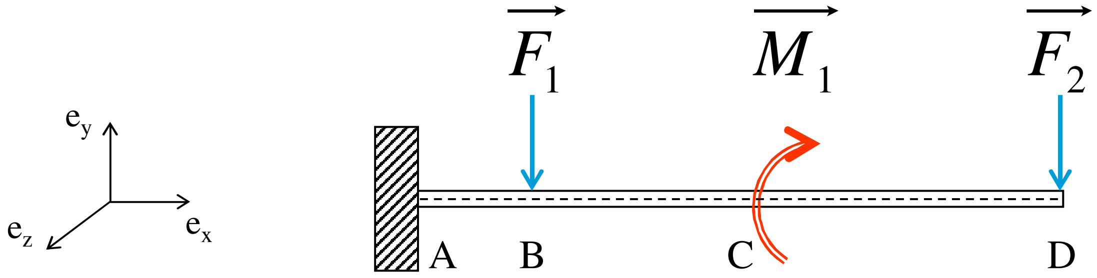


Nature des Sollicitations (simples)

Nature des sollicitations	Effort Normal	Effort Tranchant	Moment de Torsion	Moment de Flexion	Torseur de cohésion
Traction (N>0) **Compression (N<0)**	N	$T_y=0$ $T_z=0$	$M_t=0$	$M_{fy}=0$ $M_{fz}=0$	$\{\tau_{Coh}\}=\begin{Bmatrix} N & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_G$
Cisaillement simple	N=0	T_y ou T_z	$M_t=0$	$M_{fy}=0$ $M_{fz}=0$	$\{\tau_{Coh}\}=\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ T_y & 0 \\ T_z & 0 \end{Bmatrix}_G$
Torsion simple	N=0	$T_y=0$ $T_z=0$	M_t	$M_{fy}=0$ $M_{fz}=0$	$\{\tau_{Coh}\}=\begin{Bmatrix} 0 & M_t \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_G$
Flexion pure	N=0	$T_y=0$ $T_z=0$	$M_t=0$	M_{fy} ou M_{fz}	$\{\tau_{Coh}\}=\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M_{fy} \\ 0 & M_{fz} \end{Bmatrix}_G$

Traction / compression	$\mathcal{T} = \begin{Bmatrix} N\,\vec{x}_1 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_G$	$N > 0$ traction $N < 0$ compression
Flexion pure	$\mathcal{T} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ M_{f2}\vec{x}_2 + M_{f3}\vec{x}_3 \end{Bmatrix}_G$	
Flexion simple	$\mathcal{T} = \begin{Bmatrix} \vec{T}_3\vec{x}_3 \\ M_{f2}\vec{x}_2 \end{Bmatrix}_G + \begin{Bmatrix} \vec{T}_2\vec{x}_2 \\ M_{f3}\vec{x}_3 \end{Bmatrix}_G$	
Cisaillement pur	$\mathcal{T} = \begin{Bmatrix} T_2\vec{x}_2 + T_3\vec{x}_3 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_G$	
Torsion pure	$\mathcal{T} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ M_t\vec{x}_1 \end{Bmatrix}_G$	

Équations d ' équilibre global



le Principe Fondamental de la Statique donne :

$$\boxed{\begin{array}{l} \sum \overrightarrow{F}_{ext} = \vec{0} \\ \sum \overrightarrow{M}(A, F_i) = \vec{0} \end{array}}$$

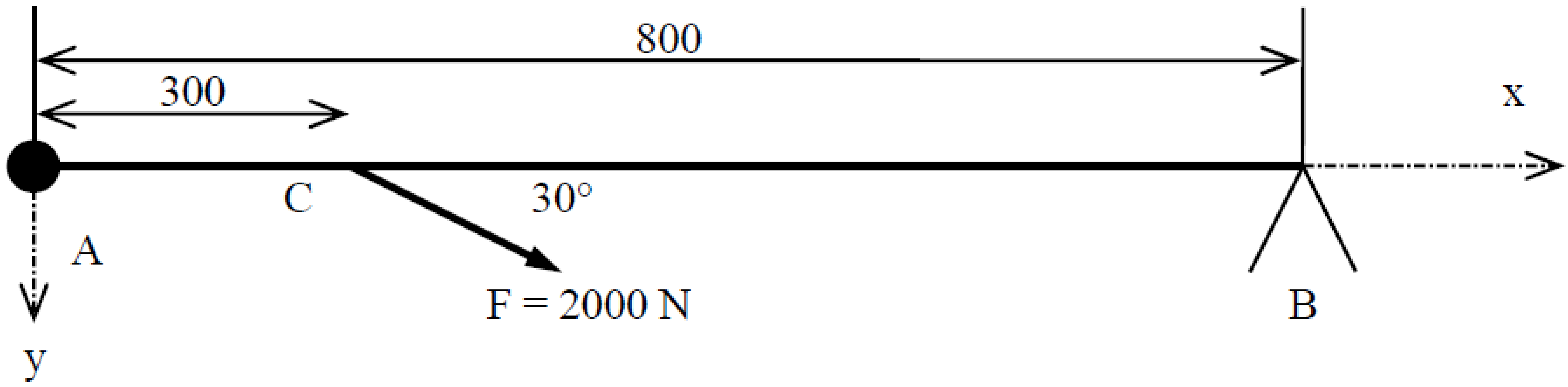
$$\begin{cases} \underbrace{\overrightarrow{R_A}} + \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} = \vec{0} \\ \underbrace{\overrightarrow{M_A}} + \overrightarrow{M_1} + \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{AD} \wedge \overrightarrow{F_2} = \vec{0} \end{cases}$$

IV. Sollicitations Composées

Sollicitations Composées

Exemple 1: Flexion + Extension.

On se propose d'étudier une poutre de section rectangulaire (12x36), sollicitée dans les conditions ci-dessous :



- On isole la poutre, bilan des actions extérieures, P.F.S., afin de connaître les actions extérieures, ici on a :

$$\begin{cases} A_X + P.\cos 30 = 0 \\ A_Y + B + P.\sin 30 = 0 \\ 800.B + 300.P.\sin 30 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_X = -375N \\ A_Y = -1732N \\ B = -625N \end{cases}$$

- On recherche le torseur de cohésion, à savoir :

  * tronçon BC.

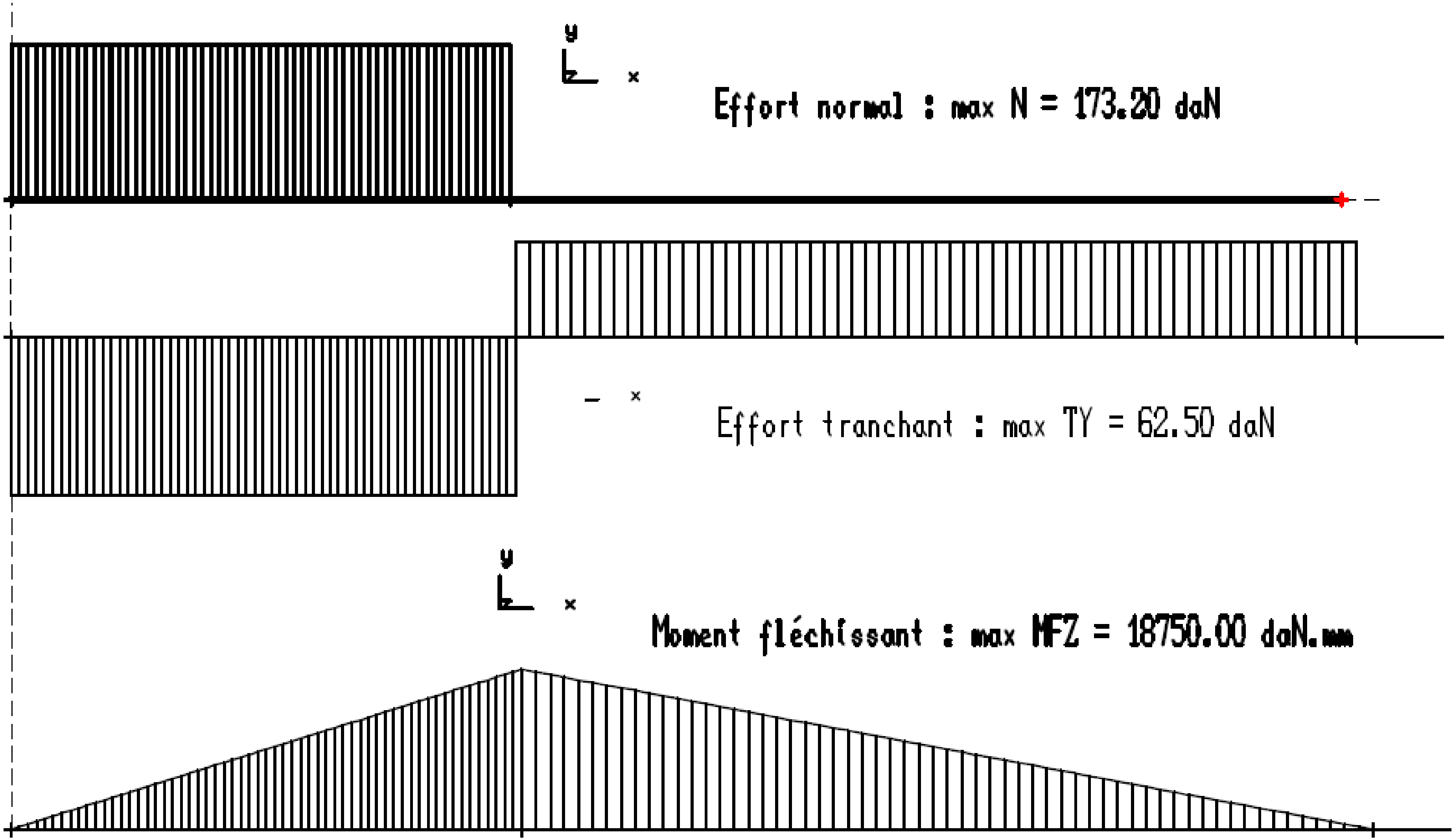
$$\{coh\}_G = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -375 & 0 \\ 0 & 375.(x-800) \end{Bmatrix}_G$$

  * tronçon AC.

$$\{coh\}_G = \begin{Bmatrix} 1732 & 0 \\ 625 & 0 \\ 0 & 625.x \end{Bmatrix}_G$$

On est bien en présence d'une sollicitation d'extension et de flexion simple.

On obtient les diagrammes suivants :



On trouve que la section la plus sollicitée se situe à l'abscisse x = 300.

- On recherche alors les contraintes séparément, à savoir :

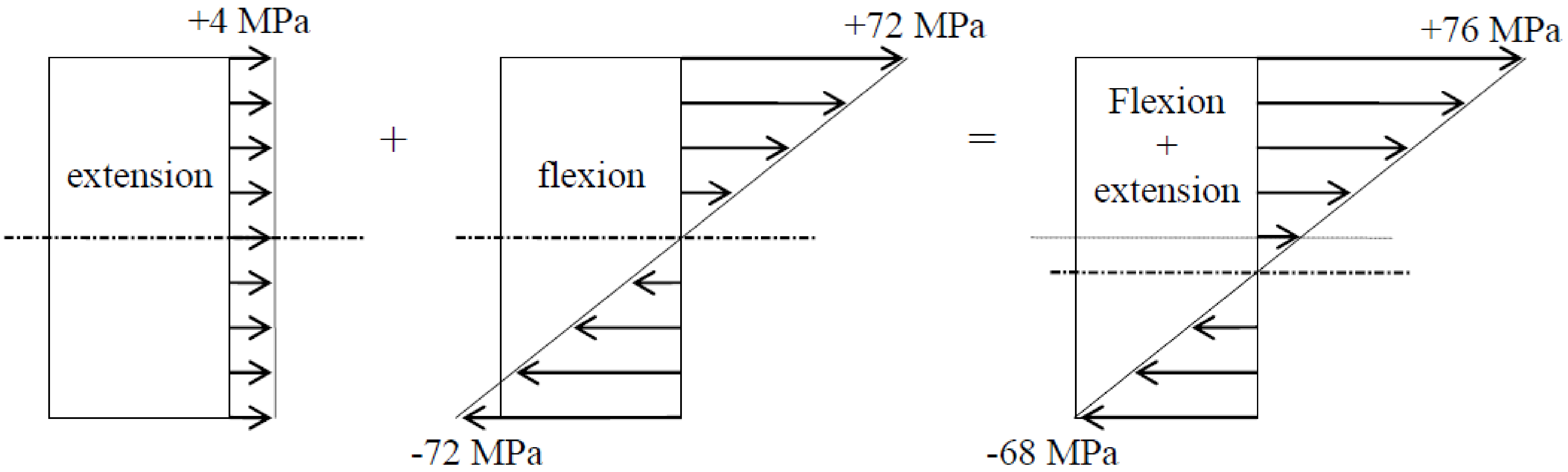
  - contrainte d'extension.

$$\sigma_{ext} = \frac{N}{S} = 4.\, MPa$$

  - contrainte de flexion.

$$\sigma_{flex} = \frac{Mf}{I_G}.\rho = \frac{12.\, Mf}{b.\, h^3}.\frac{h}{2} = 72.\, MPa$$

On procède ensuite à la superposition en additionnant les contraintes.

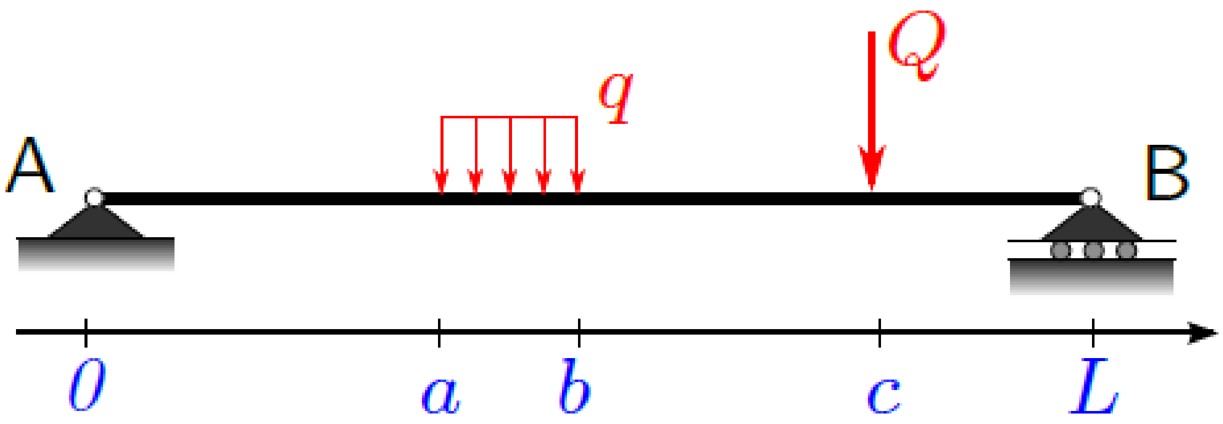


On observe dans la superposition un décalage de la fibre neutre.

Sollicitations Composées

Exemple 2

Soit une poutre droite de longueur L soumise à deux sollicitations : une charge répartie q et une charge ponctuelles telles qu'indiqué à la figure 6.9. Soit une poutre droite de longueur L soumise à deux sollicitations : une charge répartie q et une charge ponctuelles telles qu'indiqué à la figure ci-dessous



1. Écriture de l'équilibre global Le système est isostatique. Les réactions de liaisons sont notées et représentées sur la figure 6.10.

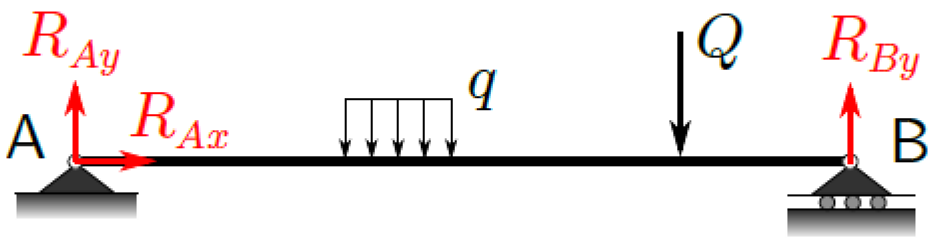


FIGURE 6.10 – Réactions d'appui

Les équations d'équilibre fournissent (le moment est écrit en A) :

$$\left\{\begin{array}{lcl} R_{Ax} & = & 0 \\ R_{Ay} - q(b-a) - Q + R_{By} & = & 0 \\ -\int_a^b qx\mathrm{d}x - Qc + R_{By}L & = & 0 \end{array}\right. \qquad (6.18)$$

Notons que $\int_a^b qx\,\mathrm{d}x$ peut-être évaluée directement en considérant l'ensemble de la charge $q(b-a)$ concentrée sur le bras de levier moyen $(a+b)/2$ ce qui donne un moment $q(b-a)(a+b)/2 = q(b^2-a^2)/2 = \int_a^b qx\mathrm{d}x$.

Au final, les réactions aux appuis sont données par :

$$\boxed{\begin{cases} R_{Ax} & = & 0 \\ R_{Ay} = Q(1-\frac{c}{L}) + q(b-a)(1-\frac{b+a}{2L}) & = & 0 \\ R_{By} = \frac{Qc}{L} + q(b-a)\frac{b+a}{2L} & = & 0 \end{cases}} \tag{6.19}$$

2. Écriture des équilibres locaux Il faut distinguer les équilibres des différents tronçons : $[0,a]$, $[a,b]$, $[b,c]$ et $[c,L]$.

$s \in [0,a]$ (figure 6.11) :

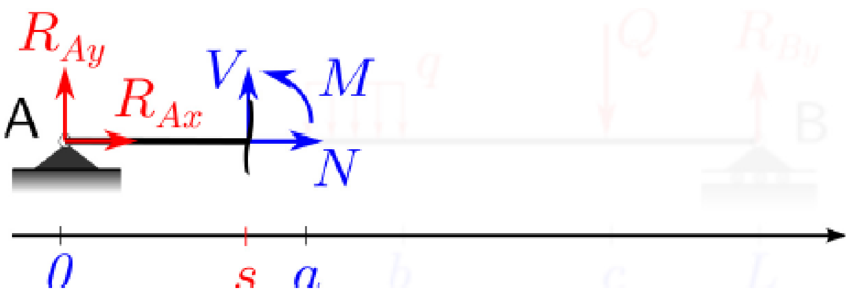


FIGURE 6.11 – Équilibre d'un tronçon de $[0,a]$

$$\begin{cases} N & = & 0 \\ -R_{Ay} + V & = & 0 \\ M + Vs & = & 0 \end{cases} \tag{6.20}$$

ou encore :

$$\boxed{\text{pour } x \in [0,a], \quad \begin{cases} N(s) & = & 0 \\ V(s) & = & -Q(1-\frac{c}{L}) - q(b-a)(1-\frac{b+a}{2L}) \\ M(s) & = & Q(1-\frac{c}{L})s + q(b-a)(1-\frac{b+a}{2L})s \end{cases}} \tag{6.21}$$

$s \in [a,b]$ (figure 6.12) :

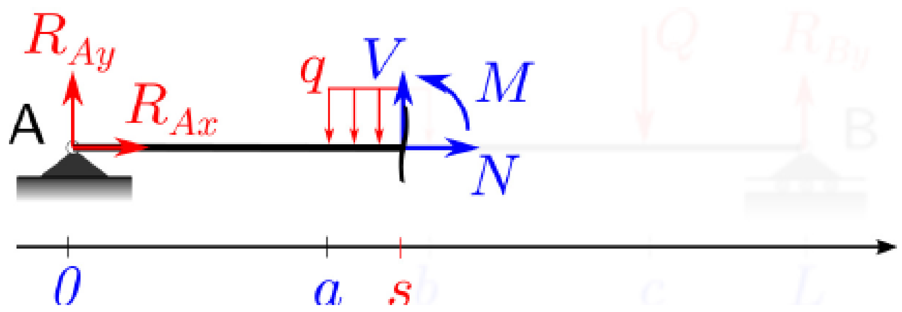


FIGURE 6.12 – Équilibre d'un tronçon de $[a,b]$

$$\left\{\begin{array}{lcl} N & = & 0 \\ R_{Ay} - q(s-a) + V & = & 0 \\ -\int_a^s qx\mathrm{d}x + Vs + M & = & 0 \end{array}\right. \tag{6.22}$$

ou encore :

$$\boxed{\text{pour } x \in [a,b], \quad \left\{\begin{array}{lcl} N(s) & = & 0 \\ V(s) & = & -R_{Ay} + q(s-a) \\ M(s) & = & R_{Ay}s - q(s-a)s + q(s^2-a^2)/2 \end{array}\right.} \tag{6.23}$$

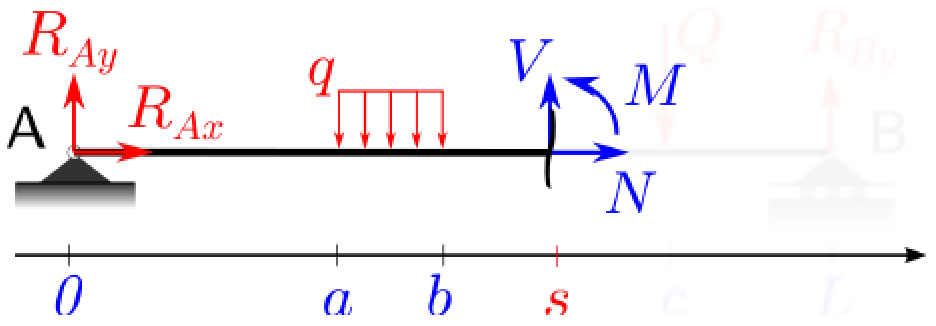


FIGURE 6.13 – Équilibre d'un tronçon de $[b,c]$

$s \in [b,c]$ (figure 6.13) :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} N & = & 0 \\ R_{Ay} - q(b-a) + V & = & 0 \\ -q(b^2-a^2)/2 + V s + M & = & 0 \end{array} \right. \tag{6.24}$$

ou encore :

$$\boxed{\text{Pour } s \in [b,c], \quad \left\{ \begin{array}{lcl} N(s) & = & 0 \\ V(s) & = & -R_{Ay} + q(b-a) \\ M(s) & = & q(b^2-a^2)/2 + R_{Ay}s - q(b-a)s \end{array} \right.} \tag{6.25}$$

$s \in [c, L]$ (figure 6.14) :

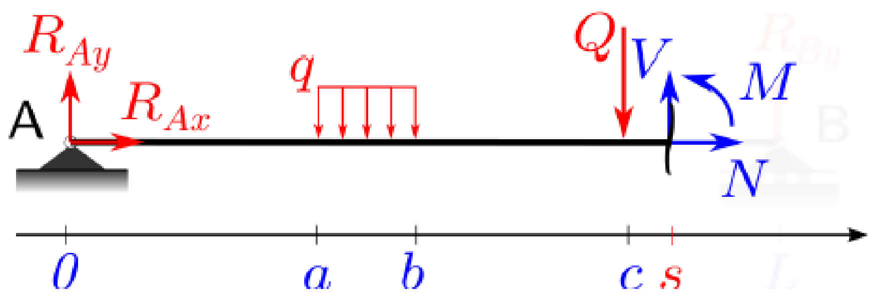


FIGURE 6.14 – Équilibre d'un tronçon de $[c, L]$

$$\begin{cases} N & = & 0 \\ R_{Ay} - q(b-a) - Q + V & = & 0 \\ -q(b^2 - a^2)/2 - Qc + Vs + M & = & 0 \end{cases} \tag{6.26}$$

ou encore :

$$\boxed{\text{Pour } x \in [c, L], \quad \begin{cases} N(s) & = & 0 \\ V(s) & = & -R_{Ay} + q(b-a) + Q \\ M(s) & = & q(b^2 - a^2)/2 - Q(s-c) + R_{Ay}s - q(b-a)s \end{cases}} \tag{6.27}$$

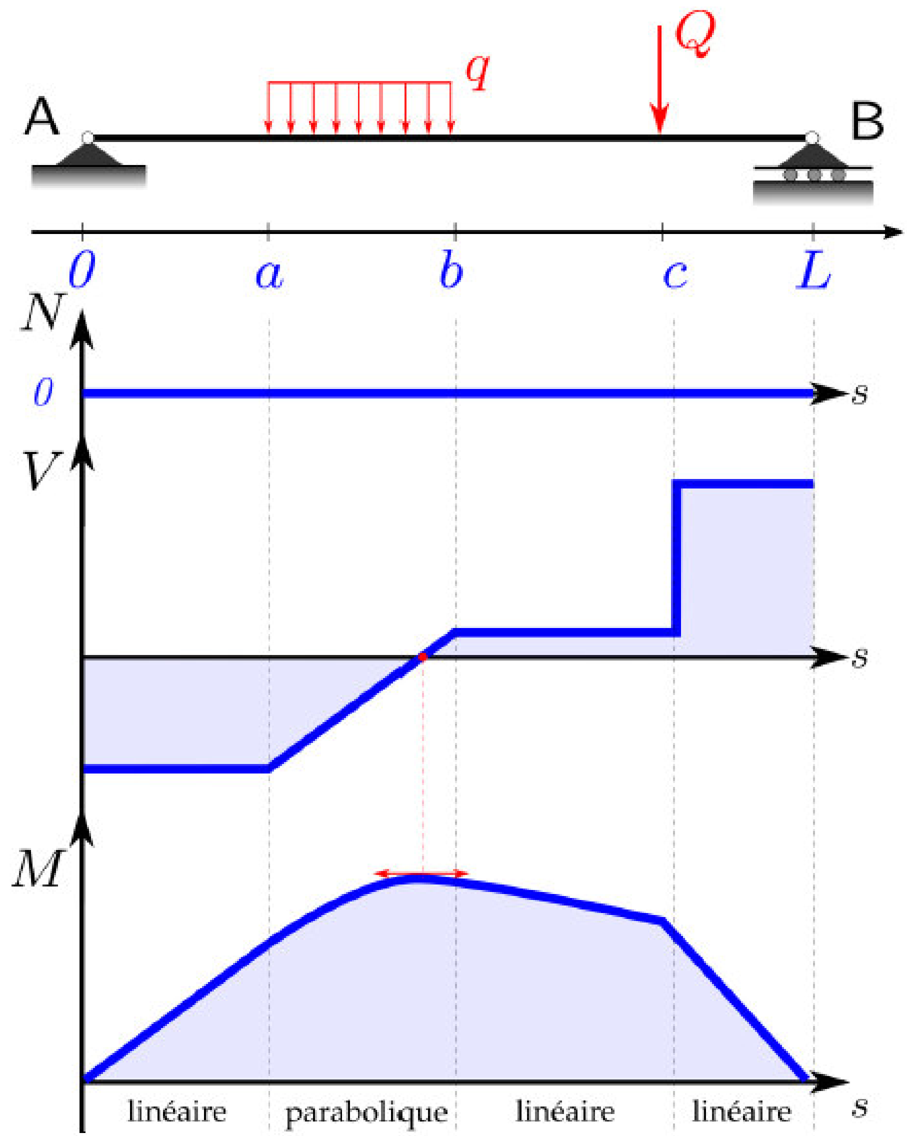


FIGURE 6.15 – Exemple de diagramme des efforts intérieurs pour des valeurs de chargement données q et Q

V. Systèmes hyperstatiques

Voici trois poutres qui ne diffèrent que par leurs appuis.

Elles sont de longueur L et chargées à une distance l de leur encastrement.

Principe fondamental de la dynamique :

$$\begin{cases} R_{Ax} = 0 \\ R_{Ay} - F = 0 \\ M_{Az} - Fl = 0 \end{cases} \qquad (3.1)$$

3 équations indépendantes linéaires, 3 inconnues :

les réactions d'appui peuvent être calculés.

Principe fondamental de la dynamique :

$$\begin{cases} R_{Ax} = 0 \\ R_{Ay} + R_{By} - F = 0 \\ M_{Az} + R_{By} L - F l = 0 \end{cases} \tag{3.2}$$

3 équations indépendantes linéaires, 4 inconnues :

il manque une équation pour calculer les réactions d'appuis.

Principe fondamental de la dynamique :

$$\begin{cases} R_{Ax} + R_{Bx} = 0 \\ R_{Ay} + R_{By} - F = 0 \\ M_{Az} + R_{By} L - F\,l = 0 \end{cases} \quad (3.3)$$

3 équations indépendantes linéaires, 5 inconnues :

il manque deux équations pour calculer les réactions d'appuis.

Isostaticité – hyperstatique

Dans le cas plan, on a au plus trois équations d'équilibre.

1. Si les actions de liaison introduisent 3 inconnues, le problème est statiquement déterminé (possible, n'admettant qu'une solution) ou **isostatique.**
2. Si les actions de liaison introduisent plus de 3 inconnues, le problème est statiquement indéterminé ou **hyperstatique.** Il faudra introduire de nouvelles équations issues de la RDM.
3. Si les actions de liaison introduisent moins de 3 inconnues, le problème est **hypostatique.** La structure est alors appelée **mécanisme** et n'est pas stable.

Le degrés d'hyperstatisme d'un système est une grandeur qui traduit la redondance mécanique de ce système. Cette grandeur influe non seulement sur le comportement structurel, mais aussi sur son calcul comme cela apparaît clairement dans la définition d'isostatisme :

Un système est dit isostatique si le principe fondamental de la dynamique suffit à déterminer toutes les inconnues de liaison du mécanisme.

Degré d'hyperstatique

n inconnues de réaction

p équations d ' équilibre

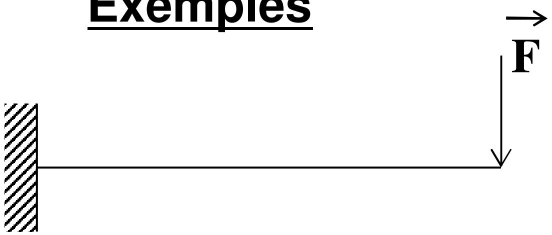
⇒ (p - n) est le degré d ' hyperstatique

(p - n) > 0 : hypostatique

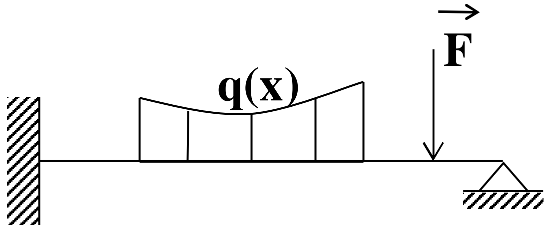
(p - n) = 0 : isostatique

(p - n) < 0 : hyperstatique

Exemples



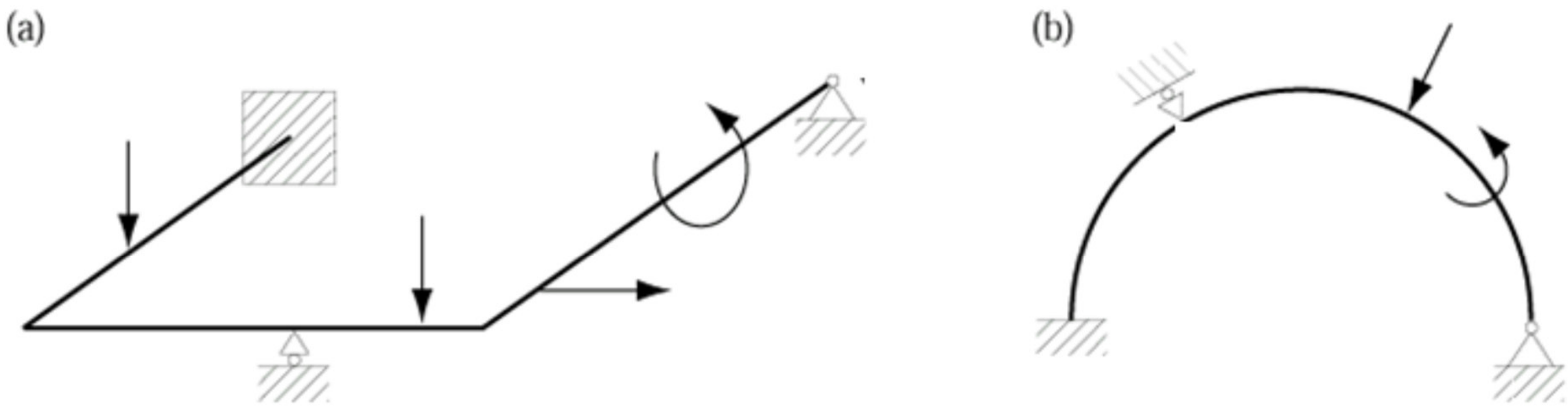
Structure isostatique



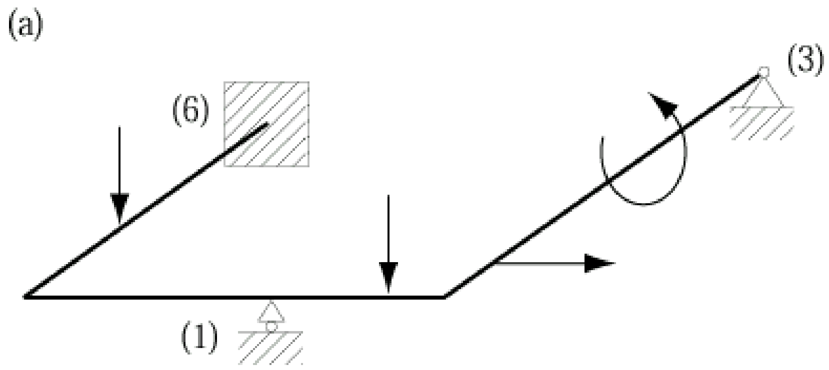
Structure hyperstatique

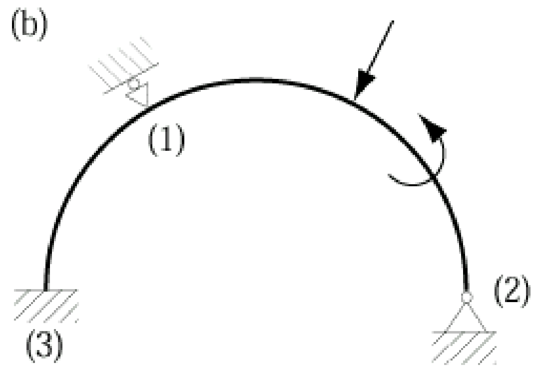
A chaque discontinuité: coupe pas assez d'eq pour résoudre → Théorèmes énergétiques

Exemples: système ***hyperstatique extérieurement***



Exemples: système ***hyperstatique extérieurement***





$k = p - 6 = 4$

$(p = 6+1+3)$

$k = p - 3 = 3$

$(p = 3+1+2)$

système ***hyperstatique intérieurement***

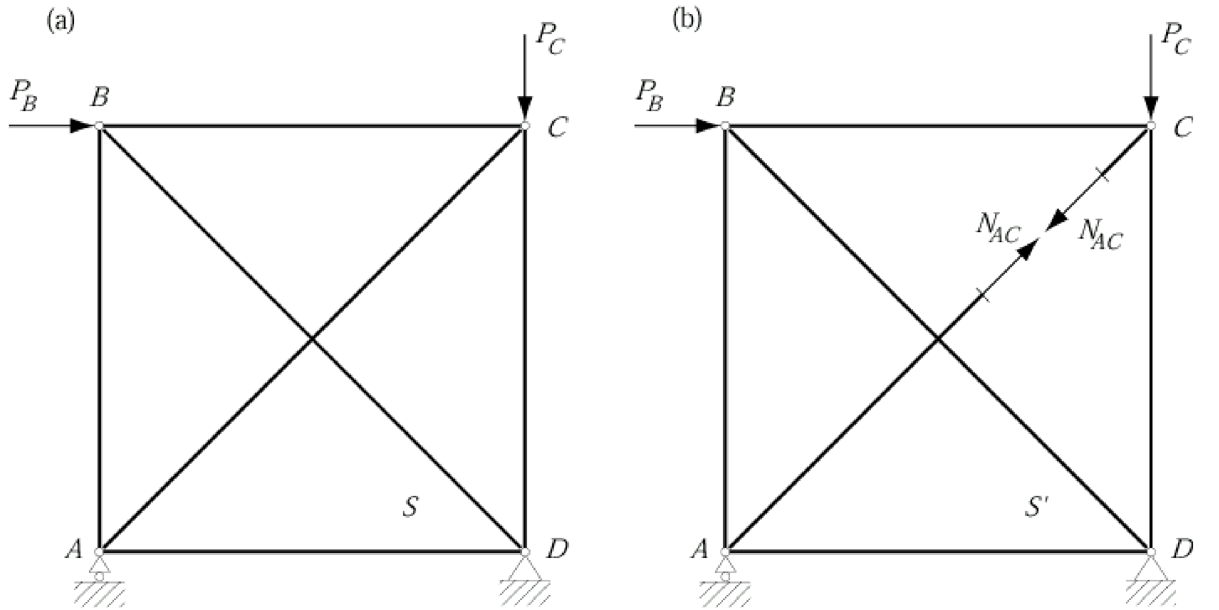
un système est ***hyperstatique intérieurement*** quand

la connaissance de toutes les réactions extérieures n'est pas suffisante

pour calculer les *efforts intérieurs*.

système ***hyperstatique intérieurement***

système plan de barres articulées en treillis

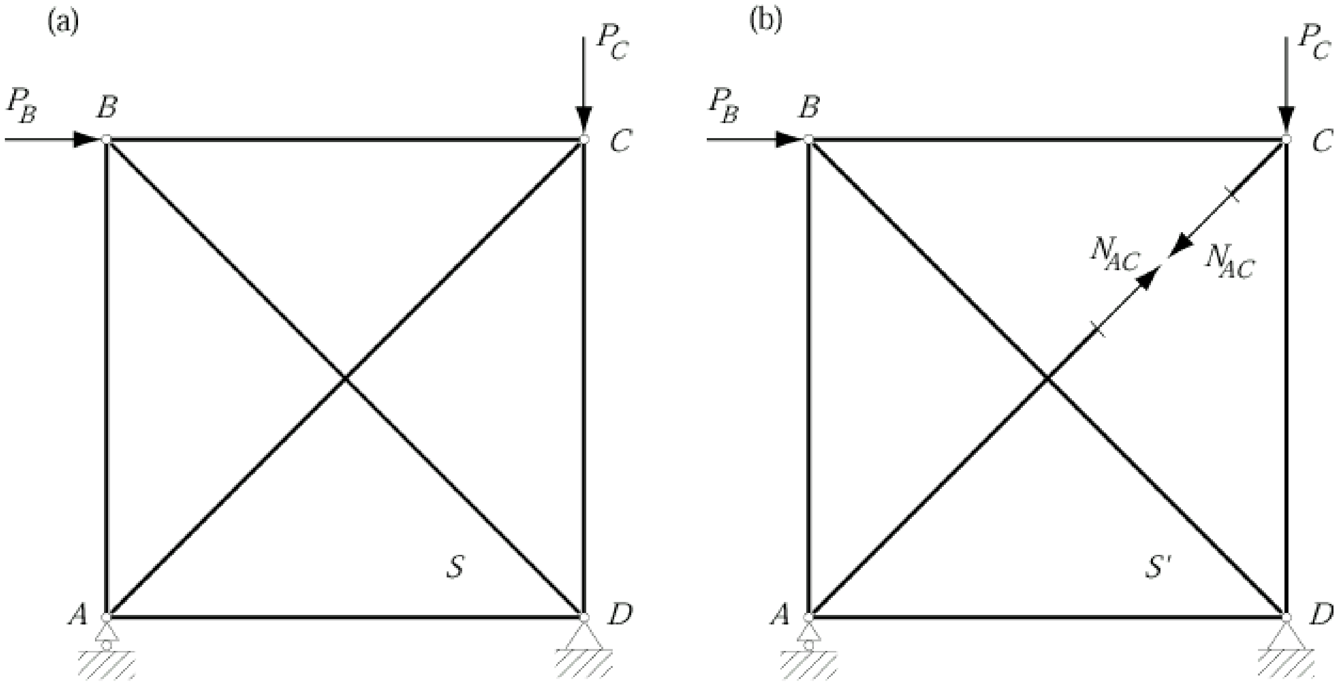


Un telle structure est hyperstatique intérieurement d'ordre

$$k = m + p - 2n,$$

- m désigne le nombre de barres,
- p est le nombre de liaisons extérieures
- n dénote le nombre total de nœuds.

système plan de barres articulées en treillis : on obtient un système isostatique fondamental *S'* du système donné *S*, en remplaçant les *k liaisons intérieures* surabondantes par des forces hyperstatiques inconnues R_1, R_2, ..., R_k choisies parmi les efforts intérieurs.



Exemple : **ordre *k* = 6 + 3 – 2(4) = 1**

VI. Applications

Torseur de cohésion - application

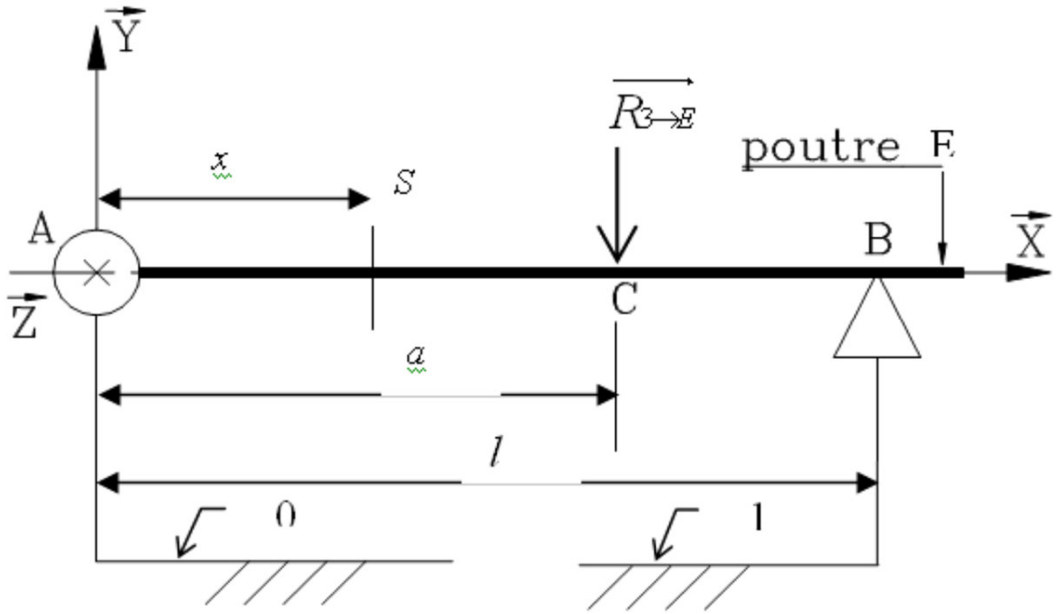
Exemple 1

Soit une poutre cylindrique, de 200 mm de long et de 5 mm de diamètre, soumise à une action mécanique modélisable par un glisseur avec :

$\overrightarrow{R_{3\to E}}$ d'intensité 100daN.

$\overrightarrow{AC} = a.\vec{x}\,;\, a = 150\,\text{mm}$

$\overrightarrow{AB} = l.\vec{x}\,;\, l = 200\,\text{mm}$



L'étude s 'effectuera dans le plan de symétrie (x,y)

Détermination des actions en A et B

Isolement de la poutre (E)

(E) est soumis à 3 actions mécaniques : $\{T_{0\to E}\}, \{T_{1\to E}\}, \{T_{3\to E}\}$

$$\{T_{0\to E}\} = {}_A\left\{\begin{matrix} \overrightarrow{R_{0\to E}} \\ \overrightarrow{M_{A0\to E}} \end{matrix}\right\} = {}_A\left\{\begin{matrix} X_{0\to E} & 0 \\ Y_{0\to E} & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}\right\}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} \quad \{T_{1\to E}\} = {}_B\left\{\begin{matrix} \overrightarrow{R_{1\to E}} \\ \overrightarrow{M_{B1\to E}} \end{matrix}\right\} = {}_B\left\{\begin{matrix} 0 & 0 \\ Y_{1\to E} & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}\right\}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} \quad \{T_{3\to E}\} = {}_C\left\{\begin{matrix} \overrightarrow{R_{3\to E}} \\ \overrightarrow{M_{C3\to E}} \end{matrix}\right\} = {}_C\left\{\begin{matrix} 0 & 0 \\ -100 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}\right\}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

Ecriture des torseurs au point A

$$\{T_{0\to E}\} = {}_A\left\{\begin{matrix} \overrightarrow{R_{0\to E}} \\ \overrightarrow{M_{A0\to E}} \end{matrix}\right\} = {}_A\left\{\begin{matrix} X_{0\to E} & 0 \\ Y_{0\to E} & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}\right\}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} \quad \{T_{1\to E}\} = {}_A\left\{\begin{matrix} \overrightarrow{R_{1\to E}} \\ \overrightarrow{M_{A1\to E}} \end{matrix}\right\} = {}_A\left\{\begin{matrix} 0 & 0 \\ Y_{1\to E} & 0 \\ 0 & l.Y_{1\to E} \end{matrix}\right\}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

$$\{T_{3\to E}\} = {}_A\left\{\begin{matrix} \overrightarrow{R_{3\to E}} \\ \overrightarrow{M_{A3\to E}} \end{matrix}\right\} = {}_A\left\{\begin{matrix} 0 & 0 \\ -100 & 0 \\ 0 & -a.100 \end{matrix}\right\}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

Il faut étudier chaque portion de poutre comprise entre deux charges.

Pour $0<x<c$

Équilibre de E1 $\quad {}_G\{T_{coh}\} = {}_G\left\{\begin{matrix}\vec{R}\\ M_G\end{matrix}\right\} = {}_G\left\{\begin{matrix}-\overrightarrow{R_{\bar{E}\to E1}}\\ -\overrightarrow{M_{G\bar{E}\to E1}}\end{matrix}\right\} = -{}_G\left\{\begin{matrix}\overrightarrow{R_{0\to E}}\\ \overrightarrow{M_{G0\to E}}\end{matrix}\right\} = -{}_G\left\{\begin{matrix}0 & 0\\ 25 & 0\\ 0 & -25.x\end{matrix}\right\}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} = {}_G\left\{\begin{matrix}0 & 0\\ -25 & 0\\ 0 & 25.x\end{matrix}\right\}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$

avec $\overrightarrow{M_{G0\to E}} = \overrightarrow{M_{A0\to E}} + \overrightarrow{GA} \wedge \overrightarrow{R_{0\to E}} = 0 + \begin{vmatrix}-x\\ 0\\ 0\end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix}0\\ 25\\ 0\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}0\\ 0\\ -25.x\end{vmatrix}$

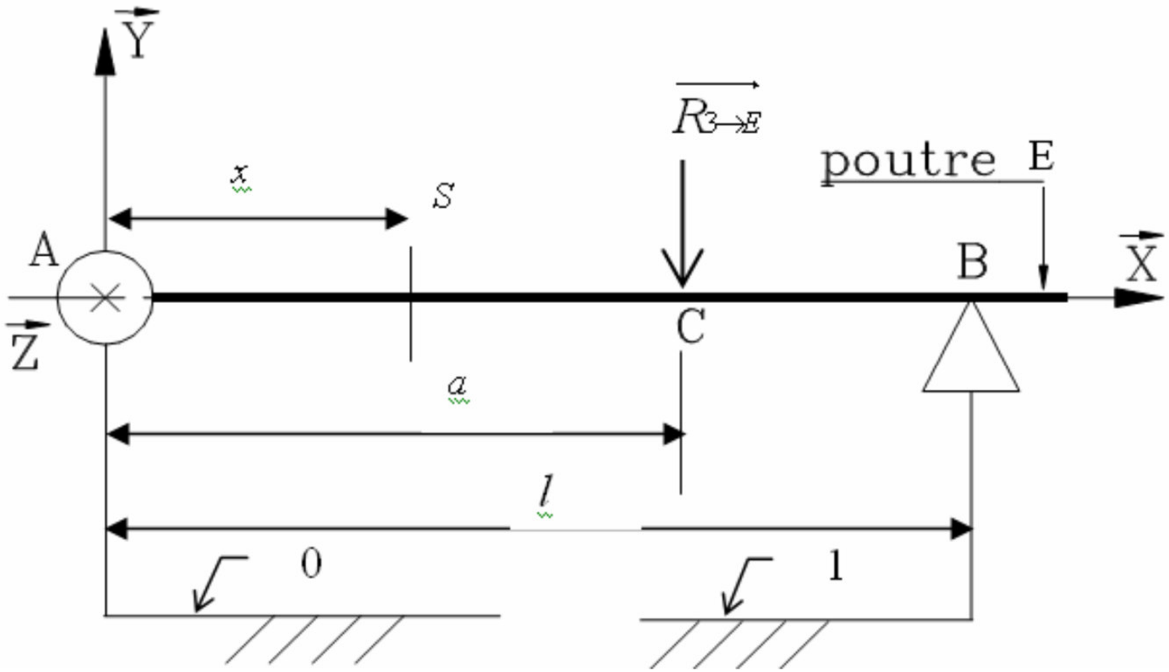
Pour $c<x<b$

Équilibre de E2 $\quad {}_G\{T_{coh}\} = {}_G\left\{\begin{matrix}\vec{R}\\ M_G\end{matrix}\right\} = {}_G\left\{\begin{matrix}\overrightarrow{R_{\bar{E}\to E2}}\\ \overrightarrow{M_{G\bar{E}\to E2}}\end{matrix}\right\} = {}_G\left\{\begin{matrix}\overrightarrow{R_{1\to E}}\\ \overrightarrow{M_{G1\to E}}\end{matrix}\right\} = {}_G\left\{\begin{matrix}0 & 0\\ 75 & 0\\ 0 & 75.(l-x)\end{matrix}\right\}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$

avec $\overrightarrow{M_{G1\to E}} = \overrightarrow{M_{B1\to E}} + \overrightarrow{GB} \wedge \overrightarrow{R_{1\to E}} = 0 + \begin{vmatrix}l-x\\ 0\\ 0\end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix}0\\ 75\\ 0\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}0\\ 0\\ 75.(l-x)\end{vmatrix}$

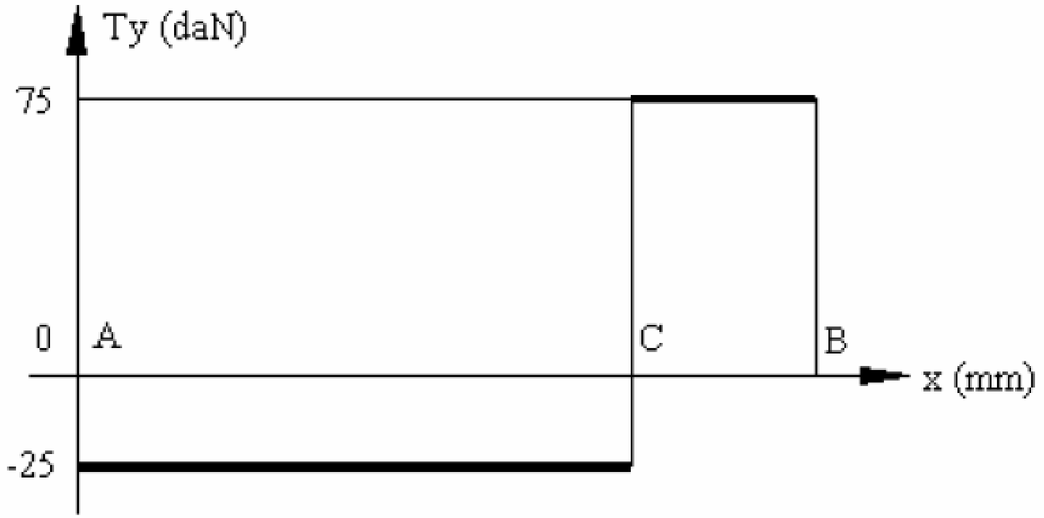
Courbes des efforts intérieurs

On représente la variation des efforts intérieurs à l'aide de courbes qui visualisent immédiatement les zones dangereuses de la poutre.

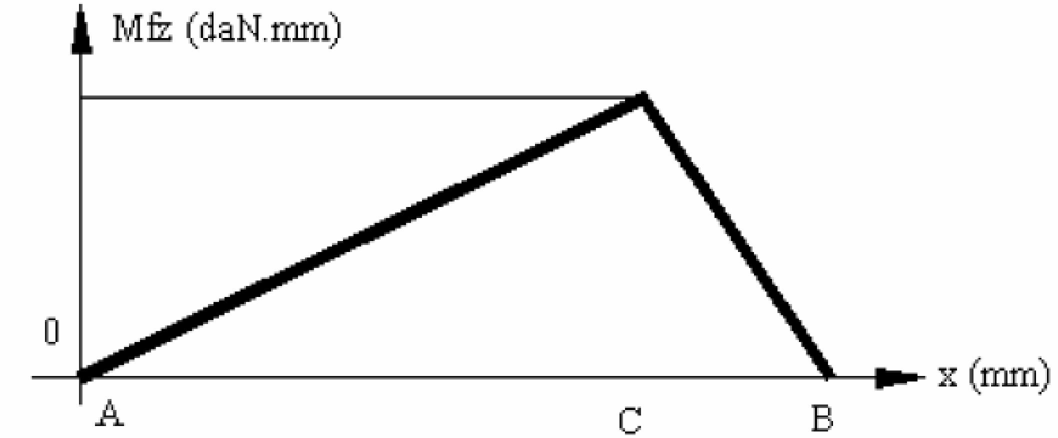


Sollicitation	A<x<C	C<x<B
N	*0*	*0*
Ty	*-25*	*75*
Tz	*0*	*0*
Mt	*0*	*0*
Mfy	*0*	*0*
Mfz	*25.x*	*75(l-x)*

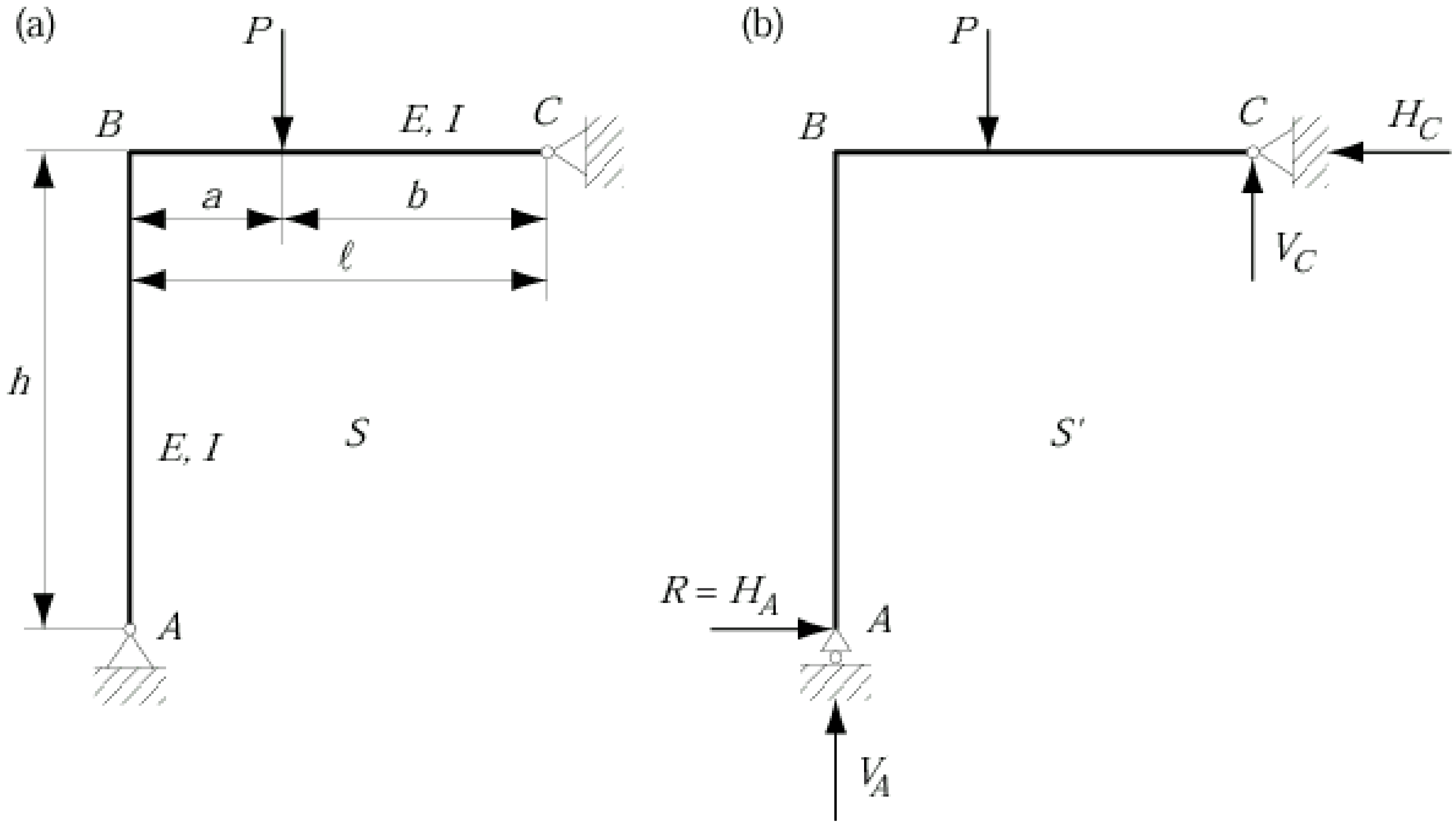
Effort tranchant



Moment de flexion



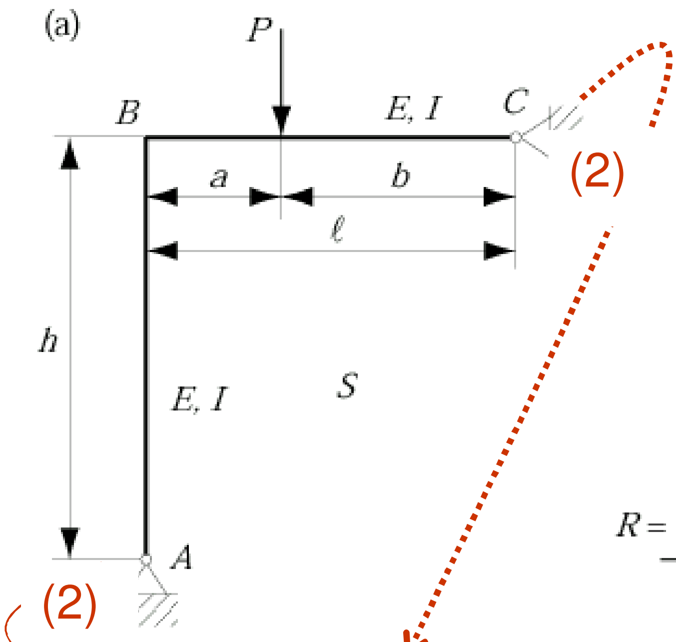
systèmes hyperstatiques - application

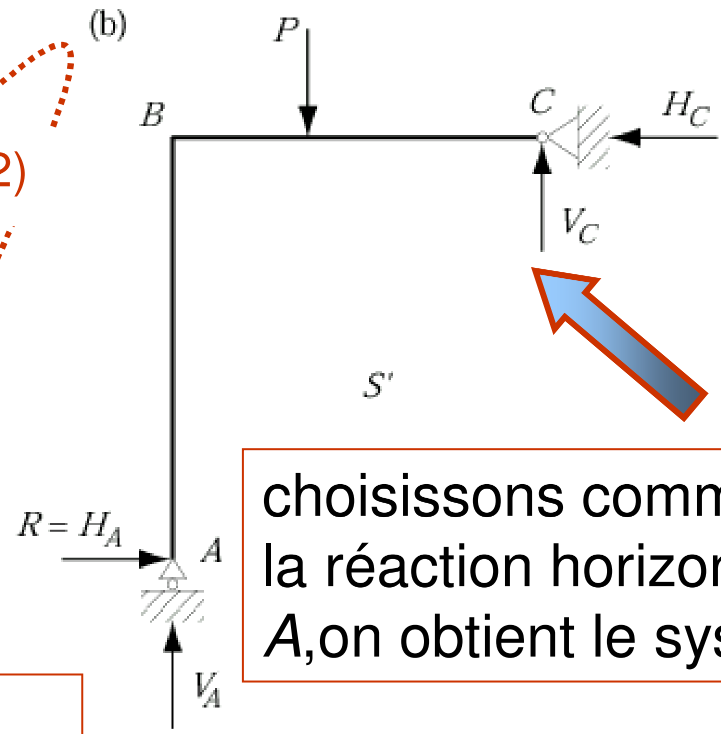


Calculer

1. Les réactions aux points *A* et *C* du système *S*
2. Déformation du système

Calculer les réactions aux points A et C du système S





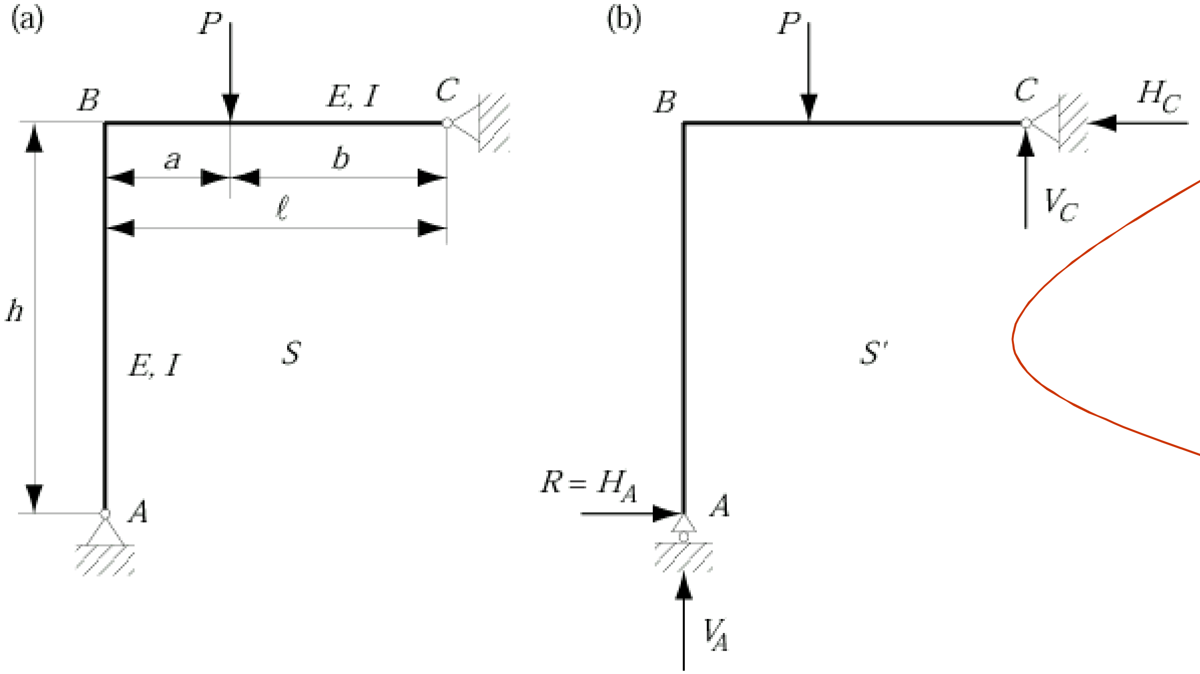
choisissons comme hyperstatique R la réaction horizontale H_A au point A,on obtient le système isostatique S '

réactions inconnues
$2 + 2 = 4$

$k = p - 3$

le système S est hyperstatique extérieurement d'ordre
$4 - 3 = 1$

Calculer les réactions aux points *A* et *C* du système *S*



équilibre

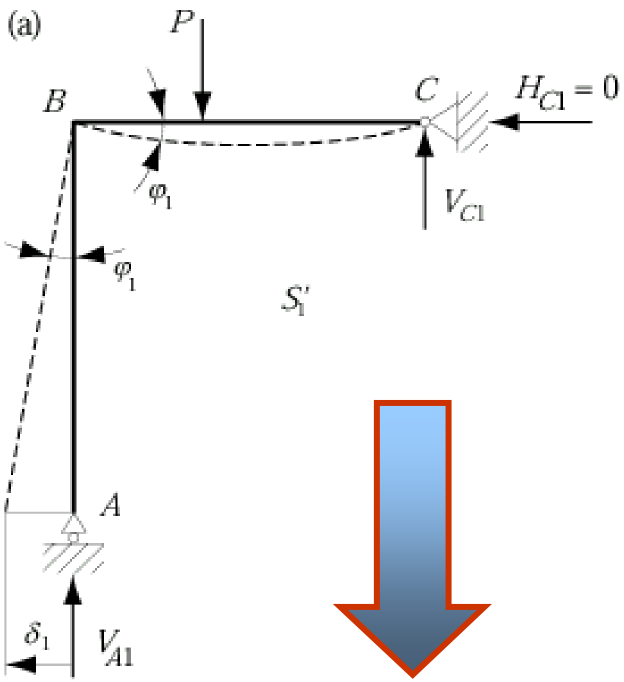
$$H_A = H_B$$

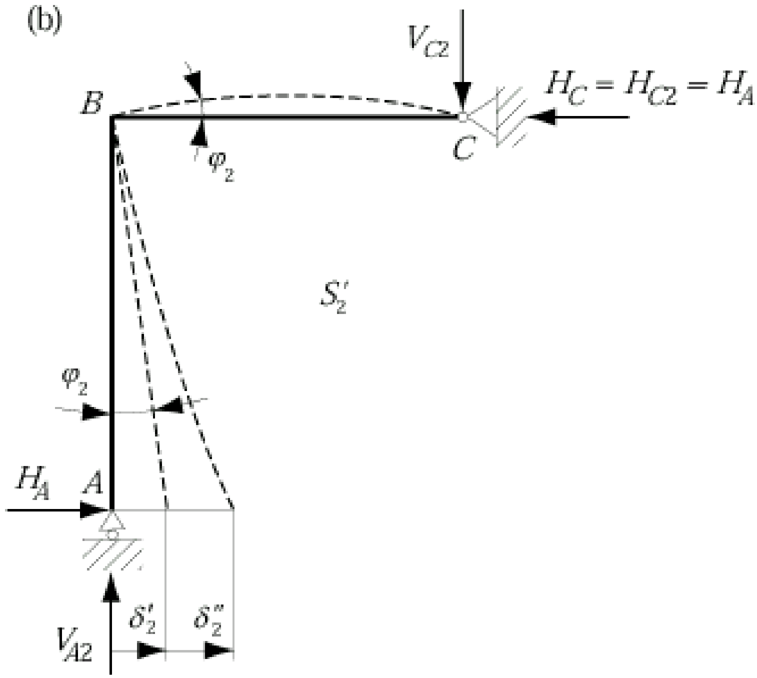
$$V_A + V_B = P$$

$$aP = \ell V_C + hH_C$$

La quatrième équation nécessaire pour déterminer les réactions est donnée par la condition que le déplacement horizontal *d* du point *A* est nul dans le système *S'*.

Déformation du système : deux étapes





équilibre

$$V_{A1} = P\frac{b}{\ell}$$

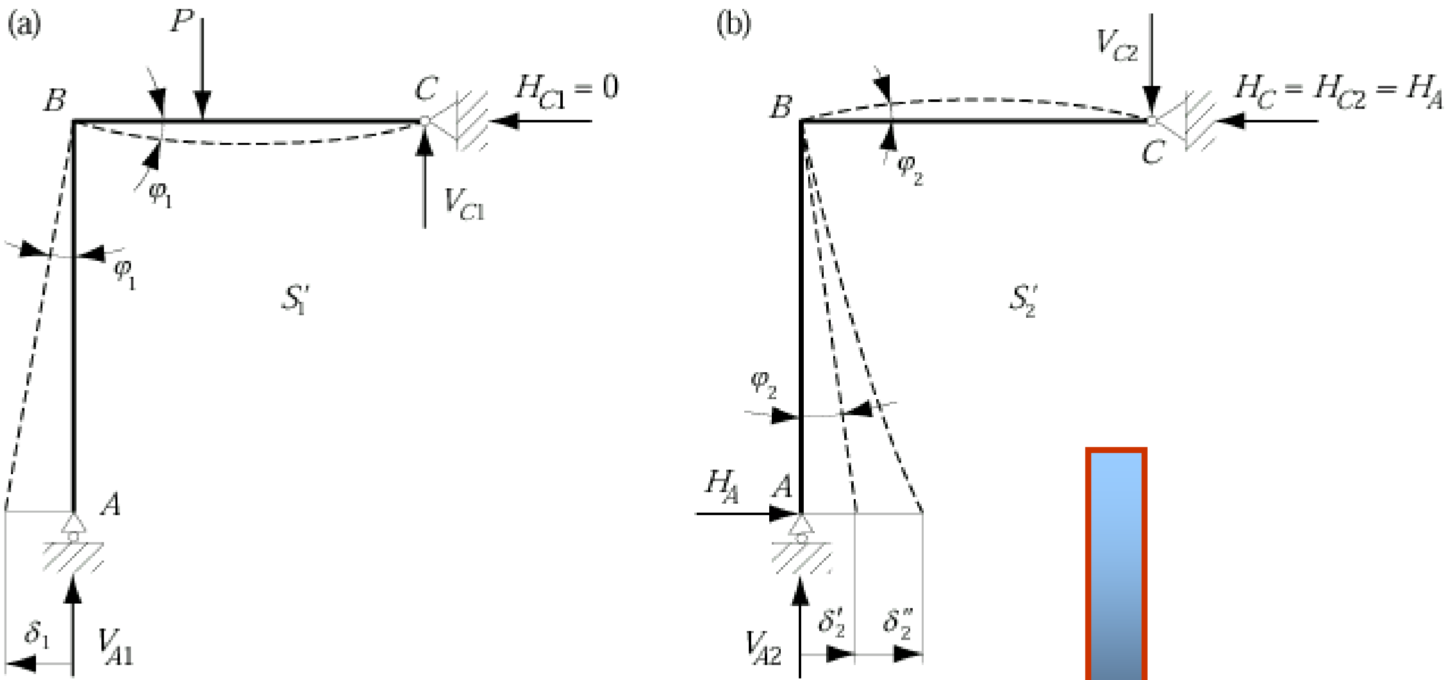
$$V_{C1} = P\frac{a}{\ell}$$

$$H_{C1} = 0$$

déplacement

$$\delta_1 = h\varphi_1 = h\frac{ab(\ell + b)}{6\ell EI}P$$

Déformation du système : deux étapes



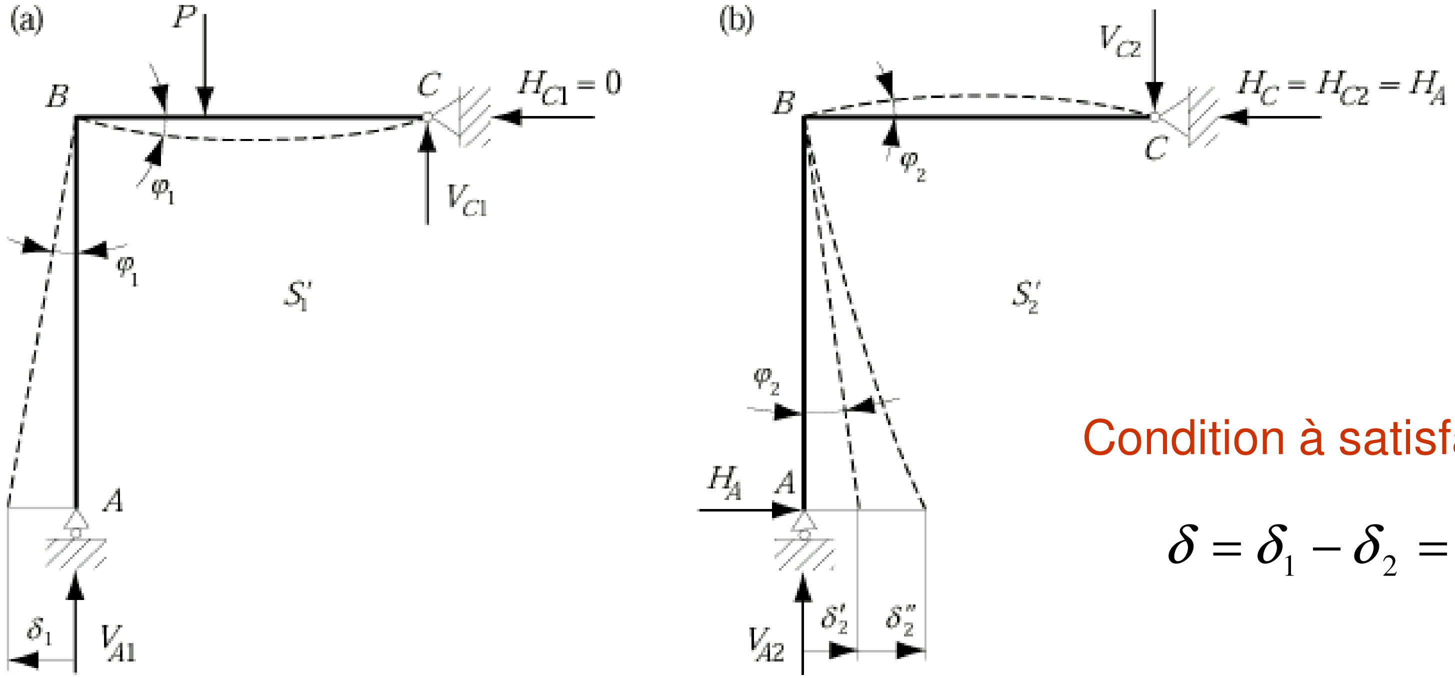
équilibre

$$\begin{cases} V_{A2} = V_{C2} = H_A \dfrac{h}{\ell} \\ H_{C2} = H_C = H_A \end{cases}$$

déplacement

$$\delta_2 = \delta_2' + \delta_2'' = h\varphi_2 + \delta_2'' = \frac{h^2 \ell}{3EI} H_A + \frac{h^3}{3EI} H_A = \frac{H_A h^2}{3EI} (\ell + h)$$

Déformation du système : compatibilité



Condition à satisfaire

$$\delta = \delta_1 - \delta_2 = 0$$

$$\delta_1 = h\varphi_1 = h\frac{ab(\ell + b)}{6\ell EI}P$$

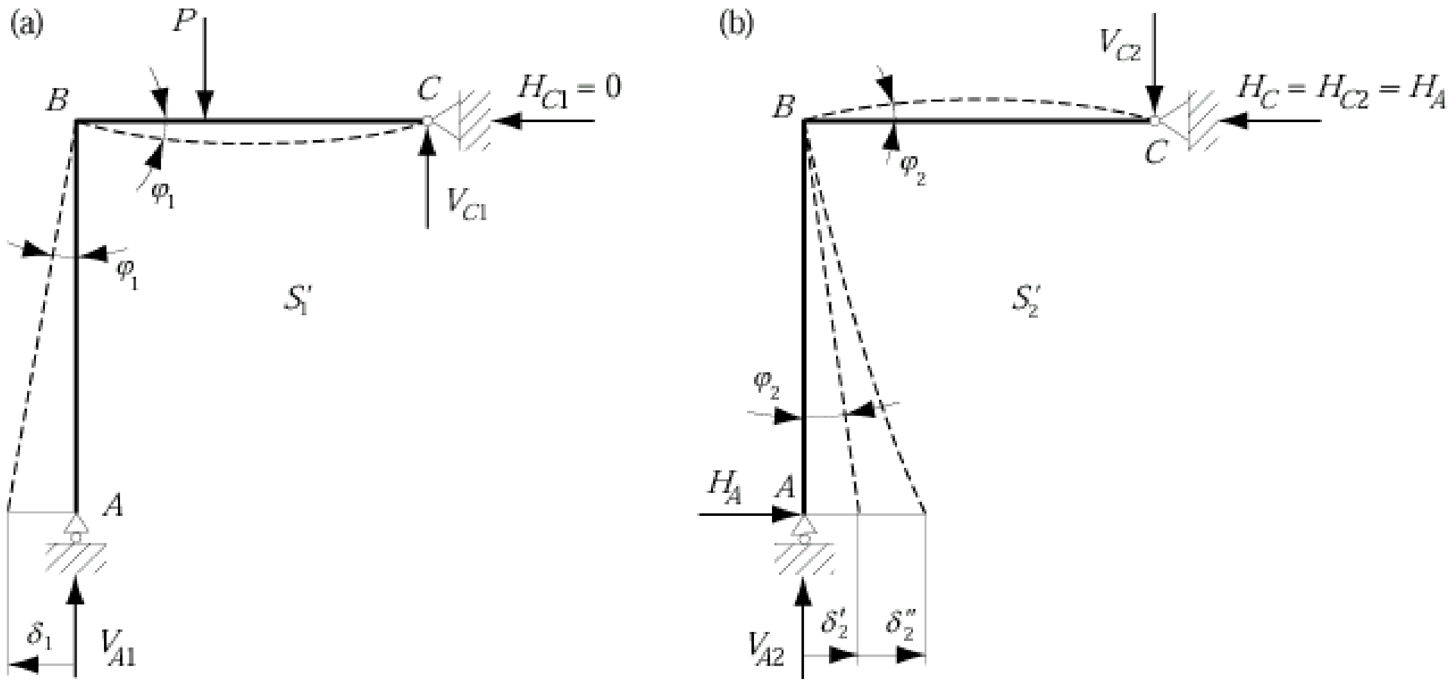
$$\delta_2 = \delta_2' + \delta_2'' = h\varphi_2 + \delta_2'' = \frac{h^2\ell}{3EI}H_A + \frac{h^3}{3EI}H_A = \frac{H_A h^2}{3EI}(\ell + h)$$

$$\boxed{H_A = \frac{\alpha\beta(1+\beta)}{2\xi(1+\xi)}P}$$

avec

$$\alpha = a/\ell$$
$$\beta = b/\ell$$
$$\xi = h/\ell$$

Déformation du système : compatibilité



$$V_A + V_B = P$$

$$H_A = H_B$$

$$aP = \ell V_A + hH_C$$

$$\boxed{H_A = \frac{\alpha\beta(1+\beta)}{2\xi(1+\xi)}P}$$

$$H_A = H_B = \frac{\alpha\beta(1+\beta)}{2\xi(1+\xi)}P$$

$$V_C = P\frac{a}{\ell} - H_C\frac{h}{\ell} = \alpha\left(1 - \frac{\beta(1+\beta)}{2(1+\xi)}\right)P$$

$$V_A = P - V_C = \left((1-\alpha) + \frac{\alpha\beta(1+\beta)}{2(1+\xi)}\right)P$$

Chap. 2:
THÉORÈMES ÉNERGÉTIQUES

Théorèmes Énergétiques

I. DÉFINITION

II. ÉNERGIE DE DÉFORMATION

III. THÉORÈMES ÉNERGÉTIQUES

- *1 RÉCIPROCITÉ DES CHARGEMENTS*
- *2 FORMULE DE MAXWELL - BETTI*
- *3 THÉORÈME DE CASTIGLIANO*
- *4 FORMULE DE MÉNABRÉA*

IV. APPLICATIONS

CARLO ALBERTO CASTIGLIANO

8/11/1847—25/10/1884

LUIGI FEDERICO MENABREA

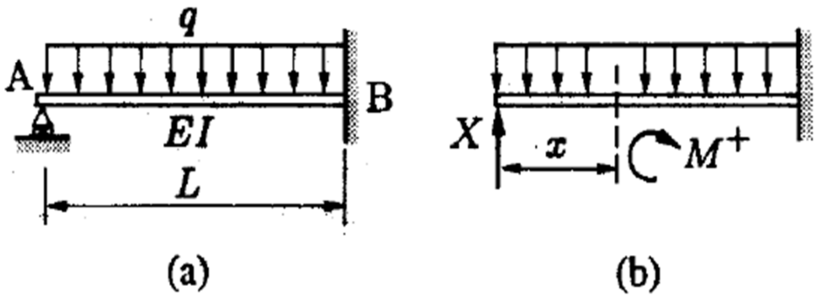
4/09/1809 – 25/05/1896

Théorèmes Énergétiques

Démarches

Intro aux systèmes hyperstatiques

- illustration sur un système 1x hyperstatique



[Frey, 2000, Vol. 2]

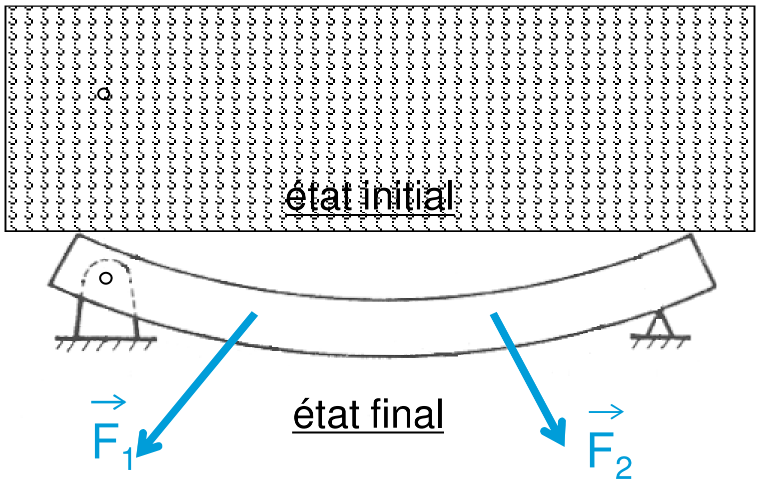
- (a) ≡ (b)
- (b) = superposition charge répartie + réaction

flèche due à q $\delta_A = \dfrac{L}{4EI}\dfrac{qL^3}{2}$

flèche due à X_A $\delta_A = -\dfrac{L}{3EI}X_A L^2$

$$X_A = 3\frac{qL}{8}$$

I. Définition

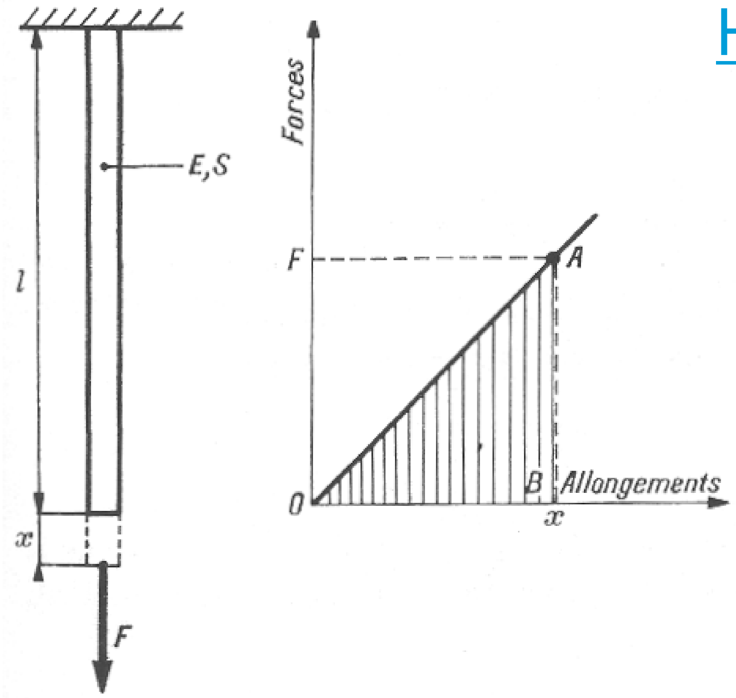


déformation élastique de la poutre

$$\boxed{\text{Théorème de l'énergie cinétique}} \Rightarrow \left(\begin{array}{l}\text{travail des forces}\\ \text{extérieures}\\ W_{ext}\end{array}\right) + \left(\begin{array}{l}\text{travail des forces}\\ \text{intérieures}\\ W_{int}\end{array}\right) = 0$$

$$\boxed{\text{Énergie de déformation : } W_d = -W_{int} = W_{ext}}$$

App : cas d'une sollicitation de traction



Hypothèses :

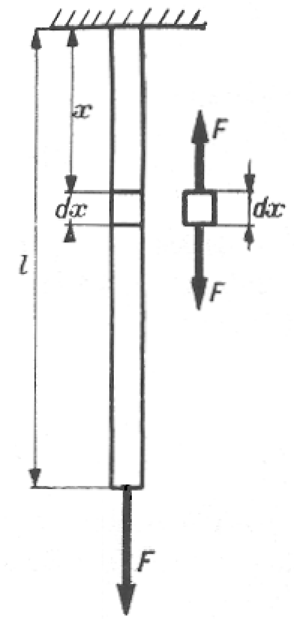
- effort de traction variable
- proportionnalité entre l'effort et l'allongement

Aire du triangle OAB

Travail de l'effort de traction

$$W_{ext} = \frac{1}{2} F.x$$

- Équilibre d' un tronçon de longueur dx



Soit $\Delta(dx)$' allongement du tronçon dx

Loi de HOOKE $\Rightarrow$ $\Delta(dx) = \dfrac{Fdx}{ES}$

Énergie de déformation élémentaire $\Rightarrow$ $dW_d = \dfrac{1}{2} F \times \Delta(dx)$

$$dW_d = \frac{1}{2} \cdot \frac{F^2}{ES} dx \quad \text{soit} \quad W_d = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{F^2}{ES} dx$$

$$W_d = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{F}{S} \cdot \frac{F}{ES} \cdot S dx$$

II. Énergie de déformation

D ' une manière générale ⇒ $$W_d = \frac{1}{2}\int_V \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}dV = \frac{1}{2}\int_{struct} \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}Sdx$$

Effort normal : traction/compression

$$W_d = \frac{1}{2}\int_{struct} \frac{N^2}{ES}dx$$

Effort tranchant : T_y ou T_z

$$W_d = \frac{1}{2}\int_{struct} \frac{T_y^{\ 2}}{\mu S}dx$$

Moment de torsion : M_x

$$W_d = \frac{1}{2}\int_{struct} \frac{M_x^{\ 2}}{\mu I_0}dx$$

Moment fléchissant : M_y ou M_z

$$W_d = \frac{1}{2}\int_{struct} \frac{M_z^{\ 2}}{EI_z}dx$$

effort normal + effort tranchant + moment fléchissant + moment de torsion

$$W_d = \frac{1}{2E}\int \frac{N^2}{S}\,dx + \frac{1}{2\mu}\int \frac{T_y^{\,2}}{S}\,dx + \frac{1}{2E}\int \frac{M_z^{\,2}}{I_z}\,dx + \frac{1}{2\mu}\int \frac{M_x^{\,2}}{I_0}\,dx$$

L'énergie potentielle élastique est l'opposée du travail des efforts intérieurs.

<u>Elle correspond en statique au travail des forces extérieures agissant sur la structure.</u>

$$\boxed{E_{def}(\text{structure}) = \int_{\text{ligne moyenne}} dE_{def}}$$

<u>Remarque</u> : le caractère extensif de l'énergie de déformation associé à l'indépendance des sollicitations dûe au choix du centre de surface G et des directions principales permet d'additionner les contributions de chaque sollicitation.

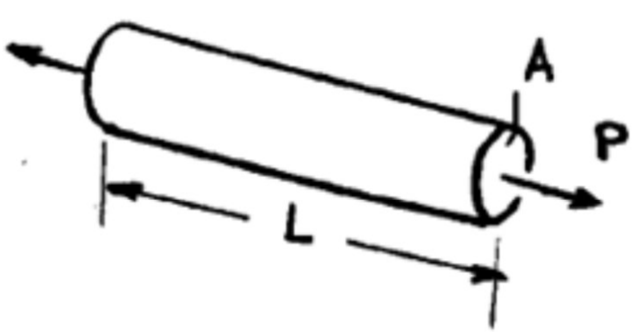
$$\boxed{E_d(\text{structure}) = E_d(\text{traction}) + E_d(\text{cisaillement}) + E_d(\text{torsion}) + E_d(\text{flexion})}$$

Cas pratiques

Barreau en traction

$$U = \int_V \frac{\sigma^2}{2E}\, dV \quad = \int_o^L \frac{1}{2E}\left(\frac{P}{A}\right)^2 A\, dx$$

$$U = \int_o^L \frac{P^2}{2EA} dx$$



Si la section est constante $\quad U = \dfrac{P^2 L}{2AE}$

Torsion d'un arbre circulaire

$$U = \int_V \frac{\tau^2}{2G}\, dV = \int_V \frac{(T\,r/J)^2}{2G}\, dV$$

$$U = \int_0^L \left[\frac{T^2}{2GJ^2}\int_A r^2 dA\right] dx = \int_0^L \frac{T^2}{2GJ}\, dx$$

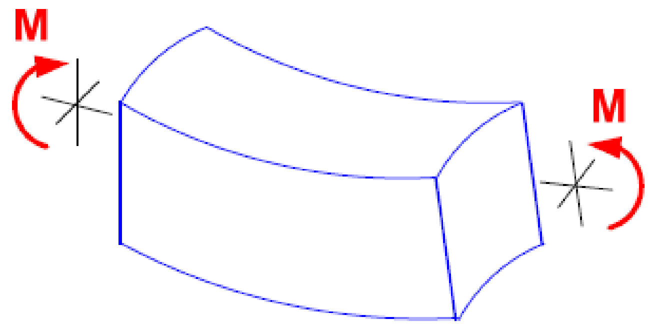
Si la section est constante $\quad U = \dfrac{T^2 L}{2GJ}$

Cas pratiques (suite)

Flexion

$$U = \int_V \frac{\sigma^2}{2E}\, dV = \int_V \frac{(M\,y/I)^2}{2E}\, dV$$

$$U = \int_0^L \left[\frac{M^2}{2EI^2}\int_A y^2 dA\right] dx = \int_0^L \frac{M^2}{2EI}\, dx$$

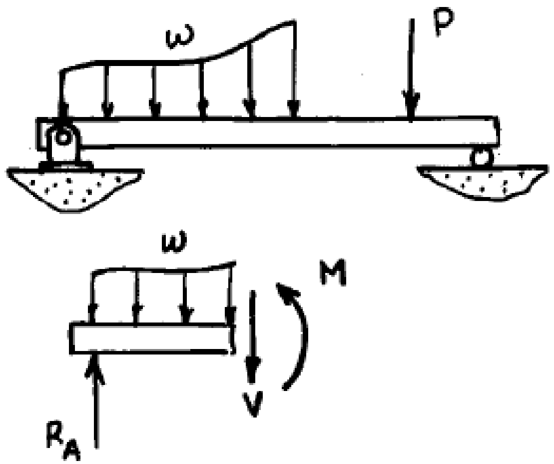


Effort tranchant

$$U = \int_V \frac{\tau^2}{2G}\, dV = \int_V \frac{(VQ/It)^2}{2G}\, dV$$

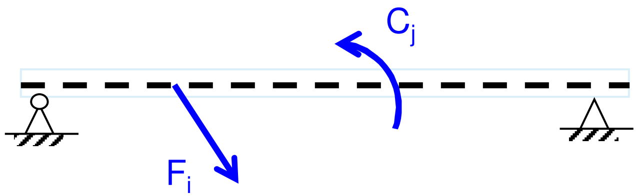
$$U = \int_o^L \left[\frac{V^2}{2GI^2}\left(\int_A \frac{Q^2}{t^2} dA\right)\right] dx = \int_o^L \frac{fV^2}{2GA} dx$$

$$f = \frac{A}{I^2}\int_A \frac{Q^2}{t^2} dA$$ est appelé facteur de forme



III. Théorèmes énergétiques

1. Théorème de Clapeyron

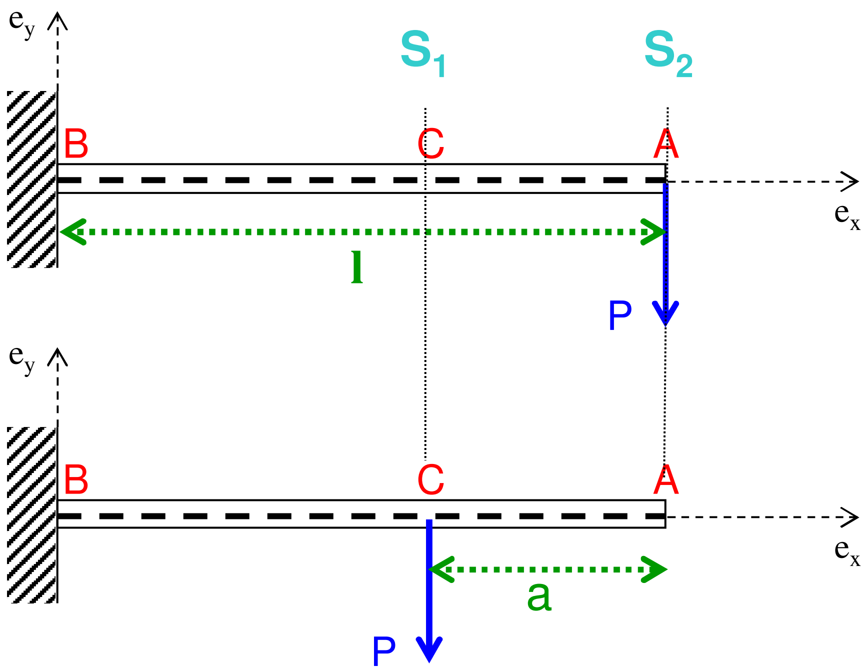


$$\begin{pmatrix} F_i \\ C_j \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \text{Déplacements } U_i \\ \text{Rotations } \theta_j \end{pmatrix}$$

Travail des forces extérieures

$$\Rightarrow \boxed{W_{ext} = \frac{1}{2} F_i U_i + \frac{1}{2} C_j \theta_j}$$

2. Théorème de réciprocité de Maxwell - Betti



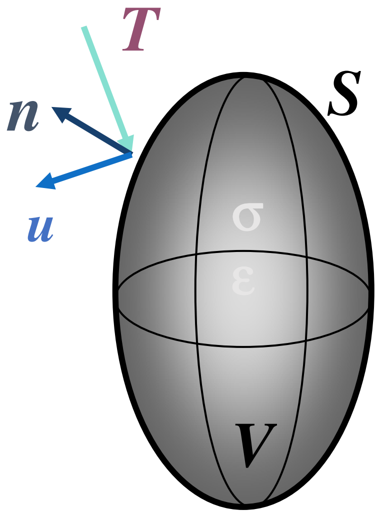
$$y_C = \frac{P}{6EI}(2l+a)(l-a)^2$$

$$y_A = \frac{P}{6EI}(2l+a)(l-a)^2$$

Flèche dans la section S_1 due à la charge P en S_2 = Flèche dans la section S_2 due à la charge P en S_1

2. Théorème de réciprocité de Maxwell - Betti

Statique et Forces de Volume négligeables $\vec{\gamma} = 0$ et $\vec{X} = 0$



$$W = \frac{1}{2}\int \mathrm{Tr}(\overline{\overline{\sigma}}\,\overline{\overline{\varepsilon}})\,dV = \frac{1}{2}\int \vec{T}\vec{u}\,dS$$

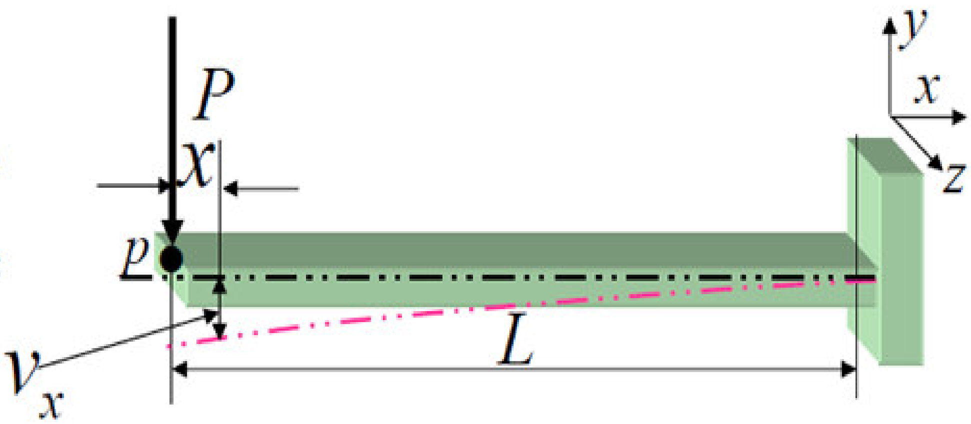
$$\overline{\overline{\varepsilon}} = \frac{\partial W}{\partial \overline{\overline{\sigma}}} \quad \Rightarrow \quad \vec{u} = \frac{\partial W}{\partial \vec{T}}$$

$$\overline{\overline{\sigma}} = \frac{\partial W}{\partial \overline{\overline{\varepsilon}}} \quad \Rightarrow \quad \vec{T} = \frac{\partial W}{\partial \vec{u}}$$

Réciprocité $\boxed{\vec{T}_1 \bullet \vec{u}_2 = \vec{T}_2 \bullet \vec{u}_1}$

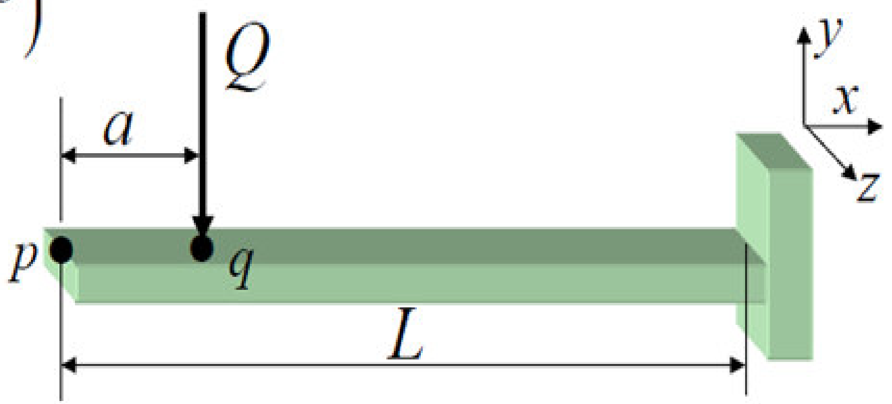
App1: application de Maxwell - Betti

L 'expression v_x de la déformée de cette poutre lorsqu'une force *P* agit à une distance L de l 'encastrement est :



$$v_x = \frac{-P}{6 \cdot E \cdot I}\left(2 \cdot L^3 - 3 \cdot L^2 \cdot x + x^3\right)$$

On demande de trouver l 'expression du déplacement du point *p* lorsqu'une force *Q* agit en *q*



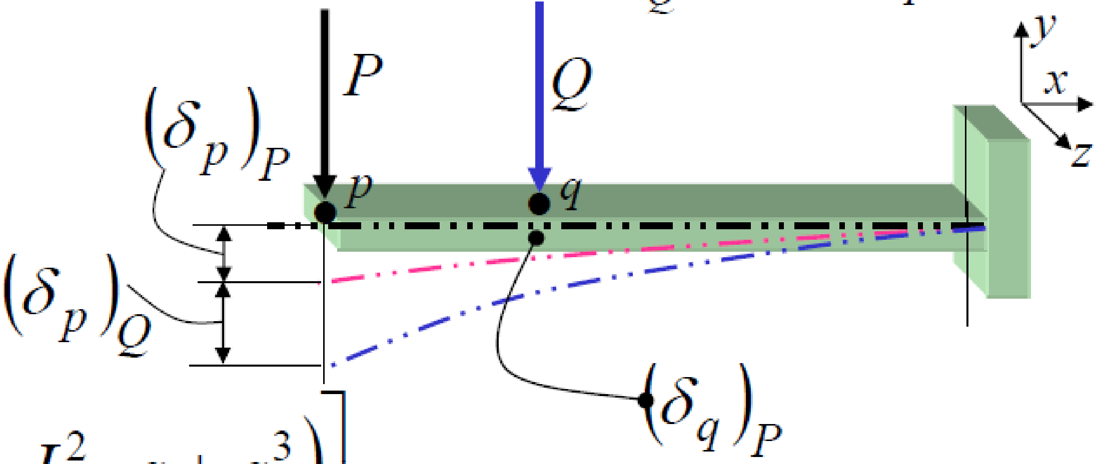
Solution :

On connaît $(\delta_p)_P$ et $(\delta_q)_P$; on cherche $(\delta_p)_Q$

Du théorème de *Maxwell-Betti*, on peut écrire : $P(\delta_p)_Q = Q(\delta_q)_P$

D 'où : $(\delta_p)_Q = \dfrac{Q}{P}(\delta_q)_P$

à $x = a$ $v_x = (\delta_q)_P$, et :



$$(\delta_p)_Q = \frac{Q}{P}\left[\frac{-P}{6\cdot E\cdot I}\left(2\cdot L^3 - 3\cdot L^2\cdot a + a^3\right)\right]$$

$$\boxed{(\delta_p)_Q = \frac{-Q}{6\cdot E\cdot I}\left(2\cdot L^3 - 3\cdot L^2\cdot a + a^3\right)}$$

App2: application de Maxwell - Betti

Un camion stationné en un point *c* d 'un pont cause une flèche

de δ_c = 52mm au point *c* et δ_v = 38 mm au point *v*.

Par la suite, une voiture de 1000kg s 'amène au point *v* du pont.

On mesure les flèches à nouveau et on trouve δ_c = 53mm et δ_v = 40 mm.

On demande quelle est la masse du camion?

Solution :

Du théorème de *Maxwell-Betti,* on peut écrire si C est la masse du camion et V est celle de la voiture :

$$C(\delta_c)_V = V(\delta_v)_C$$

On connaît :

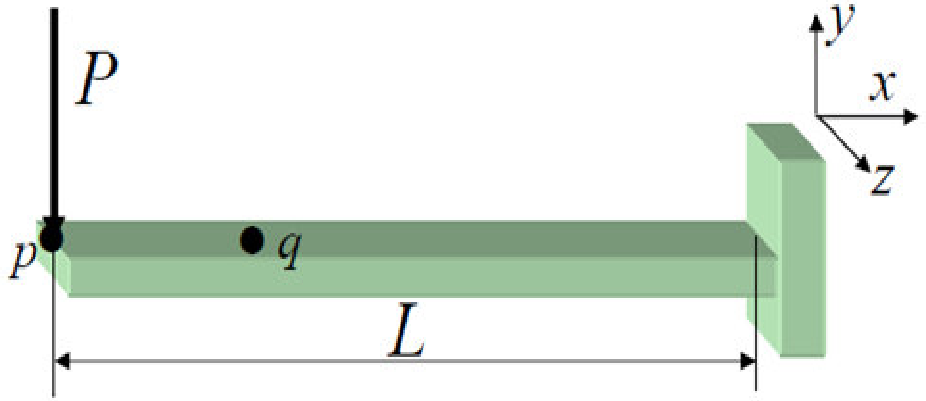
$$(\delta_c)_C = 52mm \quad ; \quad (\delta_v)_C = 38\text{mm}$$

$$(\delta_c)_C + (\delta_c)_V = 53\text{mm} \quad ; \quad (\delta_v)_C + (\delta_v)_V = 40\text{mm}$$

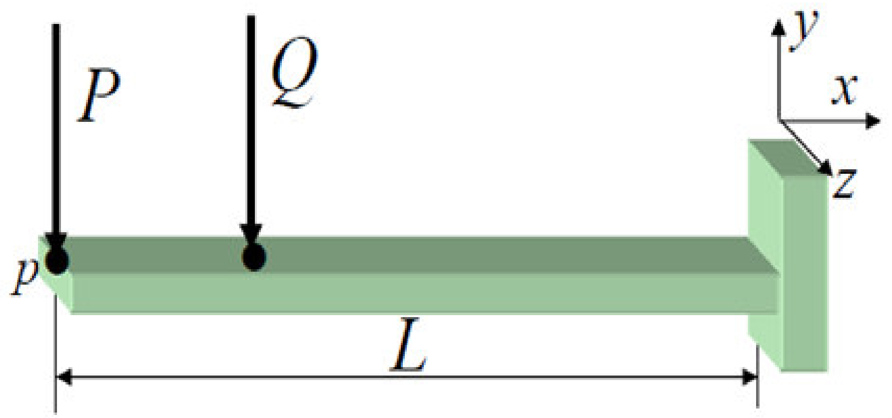
$$\boxed{C = V\frac{(\delta_v)_C}{(\delta_c)_V} = 1000 \cdot \frac{38}{53-52} = 38000kg}$$

App3: application de Maxwell - Betti

Sur la poutre suivante, lorsque P =10kN on mesure le déplacement au point p, $(\delta_p)_P$ = 12mm et le déplacement au point q, $(\delta_q)_P$ = 9mm.



Si, par la suite, on ajoute une force Q = 5kN en q, sans rien mesurer à nouveau. On demande de trouver $(\delta_p)_{total}$



Solution :

$$(\delta_p)_{total} = (\delta_p)_P + (\delta_p)_Q \quad \text{où } (\delta_p)_P = 12\text{mm}$$

$$(\delta_p)_Q = ?$$

De *Maxwell-Betti*:

$$P(\delta_p)_Q = Q(\delta_q)_P \text{ où } (\delta_q)_P = 9mm$$

$$P = 10\text{kN et } Q = 5\text{kN}$$

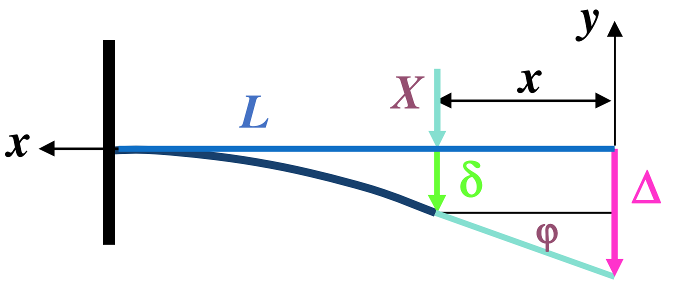
$$(\delta_p)_Q = \frac{Q}{P}(\delta_q)_P = \frac{5}{10}\cdot 9 = 4{,}5\ mm$$

et

$$\boxed{(\delta_p)_{total} = 12 + 4{,}5 = 16{,}5\ mm}$$

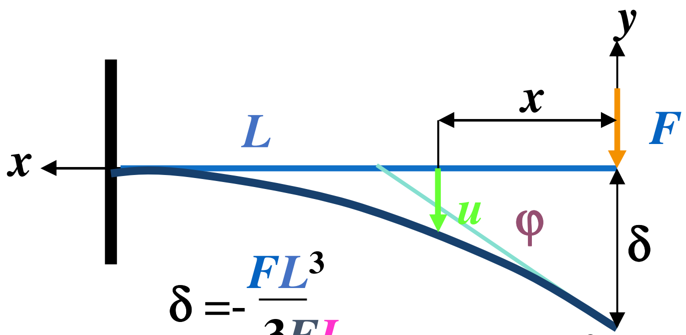
App4: application de Maxwell - Betti

Poutre Console



$$\delta = -\frac{X(L-x)^3}{3EI} \qquad \mathrm{tg}(\varphi) = \frac{X(L-x)^2}{2EI}$$

$$\boxed{Xu = F\Delta}$$



$$\delta = -\frac{FL^3}{3EI} \qquad \mathrm{tg}(\varphi) = \frac{FL^2}{2EI}$$

$$\Delta = \delta - \mathrm{tg}(\varphi)x = \frac{X}{6EI}(-x^3+3Lx^2-2L^3)$$

$$u = \frac{F\Delta}{X} = \frac{F}{6EI}(-x^3+3Lx^2-2L^3)$$

2. Réciprocité des Chargements

$\sigma = 0$
$\varepsilon = 0$

$F_{11} = \frac{1}{2}\sigma_1\varepsilon_1$

$\sigma = \sigma_1$
$\varepsilon = \varepsilon_1$

$\sigma = \sigma_1$

$F_{12} = \sigma_1\varepsilon_2$

$F_{22} = \frac{1}{2}\sigma_2\varepsilon_2$

$$\boxed{F = F_{11} + F_{12} + F_{22}}$$

$$F = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2)(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$$

$$\boxed{F = \frac{1}{2}(F_{11} + F_{12} + F_{21} + F_{22})}$$

$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$
$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$

$F_{22} = \frac{1}{2}\sigma_2\varepsilon_2$

$\sigma = \sigma_2$

$F_{11} = \frac{1}{2}\sigma_1\varepsilon_1$

$F_{21} = \sigma_2\varepsilon_1$

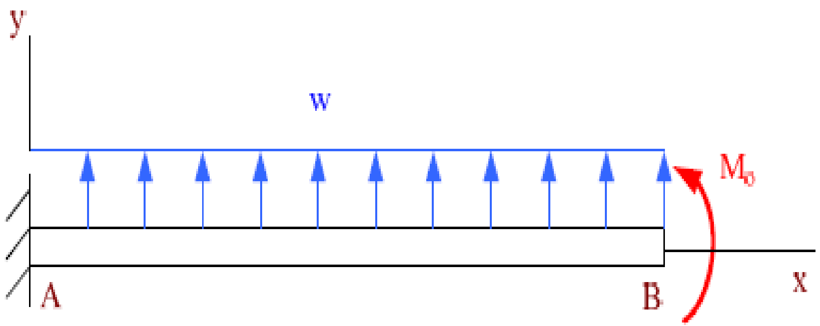
$$\boxed{F = F_{22} + F_{21} + F_{11}}$$

$\sigma = \sigma_2$
$\varepsilon = \varepsilon_2$

$$\boxed{F_{12} = F_{21} = \frac{1}{2}(F_{12} + F_{21})}$$

$$\boxed{\sigma_1\varepsilon_2 = \sigma_2\varepsilon_1}$$

Exemple sur le théorème de réciprocité



Connaissant la flèche due à M_o trouvez la rotation au point B due à w

$$v_{M_o} = \frac{M_o x^2}{2EI}$$

Travail fourni par une force élémentaire wdx lorsque le moment M_o est appliqué

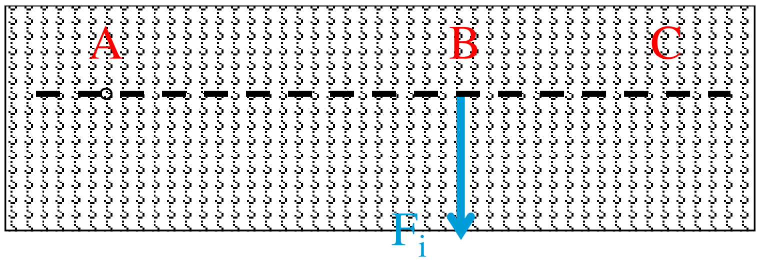
$$du = v_{M_o}(wdx)$$

En appliquant le théorème de réciprocité

$$M_o \theta_{Bw} = \int_0^L v_{M_o}(wdx) = \int_0^L \frac{M_o x^2}{2EI} wdx = \frac{M_o w L^3}{6EI} \Rightarrow \theta_{Bw} = \frac{wL^3}{6EI}$$

3. Théorème de Castigliano

<u>Théorème :</u> le déplacement du point d'application d'une force dans sa direction (ou la rotation d'un couple) est égale à la dérivée partielle de l'énergie de déformation par rapport à cette force (ou à ce couple) :

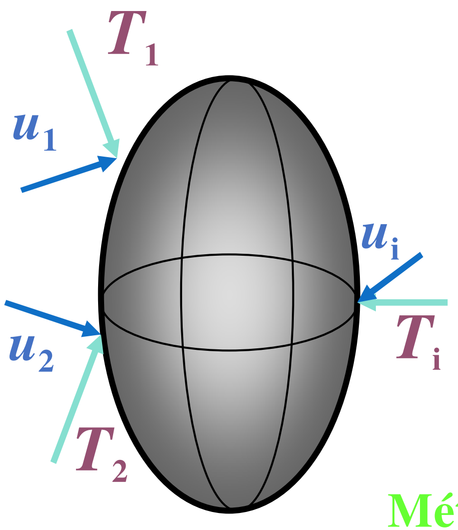


$$\boxed{\frac{\partial W_d}{\partial F_i} = U_B}$$

Le théorème de Castigliano permet de calculer directement un déplacement seulement lorsque sa direction est connue. Dans un cas général, il donne seulement <u>la projection du vecteur déplacement</u> sur la droite d'action de l'effort F appliqué au point A.

3 .Théorème de Castigliano

Statique et Forces de Volume négligeables $\vec{g} = 0$ et $\vec{X} = 0$



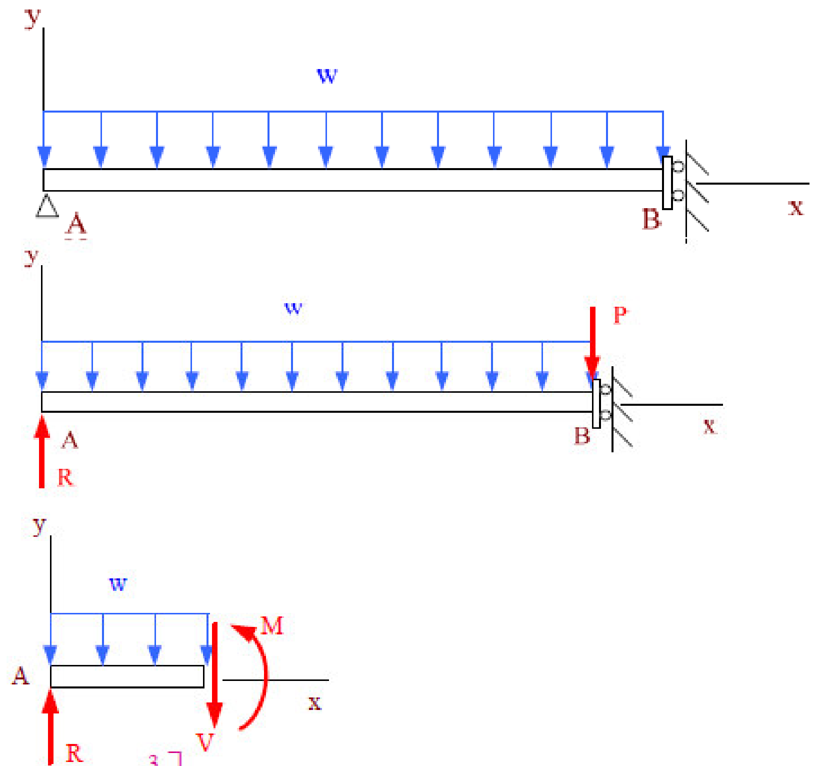
$$W(\vec{T}_1, \vec{T}_2, \ldots, \vec{T}_i, \ldots) = \frac{1}{2} S_i \vec{T}_i \vec{u}_i \qquad \vec{u}_i = \frac{\partial W}{\partial \vec{T}_i}$$

Méthode des charges fictives

$$\vec{u}_k(\vec{T}_i) = \left. \frac{\partial W(\vec{T}_1, \ldots, \vec{T}_j, \ldots, \vec{T}_i, \ldots)}{\partial \vec{T}_k} \right|_{\vec{T}_j = 0\ \forall j \neq i}$$

Déplacement $\vec{u}_k$ de la charge fictive $\vec{T}_k$ sous l'action de la **seule** force réelle $\vec{T}_i$

Exemple sur le théorème de Castigliano



Déterminer la flèche au point B

En ajoutant une force P au point B et en appliquant Castigliano

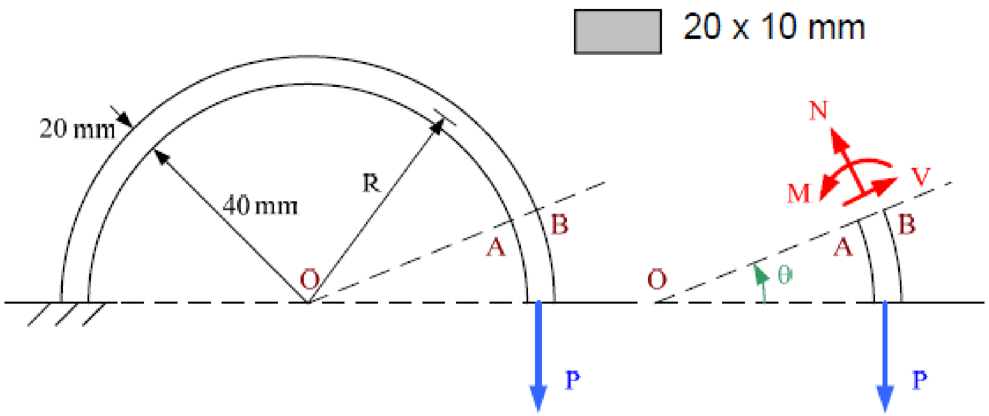
$$R = wL + P$$

$$M = Rx - \frac{wx^2}{2} = (wL+P)x - \frac{wx^2}{2}$$

$$v_B = \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{\partial}{\partial P}\int_0^L \frac{M^2}{2EI}dx = \int_0^L \frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial P}dx = \frac{1}{EI}\int_0^L \left[(wL+P)x^2 - \frac{wx^3}{2}\right]dx$$

$$v_B = \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{1}{EI}\left[(wL+P)\frac{L^3}{3} - \frac{wL^4}{8}\right] \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{En mettant P=0} \\ v_B = \dfrac{5wL^4}{24EI} \end{array} \right.$$

Exemple sur le théorème de Castigliano



DCL et équilibre

$$N = P\cos\theta$$

$$V = P\sin\theta$$

$$M = PR(1-\cos\theta)$$

Déterminer le déplacement vertical au point d'application de la charge P=5 kN

En appliquant Castigliano $v_B = \dfrac{\partial U}{\partial P} = \dfrac{\partial}{\partial P}\displaystyle\int_0^L \frac{M^2}{2EI}dx + \frac{\partial}{\partial P}\int_0^L \frac{N^2}{2EA}dx + \frac{\partial}{\partial P}\int_0^L \frac{fV^2}{2GA}dx$

$$v_B = \frac{\partial U}{\partial P} = \int_0^L \frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial P}dx + \int_0^L \frac{N}{EA}\frac{\partial N}{\partial P}dx + \int_0^L \frac{fV}{GA}\frac{\partial V}{\partial P}dx \qquad \left(avec\ f = \frac{6}{5}\right)$$

En remplaçant dx par Rdθ

$$v_B = \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{PR^3}{EI}\int_0^\pi (1-\cos\theta)^2 d\theta + \frac{PR}{EA}\int_0^\pi \sin^2\theta\, d\theta + \frac{6PR}{5GA}\int_0^\pi \cos^2\theta\, d\theta$$

$$v_B = \frac{3\pi PR^3}{2EI} + \frac{\pi PR}{2EA} + \frac{3\pi PR}{5GA} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Pour l'acier E=210 GPa, } \nu\text{=0.3} \\ \text{I=6667 mm}^4\text{, A=200 mm}^2 \end{array} \right\}$$

v_B=2,25 mm

v_B=2,21 mm sans V

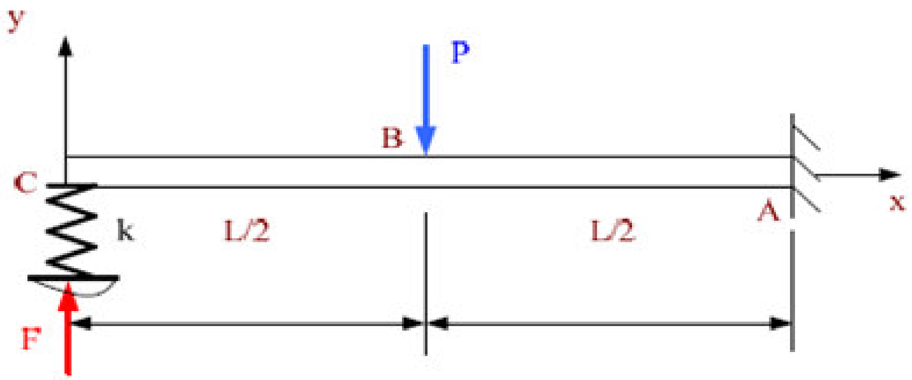
Structures Hyperstatique
(Théorème de Castigliano)

On peut appliquer le théorème de Castigliano aux structures hyperstatiques telles que

$$\frac{\partial U}{\partial P_i} = \delta_i (= 0)$$

Et par analogie

$$\frac{\partial U}{\partial M_i} = \theta_i (= 0)$$



Déterminer la force dans le ressort

DCL et équilibre

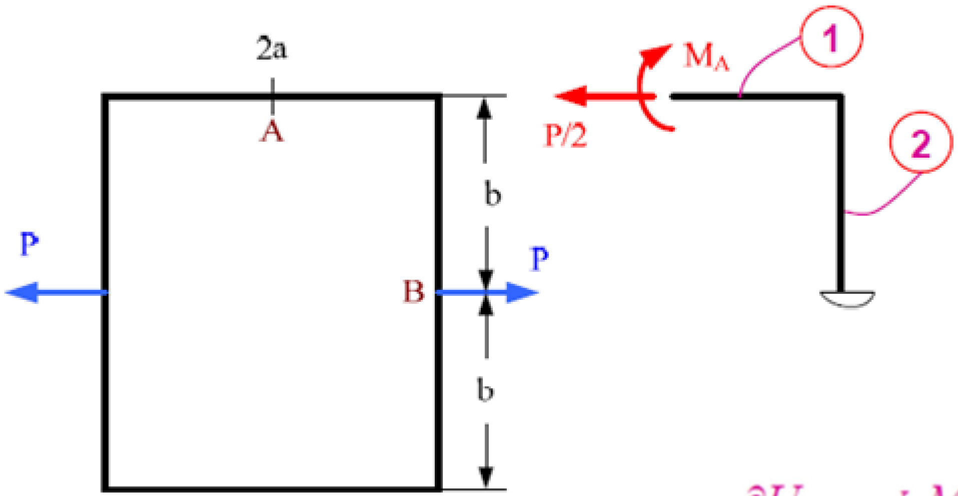
$$\begin{cases} M_1 = Fx & 0 \le x \le L/2 \\ M_2 = Fx - P(x - L/2) & L/2 \le x \le L \end{cases}$$

$$\left. v_C = \frac{\partial U}{\partial F} = \int_0^L \frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial F}dx = \frac{1}{EI}\int_0^{L/2}(Fx)x dx + \frac{1}{EI}\int_{L/2}^{L}(Fx - P(x - L/2))x dx = -\frac{F}{k} \right\}$$

$$\Rightarrow \quad F = \frac{5P}{16\left(1 + 3EI/kL^3\right)}$$

Structures Hyperstatique
(Théorème de Castigliano)

Déterminer le déplacement horizontal au point B



DCL et équilibre

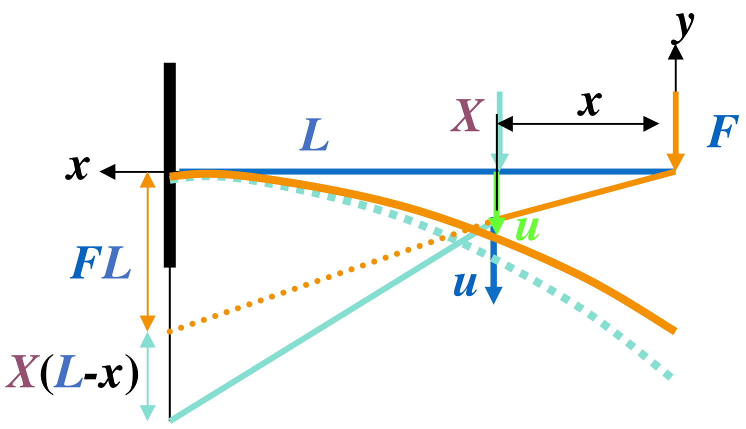
$$\begin{cases} M_1 = -M_A & 0 \le x \le a \\ M_2 = -M_A + Px/2 & 0 \le x \le b \end{cases}$$

$$\theta_A = \frac{\partial U}{\partial M_A} = \int_0^L \frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial M_A}dx = \frac{1}{EI}\int_0^a M_A dx + \frac{1}{EI}\int_0^b (M_A - Px/2)dx$$

$$\theta_A = 0 \quad \Longrightarrow \quad M_A = Pb^2/4(a+b)$$

$$\delta_A = \frac{\partial U}{\partial P/2} = \int_0^L \frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial P/2}dx = \frac{1}{EI}\int_0^b (M_A - Px/2)x dx \quad \Longrightarrow \quad \delta_A = Pb^3(4a+b)/12EI(a+b)$$

App : Poutre Console



$$W = \frac{1}{2}\int \frac{M^2}{EI}dx = \frac{1}{2EI}\int_0^x F^2x^2dx + \frac{1}{2EI}\int_x^L (Fx+X(L-x))^2dx$$

$$u = \frac{1}{2EI}\left.\frac{\partial W}{\partial X}\right|_{X=0} = \frac{-2}{EI}\int_x^L (Fx+\cancel{X(L-x)})(L-x)dx$$

$$u = \frac{1}{2EI}\left.\frac{\partial W}{\partial X}\right|_{X=0} = \frac{F}{6EI}(-x^3+3Lx^2-2L^3)$$

4. Théorème de Menabrea

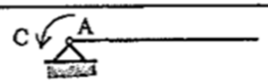
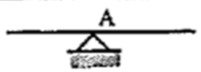
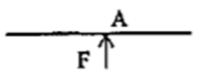
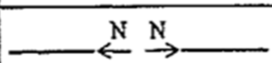
<u>Théorème :</u> la dérivée partielle de l'énergie de déformation par rapport à chacune des inconnues surabondantes est nulle, à condition que les points d'application des forces ne bougent pas ($U_i = 0$) ou que les sections ne tournent pas ($q_i = 0$)

Structure hyperstatique
d'inconnues surabondantes R_i

$$W_d = f(R_i)$$

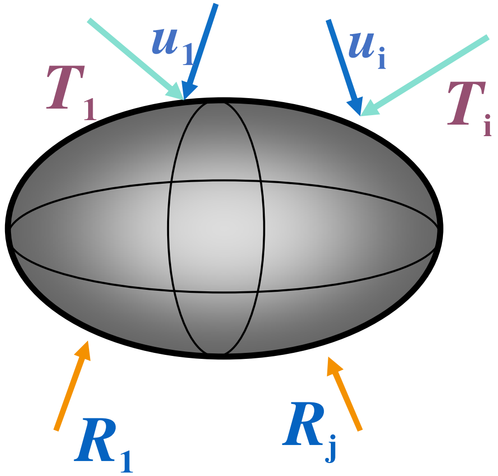
$$\boxed{\frac{\partial W_d}{\partial R_i} = 0}$$

Il y a autant d'équations que d'inconnues hyperstatiques.

Hyperstatique	Isostatique associé	Inconnue hyperstatique	condition cinématique	Ménabréa
		C	$\omega_A = 0$	$\frac{\partial W}{\partial C} = 0$
		F	$u_A = 0$	$\frac{\partial W}{\partial F} = 0$
		N	$u_A^+ = u_A^-$	$\frac{\partial W}{\partial N} = 0$

4. Théorème de Menabrea

Statique et Forces de Volume négligeables $\vec{\gamma} = \mathbf{0}$ et $\vec{X} = \mathbf{0}$



$\vec{T}$ Forces appliquées

$\vec{R}$ Réactions d'appui

Système Hyperstatique

Σ(forces)=**0** et Σ(moments)=**0** ne suffisent pas à exprimer tous les $\boldsymbol{R}$ en fonction des $\boldsymbol{T}$

$$W = f\,(\vec{T}_1,\ldots,\vec{T}_i,\ldots,\vec{R}_1,\ldots,\vec{R}_j) \qquad \vec{u}_i = \frac{\partial W}{\partial \vec{T}_i} \qquad \vec{0} = \frac{\partial W}{\partial \vec{R}_j}$$

App : Suspension articulée

$$X+2R\cos\alpha = P$$

$$\sigma = \frac{F}{S}$$

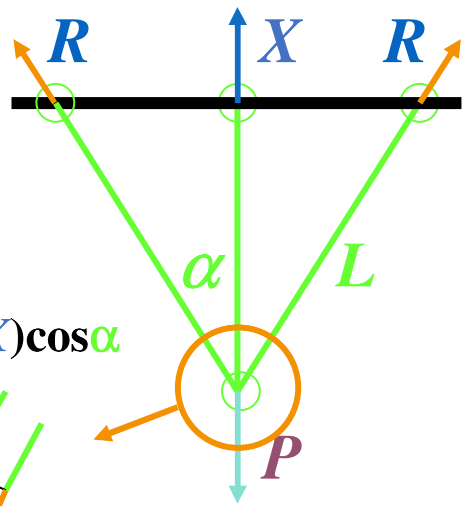
$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$$

$$u = \varepsilon L = \frac{FL}{ES}$$

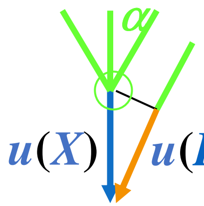
$$u(X) = \frac{L}{ES} X\cos\alpha$$

$$u(R) = \frac{L}{ES}\,\frac{P-X}{2\cos\alpha}$$

$$\boxed{X = \frac{P}{1+2\cos^3\alpha}}$$



$$u(R) = u(X)\cos\alpha$$



Symétrie

Σ(forces horizontales)$=0$ et Σ(moments)$=0$

$$W = \frac{1}{2}\sum_i \vec{F}\,\vec{u}$$

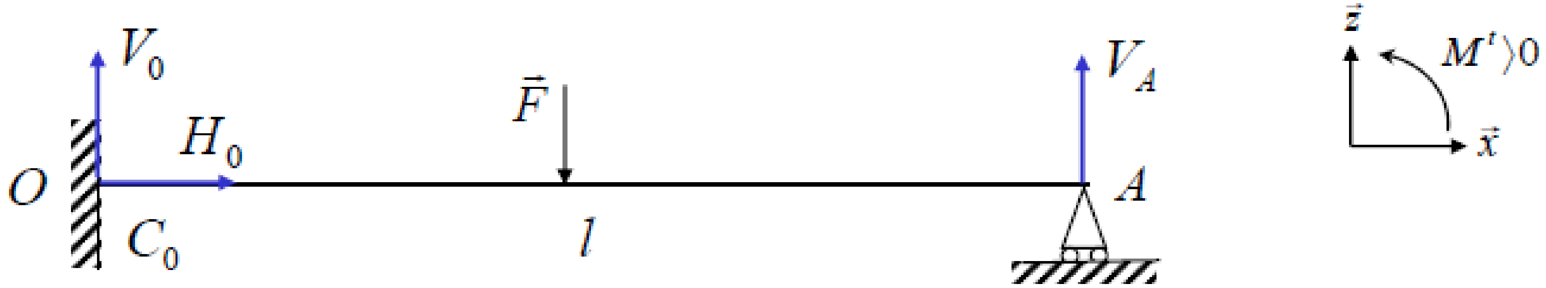
$$2W = Xu(X) + 2Ru(R)$$

$$2W = \frac{L}{ES}\left(X^2\cos\alpha + 2\frac{(P-X)^2}{4\cos^2\alpha}\right)$$

$$\frac{\partial W}{\partial X} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{X = \frac{P}{1+2\cos^3\alpha}}$$

App1: Théorème de Castigliano/Ménabréa

Exemple



1) Degrés d 'hyperstaticité h

Il y a 4 inconnues : V_0, V_1, H_0 et C_0.

3 équations d 'équilibre : $\sum \vec{F}_x = \vec{0}$ $\quad \sum \vec{F}_z = \vec{0}$ $\quad \sum \vec{M} / O = 0$

$\Rightarrow$ Degrés d 'hyperstatisme : h=4-3=1 $\qquad \Rightarrow$ 1 seule liaison surabondante.

2) Equations d 'équilibre

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum \vec{F}_x = \vec{0} \Rightarrow H_O = 0 \\ \sum \vec{F}_y = \vec{0} \Rightarrow V_O + F + V_A = 0 \\ \sum M^t / O = 0 \Rightarrow -\dfrac{Fl}{2} - V_A l + C_O = 0 \end{array} \right\}$$

3) Choix de l 'inconnue hyperstatique

On choisit V_A comme inconnue hyperstatique $\Rightarrow$ On exprimera tout (M, N, T) en fonction des efforts extérieurs et de V_A

Exemple (suite)

4) Expression de M(x) en fonction des efforts extérieurs et des inconnues hyperstatiques

$$0 \le x \le l/2 \qquad \begin{cases} T(x) = V_1 + F \\ T(x) = V_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} M(x) = -V_1(l-x) - F(l/2 - x) \\ M(x) = -V_1(l-x) \end{cases}$$
$$l/2 \le x \le l$$

- On recherche une 4ème équation en appliquant le théorème de Castigliano : $\dfrac{\partial U}{\partial V_1} = 0 \Rightarrow \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^l \frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial V_1}dx$

Donc, $\dfrac{\partial M}{\partial V_1} = -(l-x) \quad \forall x$

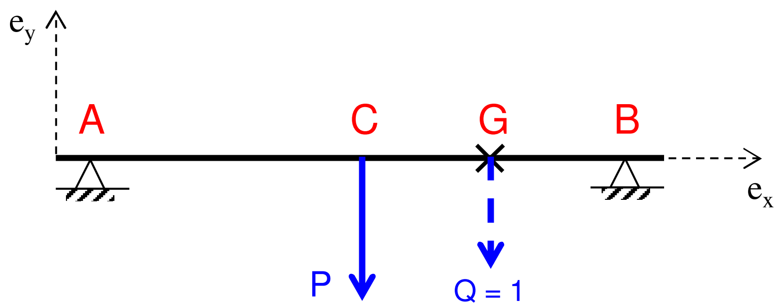
- La 4ème équation s 'écrit : $\displaystyle\int_0^{l/2} [V_1(l-x) + F(l/2 - x)](l-x)dx + \int_{l/2}^{l} V_1(l-x)(l-x)dx = 0$

- Equation du 1er degré en V_1. On trouve : $\boxed{V_1 = \dfrac{-5}{16}F}$

- En remplaçant dans les équations d 'équilibre, il vient : $\boxed{V_0 = \dfrac{-11}{16}F}$ $\boxed{C_0 = \dfrac{3}{16}F}$

5. Calcul du déplacement d'un point non chargé

Poutre sur 2 appuis



Flèche en G ?

- détermination de l' équation de la déformée

- charge fictive unitaire Q travaillant dans le déplacement $U_y(G)$

Théorème de CASTIGLIANO

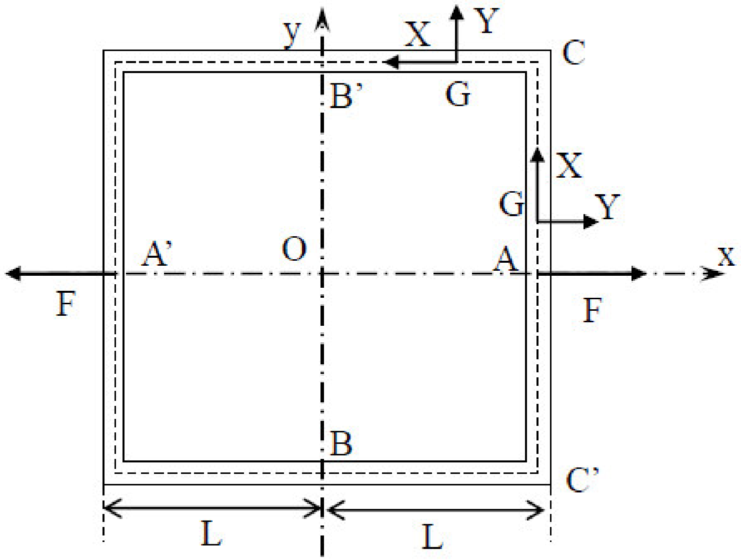
$$\boxed{\left(\frac{\partial W_d}{\partial Q}\right)_{\underline{Q=0}} = U_y(G)}$$

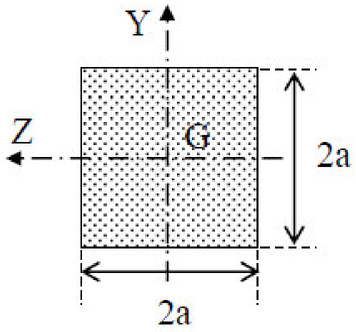
Théorèmes Énergétiques

Applications

Méthode générale de calcul des assemblages de poutres

App1 : calcul d ’un cadre carré





- ligne moyenne: carre de coté 2L
- section droite: carre de coté 2a (a << L)
- chargement: forces F et -F, appliquées en A et A ’
- oxy: plan de symétrie

Calculer:

- Les composantes N, T_Y, M_Z du visseur sur la section droite courante.
- Les déplacements de A et de A ’.

Solution:

- l 'équilibre du demi-cadre donne:

. Équilibre des forces:

$$N_B = N_{B'} = \frac{F}{2}$$

.Équilibre des moments

$$M_B = M_{B'}$$

- La symétrie par rapport à l 'axe ox implique la nullité de T_B et $T_{B'}$.

La structure est hyperstatique d 'ordre 1. Prenons M_B comme inconnue hyperstatique.

- Expression du visseur:

Sur B 'C '

$$\begin{cases} N = \dfrac{F}{2} \\ T = 0 \\ M = M_B \end{cases}$$

Sur C 'A

$$\begin{cases} N = 0 \\ T = -\dfrac{F}{2} \\ M = \dfrac{F}{2}(L + y) + M_B \end{cases}$$

Sur AC
$$\begin{cases} N = 0 \\ T = \dfrac{F}{2} \\ M = \dfrac{F}{2}(L - y) + M_B \end{cases}$$

Sur CB
$$\begin{cases} N = \dfrac{F}{2} \\ T = 0 \\ M = M_B \end{cases}$$

Par raison de symétrie, les section S_A et S_B ne peuvent pas tourner. D 'où (théorème de Ménabréa):

$$\omega_B = \frac{\partial W}{\partial M_B} = 0$$

- Energie potentielle élastique emmagasinée dans la demi structure:

$$W = \frac{1}{2}\int_{SB'}^{SB}\left[\frac{N^2}{ES} + \frac{M^2}{EI} + k\frac{T^2}{GS}\right].ds$$

$$\frac{\partial N}{\partial M_B} = 0 \qquad \frac{\partial T}{\partial M_B} = 0 \qquad \frac{\partial T}{\partial M_B} = 1$$

$$\frac{\partial W}{\partial M_B} = \int_{SB'}^{SB} \left[\frac{N}{ES} \cdot \frac{\partial N}{\partial M_B} + \frac{M}{EI} \cdot \frac{\partial M}{\partial M_B} + \frac{T}{GS} \cdot \frac{\partial T}{\partial M_B} \right] .ds$$

$$\frac{\partial W}{\partial M_B} = \int_{SB'}^{SB} \frac{M}{EI} .ds$$

$$M_B = -\frac{FL}{4}$$ D 'où le visseur

Calcul du déplacement en A:

Théorème de Castigliano: $u_A = \dfrac{\partial W}{\partial F}$

Energie potentielle: $W = \dfrac{F^2 L}{4ES} + k \dfrac{F^2 L}{4GS} + \dfrac{5}{96} \dfrac{F^2 L^3}{EI}$

On en déduit u_A:

$$\boxed{u_A = \frac{\partial W}{\partial F} = \frac{FL}{2ES} + k\frac{FL}{2GS} + \frac{5}{48}\frac{FL^3}{EI}}$$

Comparaison du poids des différents termes de l 'énergie potentielle de déformation.

Application numérique: E = 70 000 Mpa E = 27 000 Mpa L = 1 m a = 5 mm

pour un carré plein, on à: k ~ 6/5

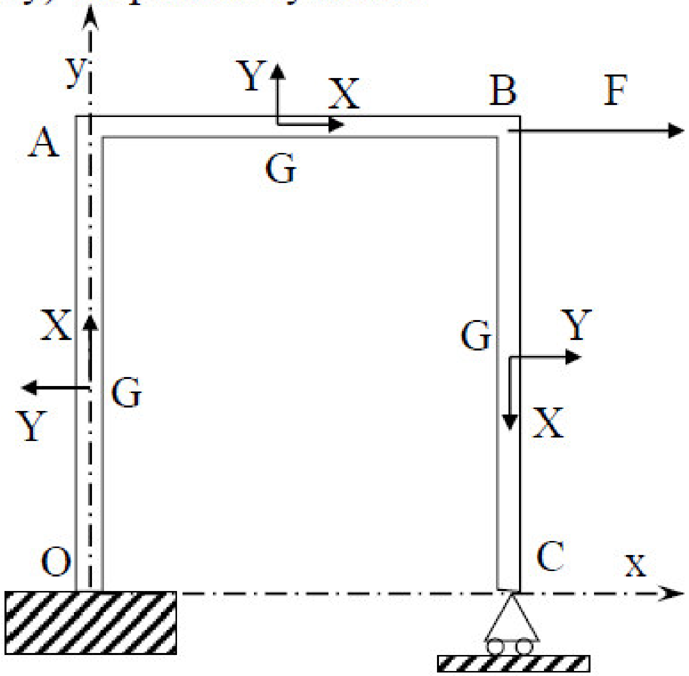
- Energie potentielle due à l 'effort normal: $\frac{L}{4ES} = 3.57E^{-5}$
- Energie potentielle due à l 'effort tranchant: $k\frac{L}{4GS} = 1.109E^{-4}$
- Energie potentielle due au moment de flexion: $\frac{5}{96}\frac{L^3}{EI} = 2.976$

Le terme dû au moment fléchissant est très largement prépondérant.

App2 : Calcul d 'un portique:

On considère un portique constitué de trois poutres prismatiques identiques de longueur **a**, soudées entre elles. Le portique est encastré au niveau de l 'une de ses bases et appuyé simplement au niveau de l 'autre.

(xoy) est plan de symétrie.



- calculer les composantes du visseur sur les section droites

L 'équilibre global du portique s 'écrit:

$$X_0 = -F$$

$$Y_0 + Y_C = 0$$

$$M_0 - aF + aY_C = 0$$

Le problème est hyperstatique d 'ordre 1; on choisi la réaction Yc comme inconnue

Les composantes du visseur ont pour expression:

$$sur\ OA:\begin{cases}N=Y_C\\T=-F\\M=aY_C-(a-y)F\end{cases}\qquad sur\ AB:\begin{cases}N=F\\T=Y_C\\M=(a-x)F\end{cases}\qquad sur\ BC:\begin{cases}N=-Y_C\\T=0\\M=0\end{cases}$$

Energie potentielle de déformation:

$$W=\frac{1}{2}\int_{S0}^{SC}\left[\frac{N^2}{ES}+\frac{M^2}{EI}+k\frac{T^2}{GS}\right].ds$$

L 'hyperstaticitée est levée par l 'équation (théorème de ménabréa): $v_D=\dfrac{\partial W}{\partial Y_C}=0$

$$sur\ \ OA:\frac{\partial N}{\partial Y_C}=1\qquad \frac{\partial T}{\partial Y_C}=0\qquad \frac{\partial M}{\partial Y_C}=a$$

$$sur\ \ AB:\frac{\partial N}{\partial Y_C}=0\qquad \frac{\partial T}{\partial Y_C}=1\qquad \frac{\partial M}{\partial Y_C}=a-x$$

$$sur\ \ BC:\frac{\partial N}{\partial Y_C}=-1\qquad \frac{\partial T}{\partial Y_C}=0\qquad \frac{\partial M}{\partial Y_C}=0$$

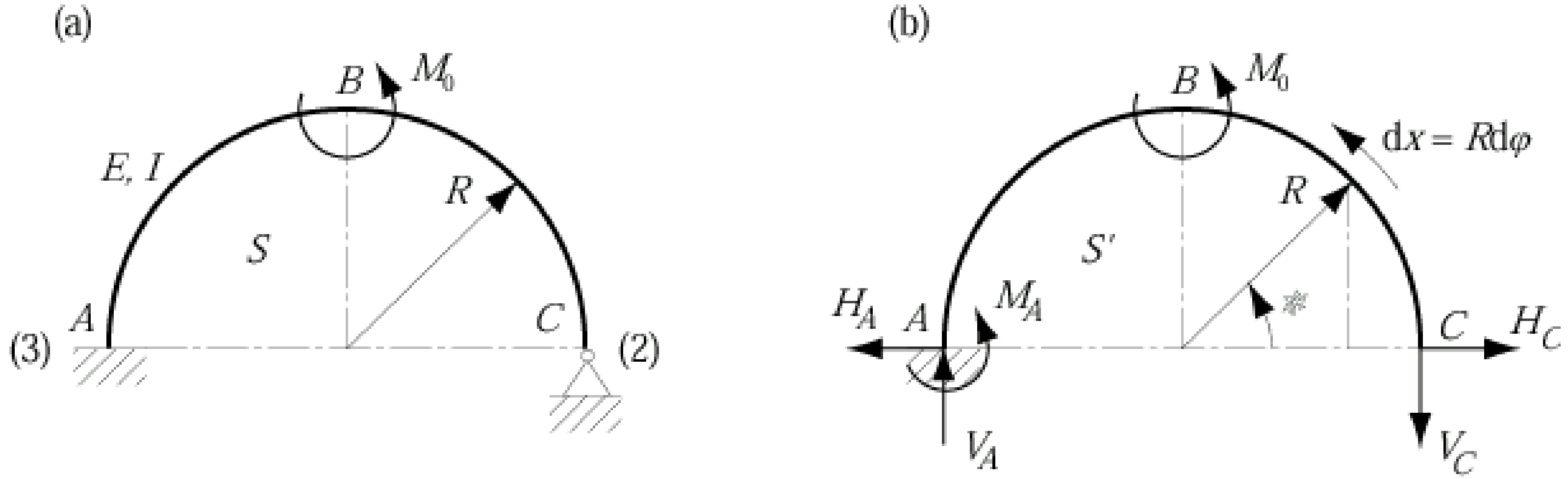
$$\frac{\partial W}{\partial Y_C}=\int_0^a\left[\frac{N}{ES}+a\frac{M}{EI}\right].dy+\int_0^a\left[k\frac{T}{GS}+(a-x)\frac{M}{EI}\right].dy+\int_0^a\left[-\frac{N}{ES}\right].dy$$

$d'où :$

$$\boxed{Y_C = \frac{3}{8} F \frac{1}{1 + \frac{3}{4} \frac{EI}{a^2 S} \left(\frac{2}{E} + \frac{k}{G} \right)}}$$

App3 : systèmes hyperstatiques

En ne considérant que l'énergie de flexion, déterminer par le théorème de Menabrea les réactions aux points *A* et *C* de l'arc sur lequel s'applique un moment M_0 au *B*.



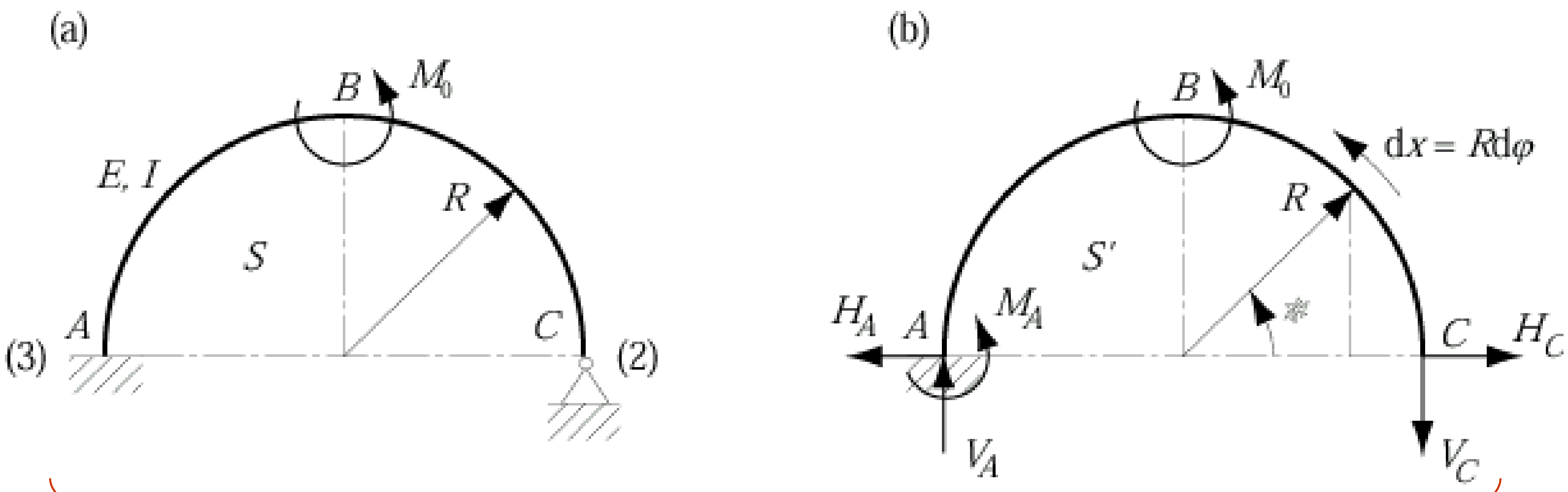
système avec 5 liaisons

Il est hyperstatique extérieurement d'ordre

$k = 5 - 3 = 2$

App3 : systèmes hyperstatiques

Choisissons comme hyperstatiques les réactions



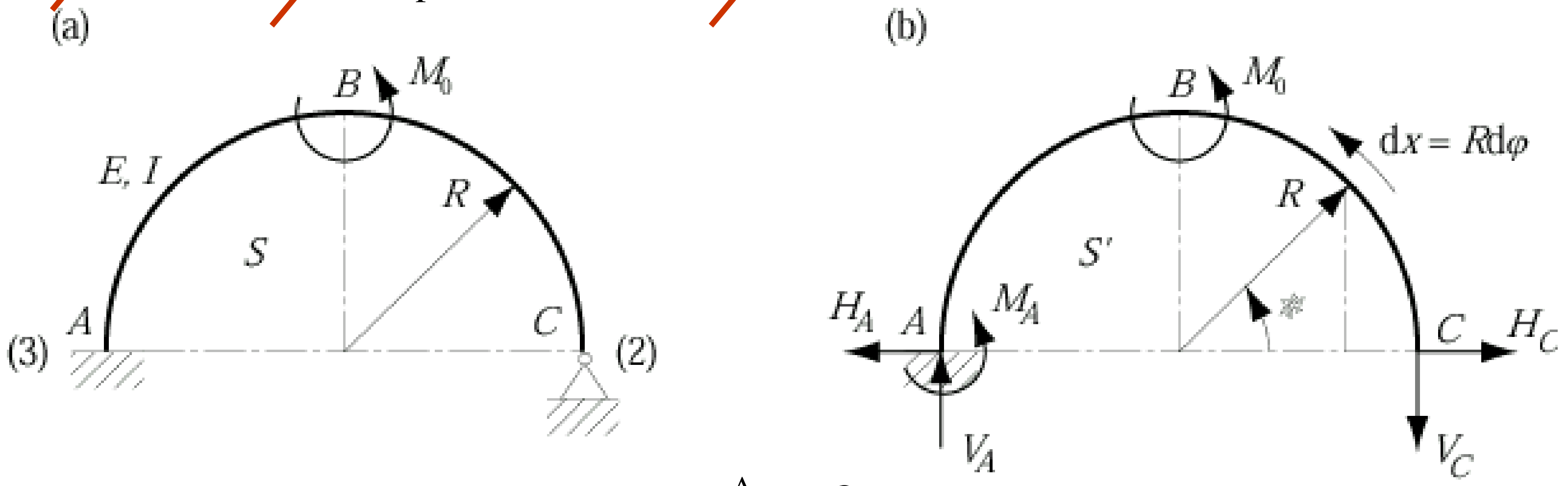
équilibre $\quad H_A = H_C \qquad V_A = V_C \qquad M_A = 2RV_C - M_0$

conditions de déformation $\quad \dfrac{\partial U}{\partial H_C} = 0 \qquad \dfrac{\partial U}{\partial V_C} = 0$

App3 : systèmes hyperstatiques

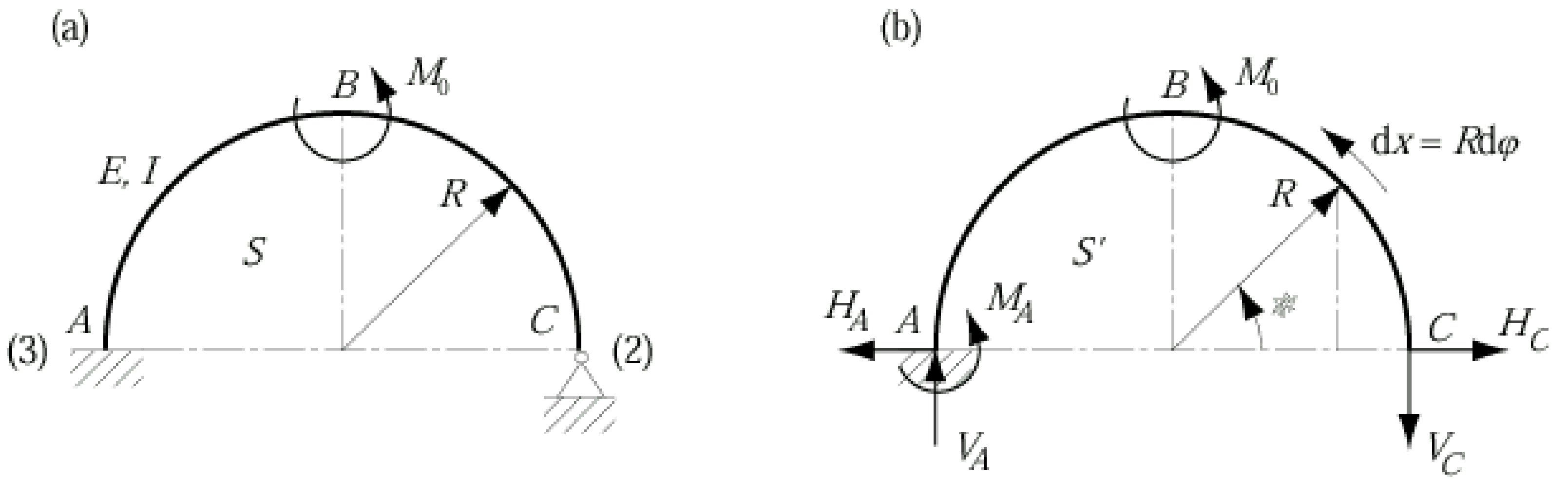
Pour l’énergie de déformation on recourt à l’expression

$$U=\cancelto{0}{\int_0^{\ell}\frac{N^2}{2EF}dx}+\cancelto{0}{\int_0^{\ell}\frac{M_t^2}{2GI_p}dx}+\int_0^{\ell}\frac{M_f^2}{2EI}dx+\cancelto{0}{\int_0^{\ell}\frac{\eta T^2}{2GF}dx}$$



$$\frac{\partial U}{\partial H_C}=0 \quad\Rightarrow\quad 0=\frac{1}{EI}\int_C^A M\frac{\partial M}{\partial H_C}Rd\varphi$$

$$\frac{\partial U}{\partial V_C}=0 \quad\Rightarrow\quad 0=\frac{1}{EI}\int_C^A M\frac{\partial M}{\partial V_C}Rd\varphi$$



Sur le tronçon *CB* de l'arc,

$$\frac{\partial M}{\partial V_C} = -R(1-\cos\varphi)$$

$$M = H_C R\sin\varphi - V_C R(1\text{-}\cos\varphi)$$

$$\frac{\partial M}{\partial V_C} = -R(1-\cos\varphi)$$

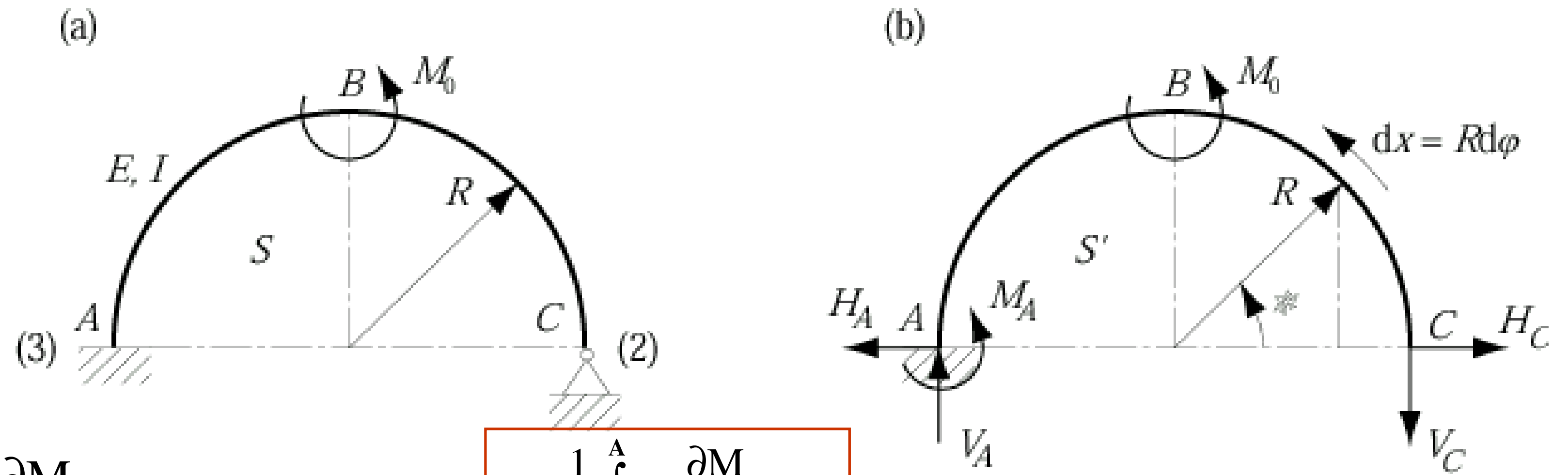
$$\frac{\partial M}{\partial H_C} = R\sin\varphi$$

Sur le tronçon *BA* de l'arc,

$$M = H_C R\sin\varphi - V_C R(1-\cos\varphi) + M_0$$

$$\frac{\partial M}{\partial H_C} = R\sin\varphi$$

App3 : systèmes hyperstatiques



$$\frac{\partial M}{\partial V_C} = -R(1-\cos\varphi)$$

$$\frac{\partial M}{\partial H_C} = R\sin\varphi$$

$$\boxed{0 = \frac{1}{EI}\int_C^A M\frac{\partial M}{\partial H_C}Rd\varphi}$$

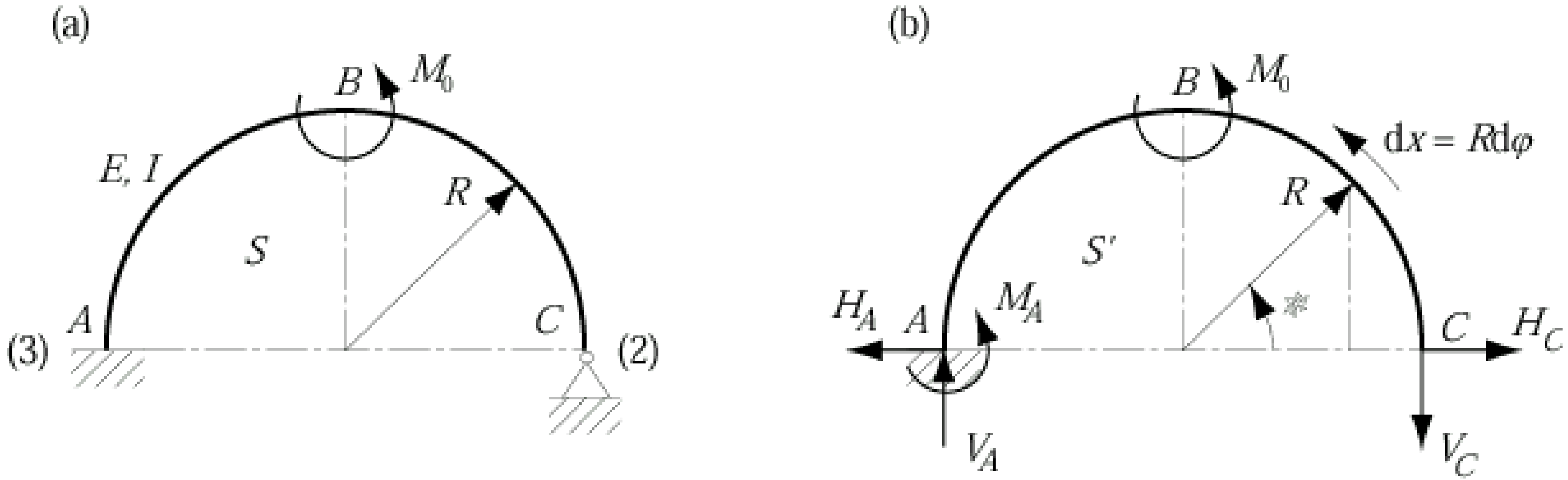
$$0 = \frac{R^3}{EI}\int_0^\pi \left[H_C\sin\varphi - V_C(1-\cos\varphi)\right]\sin\varphi\, d\varphi + \frac{R^2M_0}{EI}\int_{\pi/2}^{\pi}\sin\varphi\, d\varphi$$

$$\frac{\partial M}{\partial V_C} = -R(1-\cos\varphi)$$

$$\frac{\partial M}{\partial H_C} = R\sin\varphi$$

$$\boxed{0 = \frac{1}{EI}\int_C^A M\frac{\partial M}{\partial V_C}Rd\varphi}$$

$$0 = \frac{-R^3}{EI}\int_0^\pi \left[H_C\sin\varphi - V_C(1-\cos\varphi)\right](1-\cos\varphi)\, d\varphi - \frac{R^2M_0}{EI}\int_{\pi/2}^{\pi}(1-\cos\varphi)\, d\varphi$$



$$0=\frac{R^3}{EI}\int_0^{\pi}\left[H_C\sin\varphi-V_C(1-\cos\varphi)\right]\sin\varphi d\varphi$$

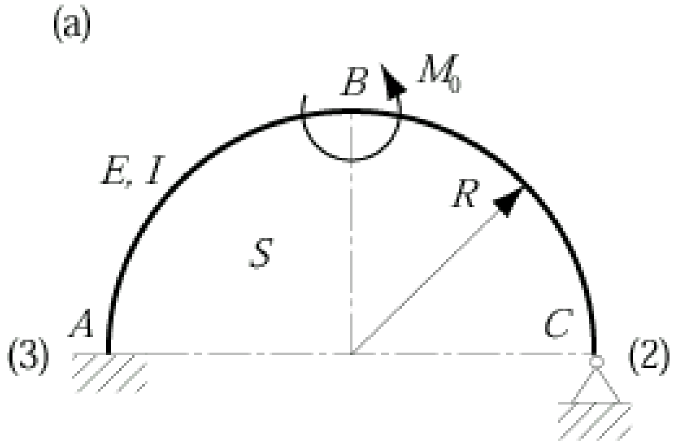
$$+\frac{R^2M_0}{EI}\int_{\pi/2}^{\pi}\sin\varphi d\varphi$$

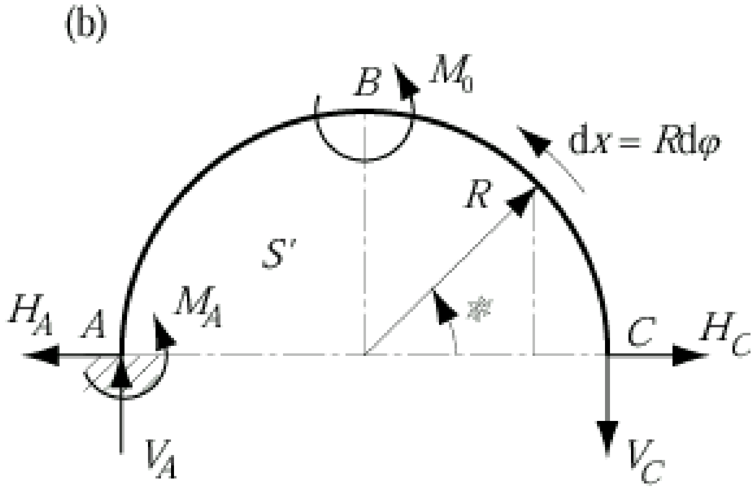
$$\Rightarrow \quad \frac{\pi}{2}H_C-2V_C=-\frac{M_0}{R}$$

$$0=\frac{-R^3}{EI}\int_0^{\pi}\left[H_C\sin\varphi-V_C(1-\cos\varphi)\right](1-\cos\varphi)d\varphi$$

$$-\frac{R^2M_0}{EI}\int_{\pi/2}^{\pi}(1-\cos\varphi)d\varphi$$

$$\Rightarrow \quad -2H_C-\frac{3\pi}{2}V_C=-\frac{2+\pi}{2}\frac{M_0}{R}$$





$$\left.\begin{aligned}
&H_A = H_C\\
&V_A = V_C\\
&M_A = 2RV_C - M_0\\
&\frac{\pi}{2}H_C - 2V_C = -\frac{M_0}{R}\\
&-2H_C - \frac{3\pi}{2}V_C = -\frac{2+\pi}{2}\frac{M_0}{R}
\end{aligned}\right\}$$

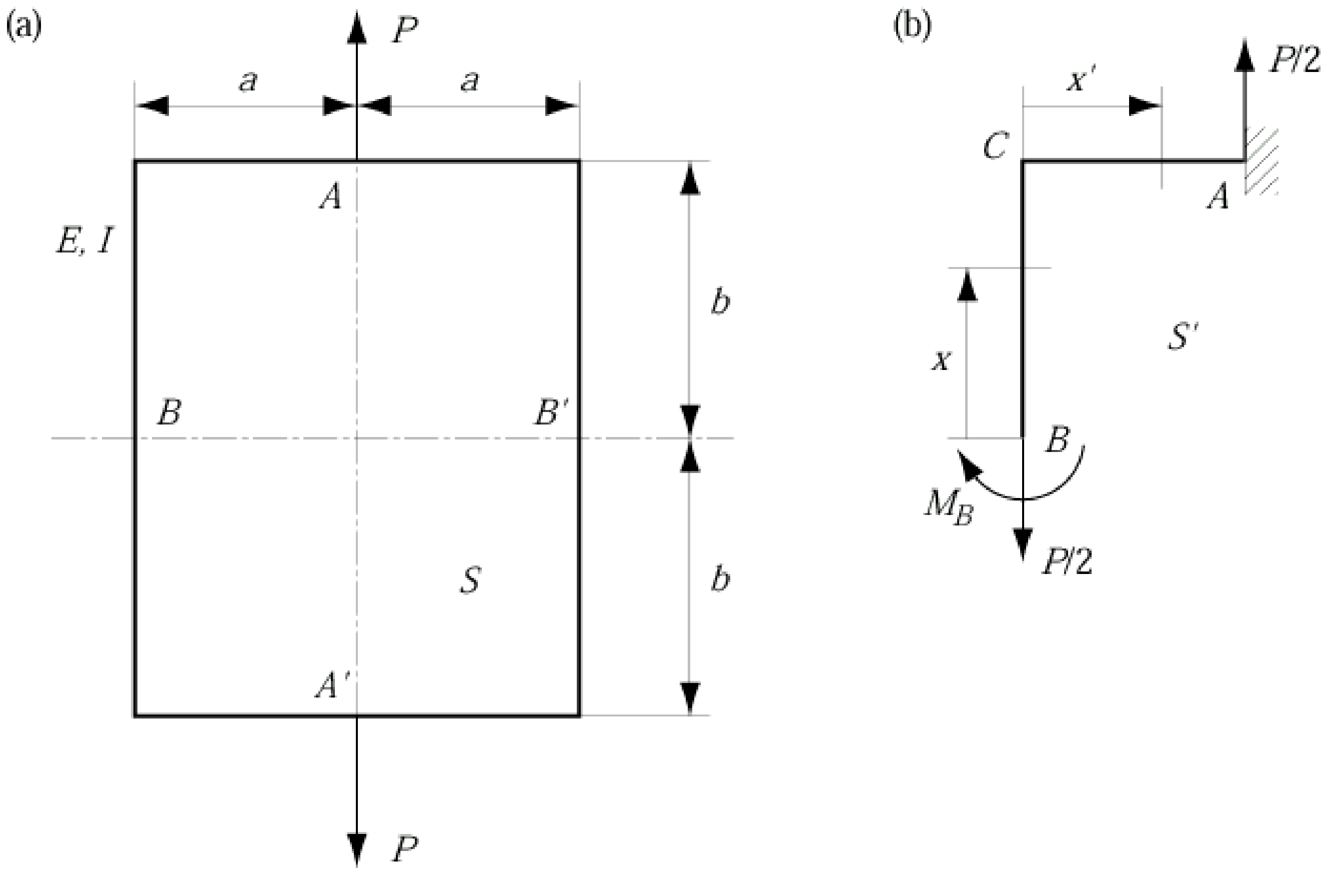
$$H_A = H_C = \frac{M_0}{R}\frac{8-2\pi}{3\pi^2-16}$$

$$V_A = V_C = \frac{M_0}{R}\frac{\pi^2+2\pi-8}{3\pi^2-16}$$

$$M_A = M_0\frac{4\pi-\pi^2}{3\pi^2-16}$$

App4 : Portique

Par le théorème de Menabrea, trouver le moment hyperstatique intérieur au point *B* du cadre, puis calculer le déplacement relatif des points *A* et *A'*. *On ne considérera que l'énergie de flexion.*

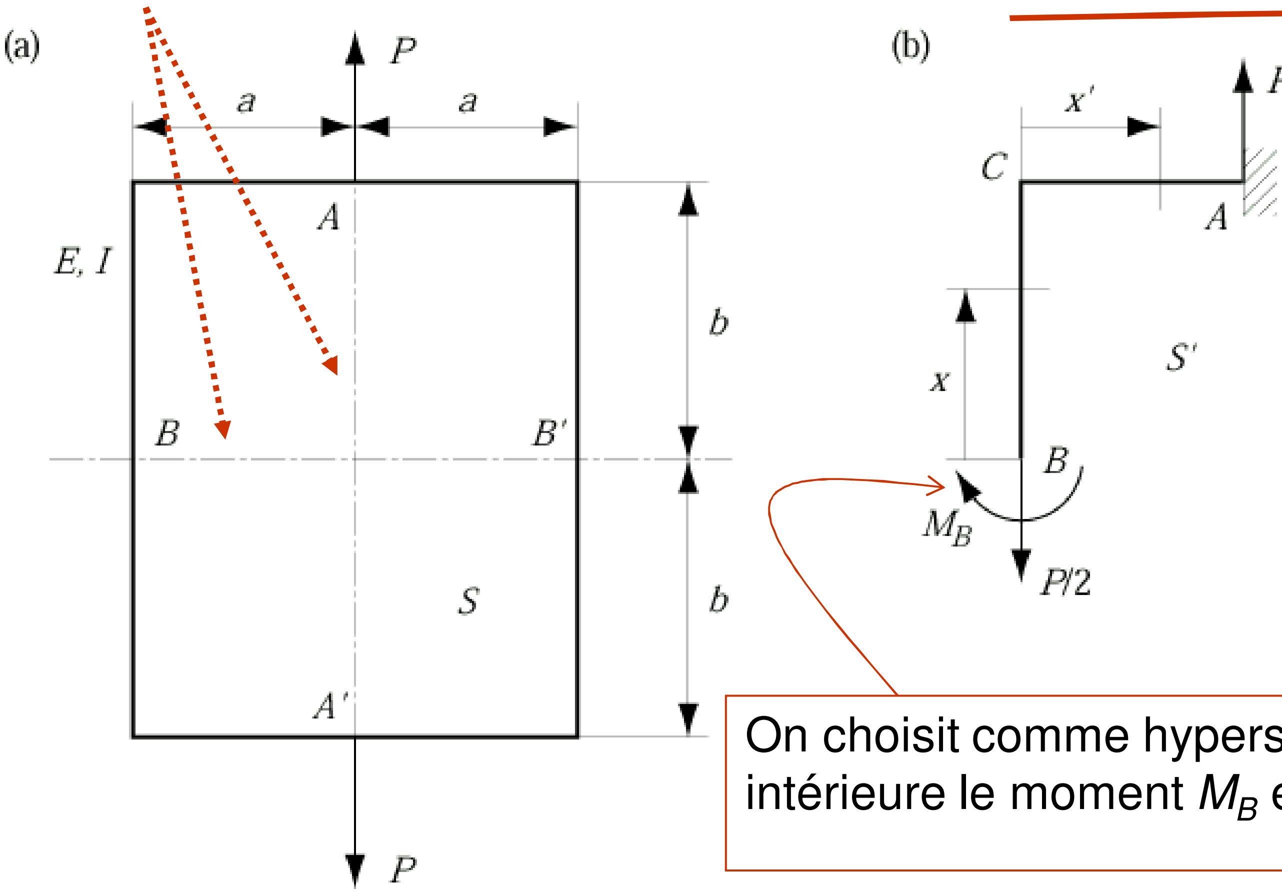


App4 : Portique

Le système est plan, mais possède deux axes de symétrie, de sorte que son degré d'hyperstatique intérieure est ramené à

$$k = 3 - 2 = 1.$$

La double symétrie permet de ne considérer que le quart du cadre.



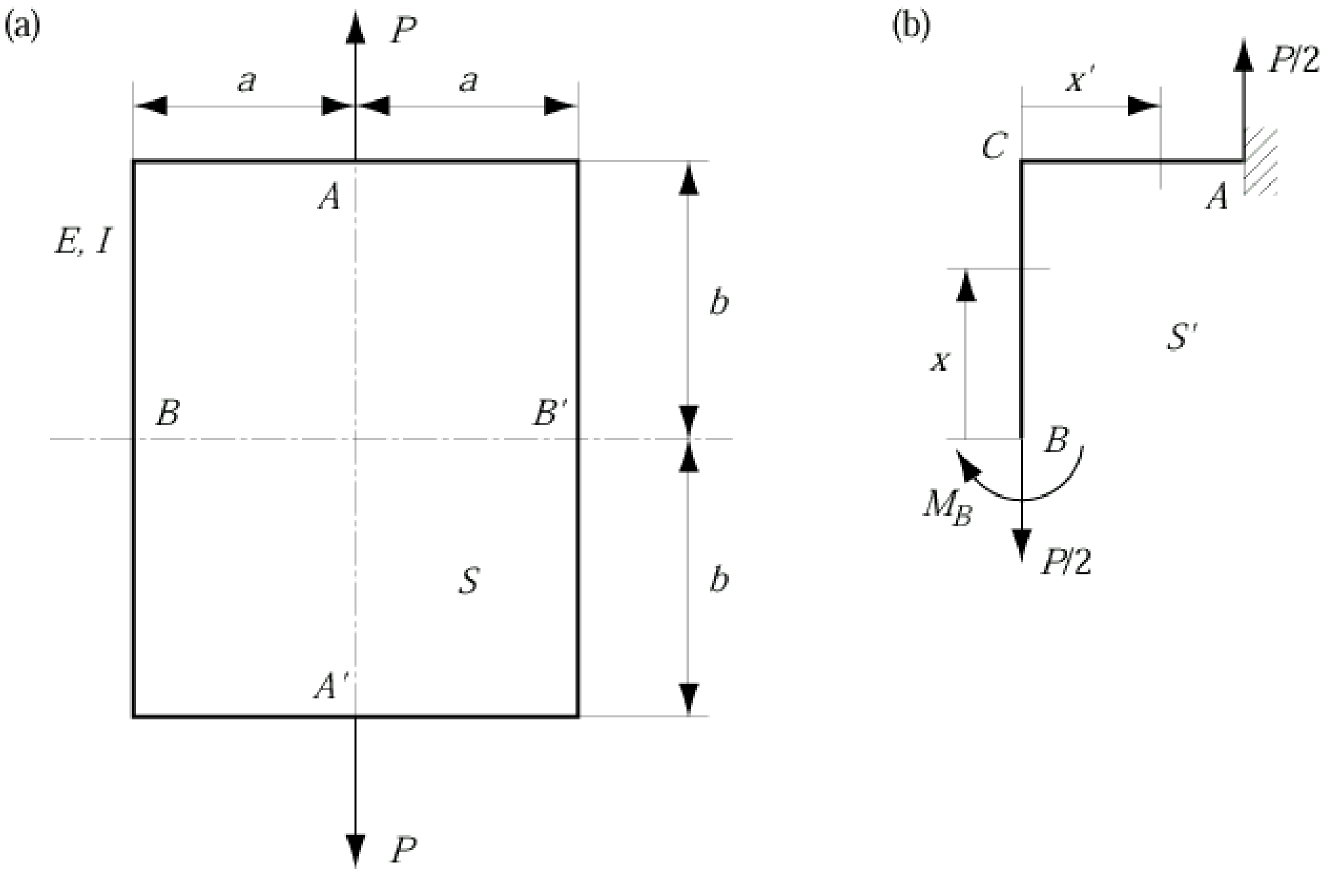
$$\frac{\partial U}{\partial M_B} = 0$$

On choisit comme hyperstatique intérieure le moment M_B en B

App4 : Portique

Pour l 'énergie de déformation on recourt à l'expression
(seule l'énergie de flexion est prise en compte)

$$U = \int_0^{\ell} \frac{M_f^2}{2EI} dx$$

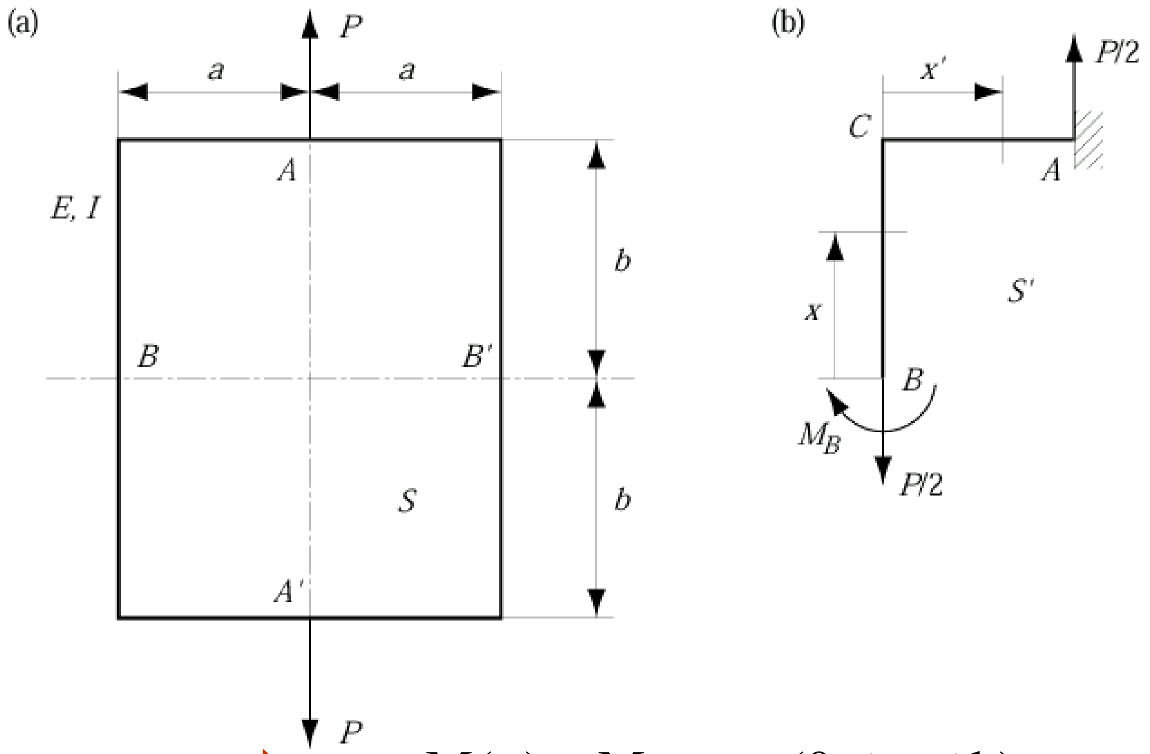


$$0 = \frac{4}{EI} \int_B^A M \frac{\partial M}{\partial M_B} dx$$

$$\delta = \frac{4}{EI} \int_B^A M \frac{\partial M}{\partial P} dx$$

App4 : Portique

moment de flexion et ses dérivées

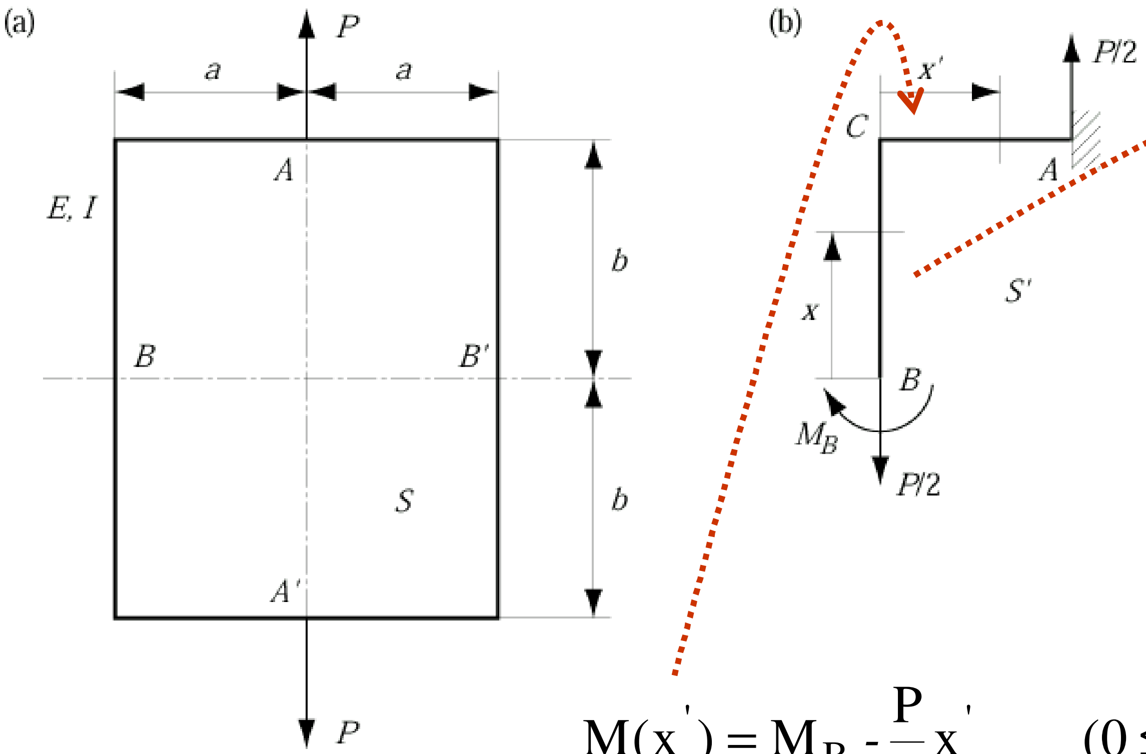


$$M(x) = M_B \qquad (0 \le x \le b) \qquad \frac{\partial M}{\partial M_B} = 1\,, \quad \frac{\partial M}{\partial P} = 0$$

$$M(x') = M_B - \frac{P}{2}x' \qquad (0 \le x' \le a) \qquad \frac{\partial M}{\partial M_B} = 1\,, \quad \frac{\partial M}{\partial P} = -\frac{x'}{2}$$

App4 : Portique

moment de flexion et ses dérivées



$$M(x) = M_B \qquad (0 \leq x \leq b)$$

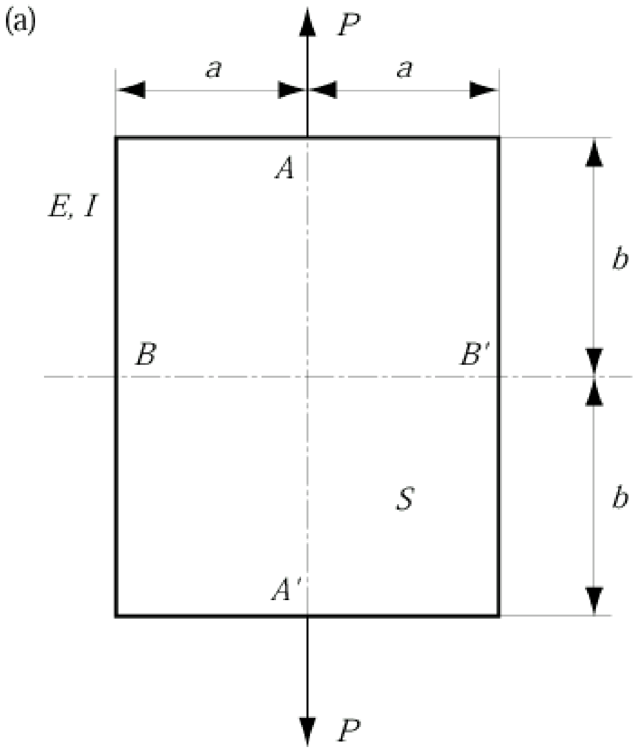
$$\frac{\partial M}{\partial M_B} = 1 \,, \quad \frac{\partial M}{\partial P} = 0$$

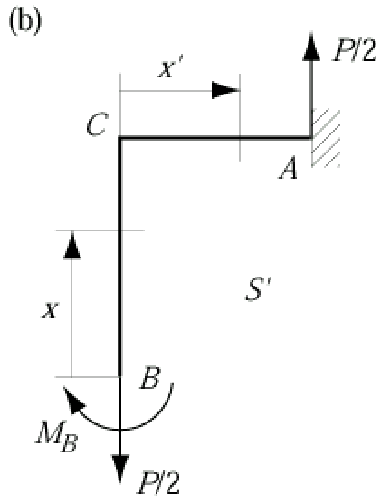
$$M(x') = M_B - \frac{P}{2} x' \qquad (0 \leq x' \leq a)$$

$$\frac{\partial M}{\partial M_B} = 1 \,, \quad \frac{\partial M}{\partial P} = -\frac{x'}{2}$$

App4 : Portique

déformation





$$0=\int_0^b M_B dx+\int_0^a\left(M_B-\frac{P}{2}x'\right)dx'$$

$$=M_B b+\left(M_B a-\frac{Pa^2}{2}\right)$$

$$M_B=\frac{Pa^2}{4(a+b)}$$

$$\delta=-\frac{4}{EI}\int_0^a\left(M_B-\frac{P}{2}x'\right)\frac{x'}{2}dx'$$

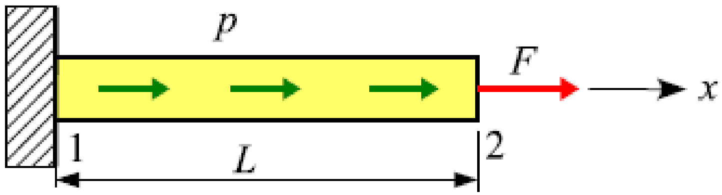
$$\delta=\frac{Pa^3}{12EI}\frac{a+4b}{a+b}$$

Autres Applications

1.Poutre soumise à un effort normal

1.1 Énoncé

La poutre $(1-2)$ de longueur L, de section droite constante est encastrée en 1. Soient A l'aire de la section droite et E le module d'Young du matériau.



La poutre porte en 2 une force de composantes $(F, 0, 0)$ et sur toute sa longueur, une force uniformément répartie d'intensité linéique p.

1. Calculer le déplacement du nœud 2.
2. Calculer le déplacement de la section d'abscisse x.

1.2 Solution

1. L'énergie de déformation est égale à :

$$E_{def} = \int_0^L \frac{N^2}{2\,EA}\,dx \quad \text{avec} \quad N(x) = F + p\,(L - x)$$

Le déplacement horizontal du point 2 est donné par le théorème de Castigliano :

$$u_2 \models \frac{\partial E_{def}}{\partial F}$$

2. Introduisons une force auxiliaire Q dans la section d'abscisse x :

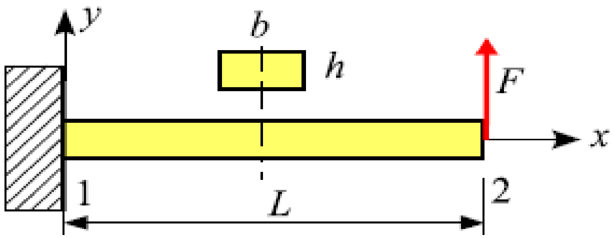
$$E_{def} = \int_0^L \frac{N^2}{2\,EA}\,ds \quad \text{avec} \quad \begin{cases} N(s) = F + p\,(L - s) + Q & \text{si } 0 \leq s < x \\ N(s) = F + p\,(L - s) & \text{si } x < s \leq L \end{cases}$$

$$u(x) = \left.\frac{\partial E_{def}(Q)}{\partial Q}\right|_{Q=0}$$

2 Poutre console sollicitée en flexion simple : influence de l'effort tranchant

2.1 Énoncé

La poutre $(1-2)$ de longueur L et de section droite constante est encastrée en 1.



Soient A , I_z et k_y les caractéristiques de la section droite.

E et ν sont respectivement le module d'Young et le coefficient de Poisson du matériau.

Elle porte en 2 une force de composantes $(0, F, 0)$.

1. Calculer la flèche en 2.
2. La section droite est rectangulaire :

$$A = b\,h \quad , \quad I_z = \frac{b\,h^3}{12} \quad , \quad k_y = \frac{10\,(1+\nu)}{12+11\,\nu}$$

   Étudier l'influence de l'effort tranchant en fonction de $\dfrac{L}{h}$ pour plusieurs valeurs du coefficient de Poisson.

2.2 Solution

L'énergie de déformation est égale à :

$$E_{def} = \int_0^L dE_{def} = E_{def}(T_y) + E_{def}(Mf_z)$$

avec :

$$E_{def}(T_y) = \int_0^L \frac{T_y^2}{2\,GAk_y}\,dx \quad , \quad T_y = F$$

$$E_{def}(Mf_z) = \int_0^L \frac{Mf_z^2}{2\,EI_z}\,dx \quad , \quad Mf_z = F\,(L - x)$$

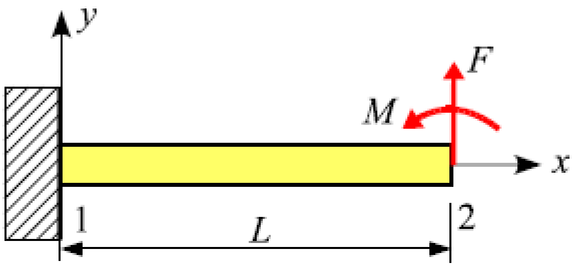
Le déplacement suivant y du nœud 2 est donné par le théorème de Castigliano :

$$v_2 = \frac{\partial E_{def}}{\partial F} = v_2(T_y) + v_2(Mf_z)$$

3 Poutre console sollicitée en flexion simple : matrice de rigidité

3.1 Énoncé

Soit la poutre $(1-2)$ de longueur L et de section droite constante. Soient A et I_z les caractéristiques de la section droite. E et ν sont respectivement le module d'Young et le coefficient de Poisson du matériau.



La poutre est encastrée en 1.

Elle porte en 2 une force de composantes $(0, F, 0)$ et un couple de composantes $(0, 0, M)$.

1. Calculer les déplacements du nœud 2.
2. En déduire l'expression de la matrice de souplesse et de la matrice de rigidité de la structure.

3.2 Solution

Les efforts dans la section d'abscisse x sont :

$$T_y(x) = F$$

$$Mf_z(x) = M + F\,(L - x)$$

Les déplacements du nœud 2 sont donnés par le théorème de Castigliano :

$$v_2 = \frac{\partial E_{def}}{\partial F} \quad , \quad \theta_{z2} = \frac{\partial E_{def}}{\partial M}$$

avec

$$E_{def} = \int_0^L dE_{def} \quad , \quad dE_{def} = \frac{T_y^2}{2\,GA\,k_y}\,dx + \frac{Mf_z^2}{2\,EI_z}\,dx$$

On en déduit :

$$\begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_{z2} \end{Bmatrix} = [C] \begin{Bmatrix} F \\ M \end{Bmatrix}$$

où $[C]$ est la matrice de souplesse,

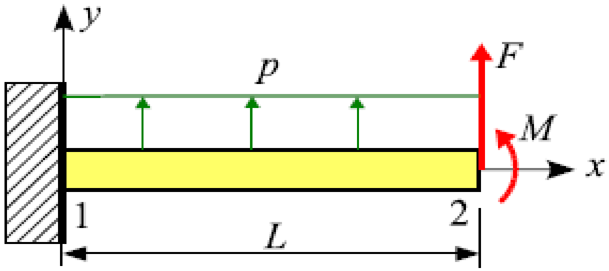
$$\begin{Bmatrix} F \\ M \end{Bmatrix} = [K] \begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_{z2} \end{Bmatrix}$$

où $[K] = [C]^{-1}$ est la matrice de rigidité.

4 Poutre console sollicitée en flexion simple

4.1 Énoncé

Soit la poutre $(1-2)$ de longueur L et de section droite constante. Soient A et I_z les caractéristiques de la section droite. E et ν sont respectivement le module d'Young et le coefficient de Poisson du matériau.



La poutre est encastrée en 1.

Elle porte sur toute sa longueur une force uniformément répartie dont l'intensité linéique est $(0, p, 0)$.

1. Calculer les déplacements du nœud 2.
2. La section droite est rectangulaire :

$$A = b\,h \quad , \quad I_z = \frac{b\,h^3}{12} \quad , \quad k_y = \frac{10\,(1+\nu)}{12 + 11\,\nu}$$

   Étudier l'influence de l'effort tranchant en fonction de $\dfrac{L}{h}$ pour plusieurs valeurs du coefficient de Poisson.

4.2 Solution

Introduisons en 2 une force et un couple auxiliaires F et M.

Les efforts dans la section d'abscisse x sont :

$$T_y(x) = F + p\,(L - x)$$

$$Mf_z(x) = M + F\,(L - x) + p\,\frac{(L - x)^2}{2}$$

Les déplacements du nœud 2 sont donnés par le théorème de Castigliano :

$$v_2 = \left.\frac{\partial E_{def}}{\partial F}\right|_{F=0\,,\,M=0} \quad , \quad \theta_{z2} = \left.\frac{\partial E_{def}}{\partial M}\right|_{F=0\,,\,M=0}$$

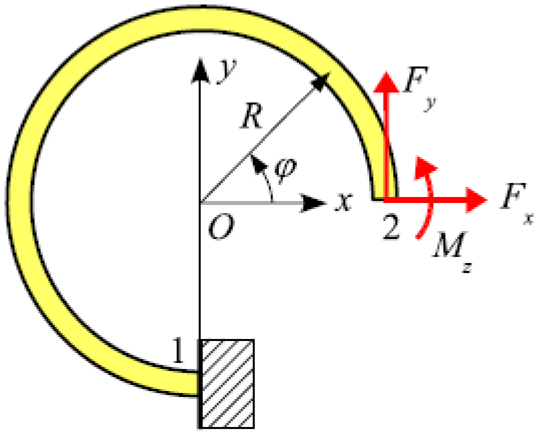
avec

$$E_{def} = \int_0^L dE_{def} \quad , \quad dE_{def} = \frac{T_y^2}{2\,G A k_y}\,dx + \frac{Mf_z^2}{2\,E I_z}\,dx$$

5 Étude d'un arc plan

5.1 Énoncé

L'arc $(1-2)$ de centre O et de rayon moyen R est encastré en 1. Il a une section droite constante. Soient A , I_z et k les caractéristiques de la section droite. E et ν sont respectivement le module d'Young et le coefficient de Poisson du matériau.



L'arc est soumis en 2 à une force horizontale de composantes $(F_x, F_y, 0)$ et à un couple $(0, 0, M_z)$.

Calculer les déplacements du nœud 2.

5.2 Solution

Les efforts dans la section φ sont :

$$N(\varphi) = F_x \sin\varphi - F_y \cos\varphi$$

$$T(\varphi) = F_x \cos\varphi + F_y \sin\varphi$$

$$Mf_z(\varphi) = F_x\, R \sin\varphi + F_y\, R\,(1 - \cos\varphi) + M_z$$

L'énergie de déformation est égale à :

$$E_{def} = \int_0^{3\,\pi/2} dE_{def} \quad \text{avec} \quad dE_{def} = \left(\frac{N^2}{2\,EA} + \frac{T^2}{2\,GA\,k} + \frac{Mf_z^2}{2\,EI_z} \right) R\, d\varphi$$

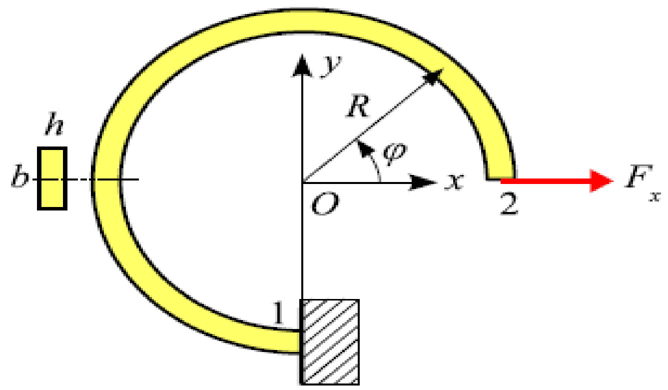
Les déplacements du nœud 2 sont donnés par le théorème de Castigliano :

$$u_2 = \frac{\partial E_{def}}{\partial F_x} \quad , \quad v_2 = \frac{\partial E_{def}}{\partial F_y} \quad , \quad \theta_{z2} = \frac{\partial E_{def}}{\partial M_z}$$

6 Étude d'un arc plan : influence de l'effort normal et de l'effort tranchant

6.1 Énoncé

L'arc $(1-2)$ de centre O et de rayon moyen R est encastré en 1. Il a une section droite constante. Soient A , I_z et k les caractéristiques de la section droite. E et ν sont respectivement le module d'Young et le coefficient de Poisson du matériau.



L'arc est soumis en 2 à une force horizontale de composantes $(F_x, 0, 0)$.

1. Calculer le déplacement horizontal du nœud 2.
2. La section droite est rectangulaire :

$$A = b\,h \quad , \quad I_z = \frac{b\,h^3}{12} \quad , \quad k = \frac{10\,(1+\nu)}{12+11\,\nu}$$

   Étudier l'influence de l'effort tranchant en fonction de $\dfrac{R}{h}$ pour plusieurs valeurs du coefficient de Poisson.
3. Étudier l'influence de l'effort tranchant et de l'effort normal en fonction de $\dfrac{R}{h}$ pour $\nu = 0.25$

6.2 Solution

Les efforts dans la section φ sont :

$$N(\varphi) = F_x \sin\varphi \quad , \quad T(\varphi) = F_x \cos\varphi \quad , \quad Mf_z(\varphi) = F_x \, R \sin\varphi$$

L'énergie de déformation est égale à :

$$E_{def} = \int_0^{3\pi/2} dE_{def} \quad \text{avec} \quad dE_{def} = \left(\frac{N^2}{2\,EA} + \frac{T^2}{2\,GA\,k} + \frac{Mf_z^2}{2\,EI_z} \right) R \, d\varphi$$

Le déplacement horizontal du nœud 2 est donné par le théorème de Castigliano :

$$u_2 = \frac{\partial E_{def}}{\partial F_x}$$

Chap. 3:
MÉTHODE DE FORCES

Méthode des forces

Démarche

Introduction

La méthode des forces est basée sur le théorème de Castigliano et s'applique aux structures hyperstatiques lorsque les liaisons sont rigides et parfaites.

On obtient un système d'équations dont la dimension est le degré d'hyperstatique du problème étudié.

Démarche de la méthode des forces :

- Déterminer le degré d'hyperstaticité $d = n$
- Ecrire les n équations canoniques.
- Choisir le système de base (système isostatique le plus simple)
- Tracer le diagramme des moments fléchissants M_0 du système isostatique due aux charges extérieures ($X_1 = X_2 = \cdots = X_n = 0$)
- Tracer les diagrammes ou épures unitaires m_i ($i = 1, \dots, n$) correspondant au système isostatique sans charges extérieures et avec X_i=1 et les autres inconnus nuls.
- On calcul tous les coefficients δ_{ij} et δ_{i0} à l'aide des diagrammes.

Récapitulatif de la méthode

Démarche de la méthode des forces :

- Résolution du système d'équations canoniques

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \cdots + \delta_{1n}X_n + \delta_{10} = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \cdots + \delta_{2n}X_n + \delta_{20} = 0 \\ \qquad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots . \\ \qquad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots . \\ \qquad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots . \\ \delta_{n1}X_1 + \delta_{n2}X_2 + \cdots + \delta_{nn}X_n + \delta_{n0} = 0 \end{cases}$$

- Correction des épures unitaires $m_i^* = m_i X_i \ (i = 1, \ldots, n)$.
  $m_1^* = m_1 X_1 \ ; \ m_2^* = m_2 X_2 \ ; \ \ldots . \ ; \ m_n^* = m_n X_n$
- On fait la somme des épures unitaires corrigées $\sum m_i^* = m_1^* + m_2^* + \cdots + m_n^*$
- En dernier, on obtient le diagramme des moments fléchissants final du système hyperstatique réel en faisant la somme des moments suivants
  $M_{final} = M_0 + \sum m_i^*$

Décomposition du problème :

Soit une structure hyperstatique d'ordre N, sollicitée par un chargement extérieur.

Le problème hyperstatique, noté Pb, peut se décomposer en :

1. Un problème isostatique obtenu à partir du problème initial, en enlevant les liaisons qui rendent le problème hyperstatique et en conservant le chargement extérieur. Ce problème sera noté : Pb_0

2. N problèmes correspondant aux inconnues hyperstatiques X_i $(i = 1; n)$ obtenus à partir du problème isostatique chargé uniquement avec les inconnues hyperstatiques. Ces problèmes seront notés Pb_i $(i = 1; n)$. Les X_i peuvent être des forces ou des moments.

Décomposition du problème :

On peut noter :

$$Pb = Pb_0 + \sum_{i=1}^{n} Pb_i$$

ou encore

$$Pb = Pb_0 + \sum_{i=1}^{n} X_i \overline{Pb_i}$$

où le problème $\overline{Pb_i}$ est le problème correspondant au Pb_i mais avec une charge (ou un moment) unitaire.

Pour toute variable Δ, on notera Δ_0 la valeur de cette variable dans le problème Pb_0 et $\overline{\Delta_i}$, sa valeur dans le problème $\overline{Pb_i}$ et on a donc :

$$\Delta = \Delta_0 + \sum_{i=1}^{n} X_i \overline{\Delta_i}$$

Δ peut être une réaction d'appui, un moment fléchissant, etc ...

Calcul de l'énergie interne :

L'expression de l'énergie interne peut être plus ou moins complexe en fonction de la dimension de l'espace et des hypothèses sur l'énergie.

Cas général : **On ne néglige pas l'énergie due à l'effort normal ni à l'effort tranchant, on se place dans l'espace à 3 dimensions :**

$$W_e = \frac{1}{2}\int_{\Gamma}\left(\frac{N^2}{EA} + \frac{V_y^2}{GA'_y} + \frac{V_z^2}{GA'_z} + \frac{M_x^2}{GI_0} + \frac{M_y^2}{EI_{Gy}} + \frac{M_z^2}{EI_{Gz}}\right) ds$$

où s désigne l'abscisse curviligne de la poutre.

Cas bidimensionnel : **On se place dans un espace à 2 dimensions mais on ne négligé aucune énergie.**

$$W_e = \frac{1}{2}\int_{\Gamma}\left(\frac{N^2}{EA} + \frac{V_y^2}{GA'_y} + \frac{M_z^2}{EI_{Gz}}\right) ds$$

Cas bidimensionnel à flexion dominante : **On néglige les énergies dues aux efforts tranchant et normal, seul le terme en moment fléchissant subsiste.**

$$W_e = \frac{1}{2}\int_{\Gamma}\frac{M_z^2}{EI_{Gz}} ds$$

Calcul des inconnues hyperstatiques.

1. Résolution des problèmes associés : Il faut premièrement résoudre le problème isostatique associé ainsi que les problèmes associés à chaque inconnue hyperstatique.

Il faudra notamment, tracer les diagrammes des projections locales du torseur des efforts intérieurs à prendre en compte dans l'énergie.

2. Application du théorème de Castigliano. Si les liaisons sont rigides, alors les déplacements associés à chaque projection des actions hyperstatiques sont nuls.

Suivant les hypothèses faites et la dimension de l'espace considéré, l'énergie est la somme de m termes provenant des types de sollicitations Δj affectés des caractéristiques de raideur λj correspondantes.

Dans le cas général, on a : $m = 6$, $\begin{array}{ll} \Delta_1 = N & \lambda_1 = EA \\ \Delta_2 = V_y & \lambda_2 = GA'_y \\ \Delta_3 = V_z & \lambda_3 = GA'_z \\ \Delta_4 = M_x & \lambda_4 = EI_0 \\ \Delta_5 = M_y & \lambda_5 = EI_{Gy} \\ \Delta_6 = M_z & \lambda_6 = EI_{GZ} \end{array}$

$$W_e = \int_\Gamma \sum_{j=1}^{m} \frac{\Delta_j^2}{2\lambda_j} ds$$

avec

$$\Delta_j = \Delta_{j0} + \sum_{i=1}^{n} X_i \overline{\Delta_{ji}}$$

Les intégrales pouvant être calculées séparément et on peut poser :

$$S_{ik} = \int_{\Gamma} \sum_{j=1}^{m} \frac{\overline{\Delta_{ji}}}{\lambda_j} \overline{\Delta_{jk}} ds$$

et

$$U_k = -\int_{\Gamma} \sum_{j=1}^{m} \frac{\Delta_{j0}\Delta_{jk}}{\lambda_j} ds$$

U_k est homogène à un déplacement si X_k est un effort et à une rotation si X_k est un moment. S_{ik} est une souplesse

on a donc :

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & ...etc... & S_{1n} \\ S_{12} & S_{22} & ...etc... & S_{2n} \\ & & ...etc... & \\ S_{1n} & S_{2n} & ...etc... & S_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ ...etc... \\ X_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ ...etc... \\ U_n \end{bmatrix}$$

TABLE 1. Valeurs de $\int_0^l M_a M_b dx$

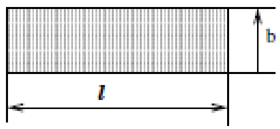
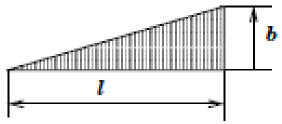
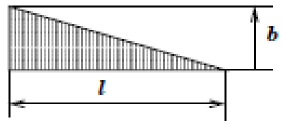
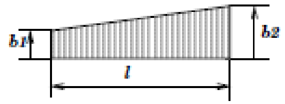
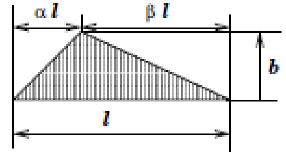
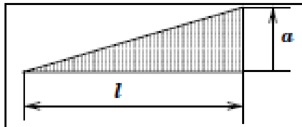
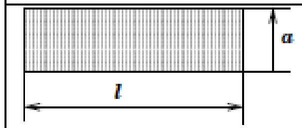
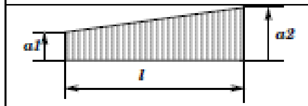
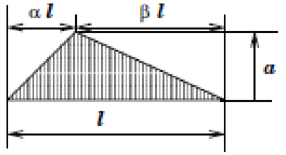
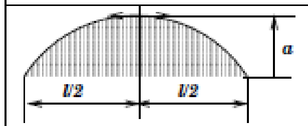
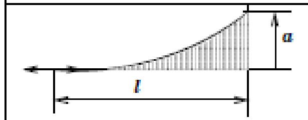
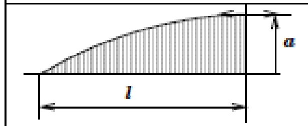
X					
	$\frac{abl}{2}$	$\frac{abl}{3}$	$\frac{abl}{6}$	$\frac{al}{6}(b_1 + 2b_2)$	$\frac{abl}{6}(1+\alpha)$
	abl	$\frac{abl}{2}$	$\frac{abl}{2}$	$\frac{al}{2}(b_1 + b_2)$	$\frac{abl}{2}$
	$\frac{bl}{2}(a_1 + a_2)$	$\frac{bl}{6}(a_1 + 2a_2)$	$\frac{bl}{6}(2a_1 + a_2)$	$\frac{l}{6}\,[2a_1b_1 + a_1b_2 + a_2b_1 + 2a_{2b_2}]$	$\frac{bl}{6}\,[(1+\beta)a_1 + (1+\alpha)a_2]$
	$\frac{abl}{2}$	$\frac{abl}{6}(1+\alpha)$	$\frac{abl}{6}(1+\beta)$	$\frac{al}{6}\,[(1+\beta)b_1 + (1+\alpha)b_2]$	$\frac{abl}{3}$
	$\frac{2abl}{3}$	$\frac{abl}{3}$	$\frac{abl}{3}$	$\frac{al}{3}(b_1 + b_2)$	$\frac{abl}{3}(1+\alpha\beta)$
	$\frac{abl}{3}$	$\frac{abl}{4}$	$\frac{abl}{12}$	$\frac{al}{12}(b_1 + 3b_2)$	$\frac{abl}{12}(1+\alpha+\alpha^2)$
	$\frac{2abl}{3}$	$\frac{5abl}{12}$	$\frac{abl}{4}$	$\frac{al}{12}(3b_1 + 5b_2)$	$\frac{abl}{12}(5-\beta-\beta^2)$

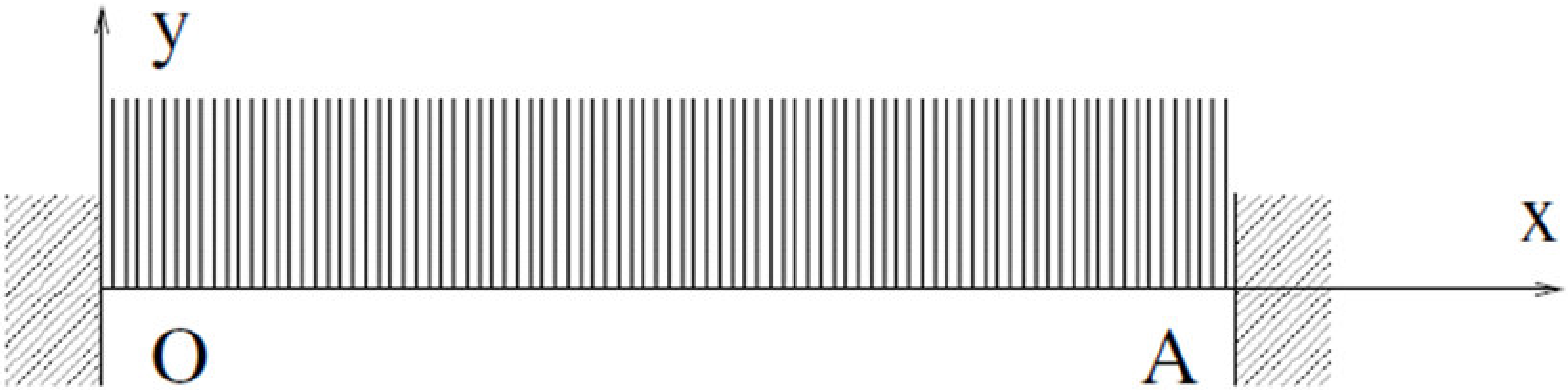
TABLE 1. Valeurs de $\int_0^l M_a M_b dx$

Méthode des forces

Applications

App1: Poutre bi-encastrée

C'est le cas d'une poutre bi-encastrée de longueur L sollicitée par une charge uniformément répartie q. On fera l'hypothèse d'un calcul plan, et on négligera l'énergie due à l'effort tranchant. L = 4m q = -50kN/m. Le problème est hyperstatique d'ordre 3.



1. Décomposition :

Le choix du problème isostatique associé est libre, il est néanmoins conseillé de choisir une décomposition qui facilitera la suite des calculs. Ici on fait le choix de garder un encastrement et de décomposer le second en inconnues hyperstatiques (tableau 1).

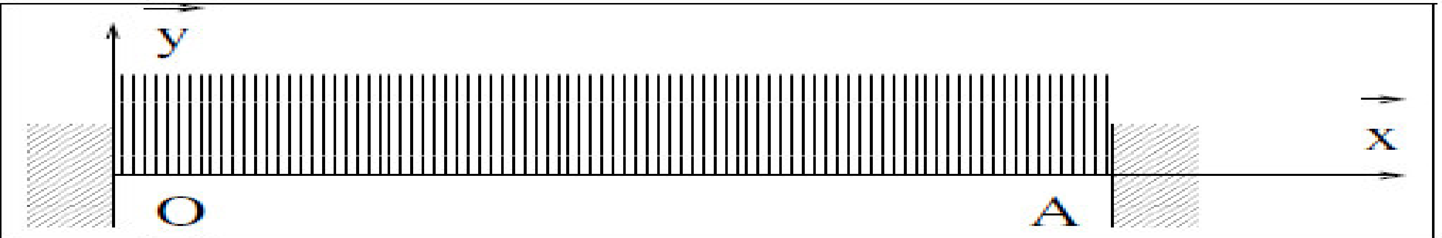
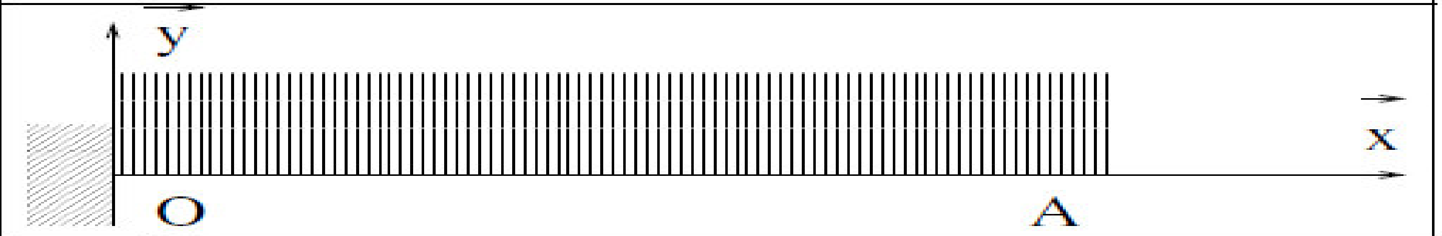
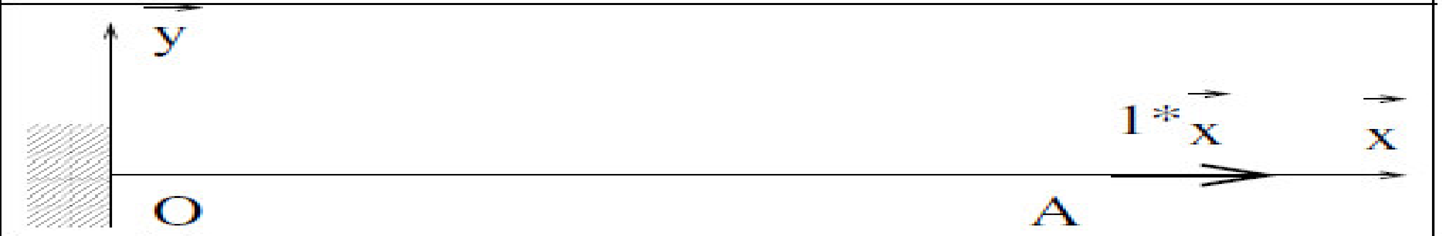
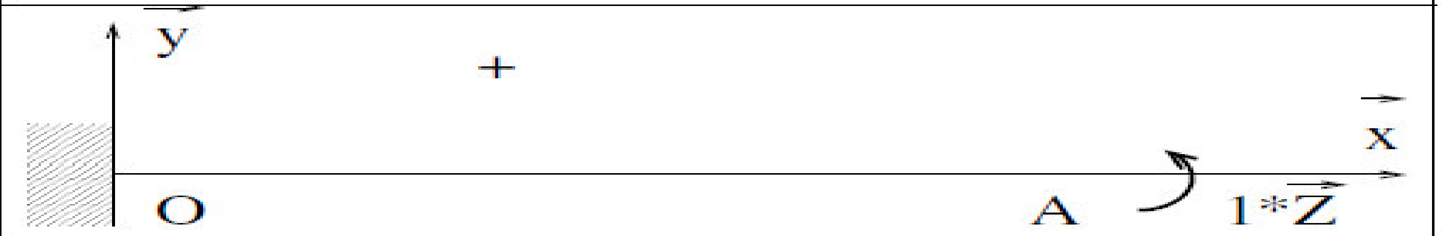
Problème	Représentation
Complet: Pb	
Isostatique Pb_0	
Associé à Xa: $\overline{Pb_1}$	
Associé à Ya: $\overline{Pb_2}$	
Associé à Ma: $\overline{Pb_3}$	

TABLE 1. Exemple de décomposition d'un problème hyperstatique

2. Résolution des problèmes isostatiques :

Les problèmes sont classiques et ne posent aucune difficulté. Comme l'énergie de cisaillement est négligée, il suffit de calculer le moment fléchissant et l'effort normal.

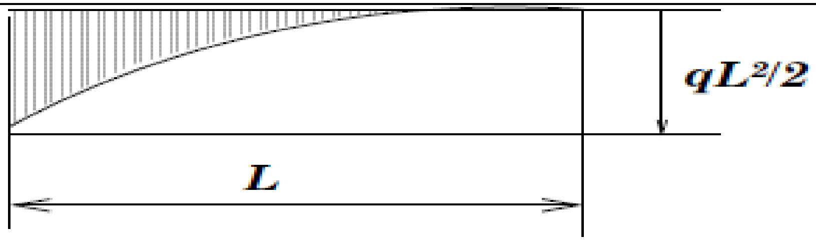
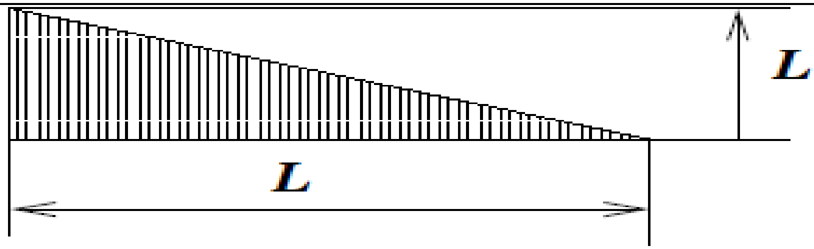
	Moment Fléchissant	Effort Normal
Pb_0	 $M_0 = \frac{q(L-X)^2}{2}$	$N_0 = 0$
$\overline{Pb_1}$	$\overline{M_1} = 0$	 $\overline{N_1} = 1$
$\overline{Pb_2}$	 $\overline{M_2} = L - X$	$\overline{N_2} = 0$
$\overline{Pb_3}$	 $\overline{M_3} = 1$	$\overline{N_3} = 0$

TABLE 2. Calcul des sollicitations.

3. Calcul des intégrales.

EI_{Gz} est constant sur la poutre et peut être sorti de toutes les intégrales qui peuvent être calculées à l'aide du tableau 1

$$\int_\Gamma M_0 \overline{M_1} ds = 0$$
$$\int_\Gamma M_0 \overline{M_2} ds = \frac{qL^4}{8}$$
$$\int_\Gamma M_0 \overline{M_3} ds = \frac{qL^3}{6}$$

$$\int_\Gamma \overline{M_2 M_2} ds = \frac{L^3}{3}$$
$$\int_\Gamma \overline{M_2 M_3} ds = \frac{L^2}{2}$$
$$\int_\Gamma \overline{M_3 M_3} ds = L$$

$$\int_\Gamma \overline{N_1 N_1} ds = L$$

Table 1. Valeurs de $\int_0^l M_a M_b dx$

x			
	$\frac{abl}{2}$	$\frac{abl}{3}$	$\frac{abl}{6}$
	abl	$\frac{abl}{2}$	$\frac{abl}{2}$
	$\frac{bl}{2}(a_1+a_2)$	$\frac{bl}{6}(a_1+2a_2)$	$\frac{bl}{6}(2a_1+a_2)$
	$\frac{abl}{2}$	$\frac{abl}{6}(1+\alpha)$	$\frac{abl}{6}(1+\beta)$
	$\frac{2abl}{3}$	$\frac{abl}{3}$	$\frac{abl}{3}$
	$\frac{abl}{3}$	$\frac{abl}{4}$	$\frac{abl}{12}$
	$\frac{2abl}{3}$	$\frac{5abl}{12}$	$\frac{abl}{4}$

4. Calcul des inconnues hyperstatiques.

Les termes de la matrice de souplesse sont calcules à partir des expressions des moments et des efforts normaux.

$$S_{11} = \frac{1}{EA}\int_{\Gamma} \overline{N_1 N_1} ds + \frac{1}{EI_{Gz}}\int_{\Gamma} \overline{M_1 M_1} ds = \frac{L}{EA}$$

$$S_{22} = \frac{1}{EA}\int_{\Gamma} \overline{N_2 N_2} ds + \frac{1}{EI_{Gz}}\int_{\Gamma} \overline{M_2 M_2} ds = \frac{L^3}{3EI_{Gz}}$$

Les autre termes de la matrice ne comportent que des moments. Comme $N_0 = 0$, le second membre ne comporte que des termes en moment.

Les intégrales peuvent être calculées à l'aide du tableau 1

$$\begin{bmatrix} \frac{L}{EA} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L^3}{3EI_{Gz}} & \frac{L^2}{2EI_{Gz}} \\ 0 & \frac{L^2}{2EI_{Gz}} & \frac{L}{EI_{Gz}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_A \\ Y_A \\ M_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{qL^4}{8EI_{Gz}} \\ -\frac{qL^3}{6EI_{Gz}} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} X_A = 0 \\ (1) : 2L^3Y_A + 3L^2M_A = -\frac{3qL^4}{4} \\ (2) : L^2Y_A + 2LM_A = -\frac{qL^3}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 * (1) - 3L * (2) \rightarrow: L^3Y_A = -\frac{qL^4}{2} \\ 3 * (1) - 2L * (2) \rightarrow: -L^2M_A = -\frac{qL^4}{12} \end{cases} \quad \text{soit :} \begin{cases} Y_A = -\frac{qL}{2} \\ M_A = \frac{qL^2}{12} \end{cases}$$

Solution du problème hyperstatique.

Pour toute variable Δ du problème hyperstatique on a :

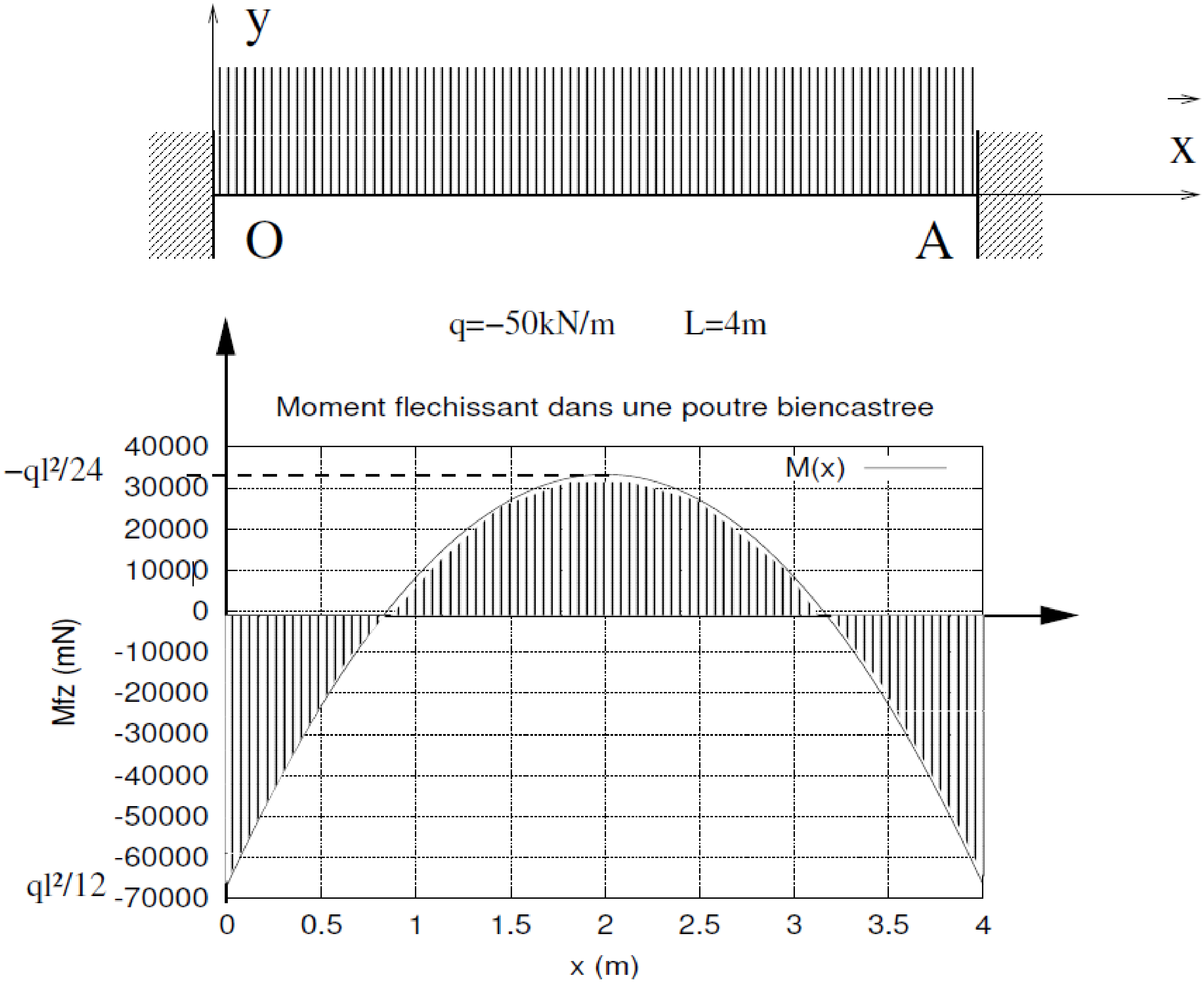
$$\Delta = \Delta_0 + X_A \overline{\Delta_1} + Y_A \overline{\Delta_1} + M_A \overline{\Delta_3}$$

$$N = 0$$

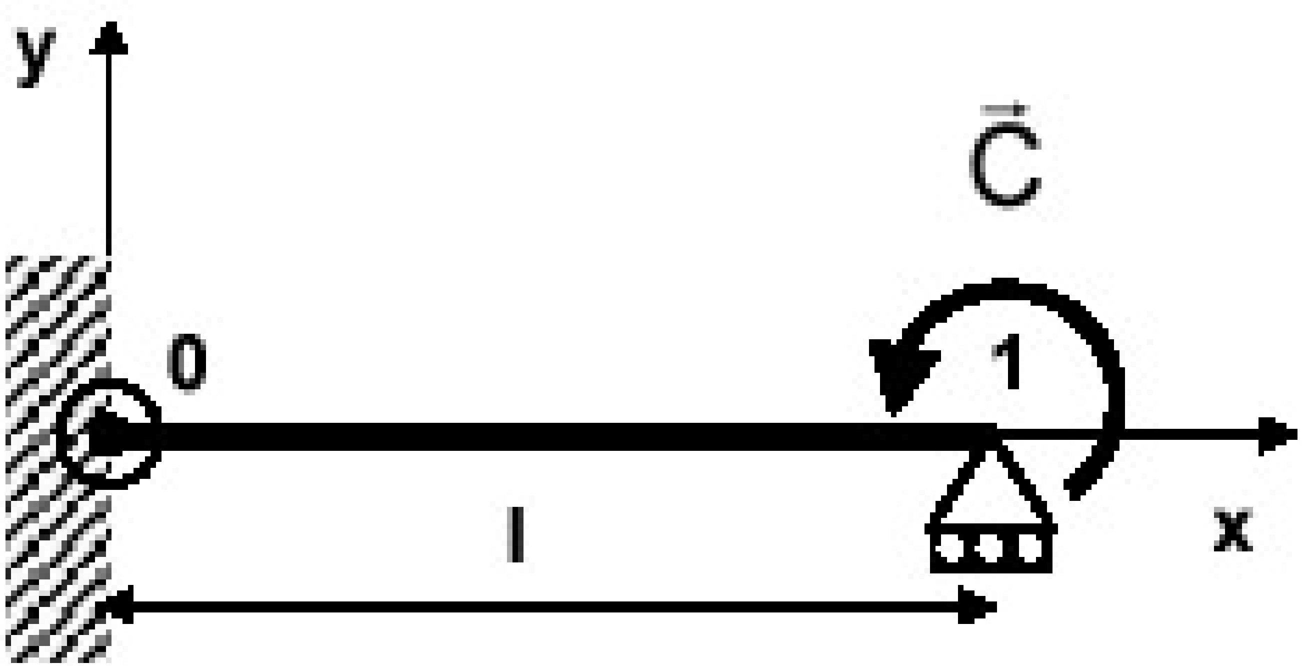
$$M = \frac{q(L-x)}{2}^2 - \frac{qL}{2}(L-x) + \frac{qL^2}{12}$$

$$M = -\frac{qx\,(L-x)}{2} + \frac{qL^2}{12}$$

Figure. moment fléchissant

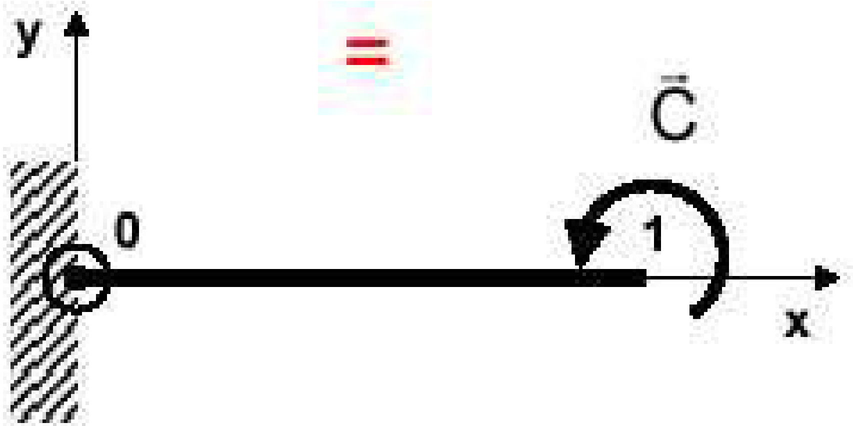


App2: méthode des forces

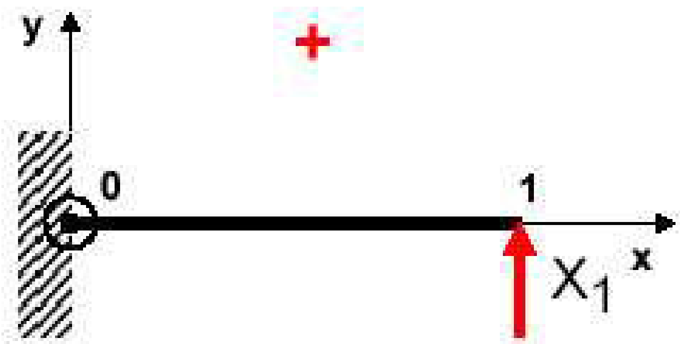


Problème réel (hyperstatique)

Problème isostatique associé : structure soumise à la charge extérieure réelle. Problème
« 0 »



Problème isostatique associé : Structure soumise à l’effort hyperstatique X1. Problème
« 1 »



Condition de la liaison en 1: $\boxed{\Delta_1 = 0}$

$$\boxed{\Delta_1 = \Delta_{10} + \Delta_{11}}$$

Δ_{10} : déplacement en 1 dans le sens de X_1 dû à la charge extérieure réelle (Problème « 0 »

Δ_{11} : déplacement en 1 dans le sens de X_1 dû à la charge X1 (Problème « 1 »).

On peut écrire:

$$\boxed{\Delta_{11} = X_1 \delta_{11}}$$

δ_{11} : déplacement en 1 dans le sens de X_1 dû à la charge unitaire X1=1 (Problème « 1 »).

$$\boxed{X_1 = -\frac{\Delta_{10}}{\delta_{11}}}$$

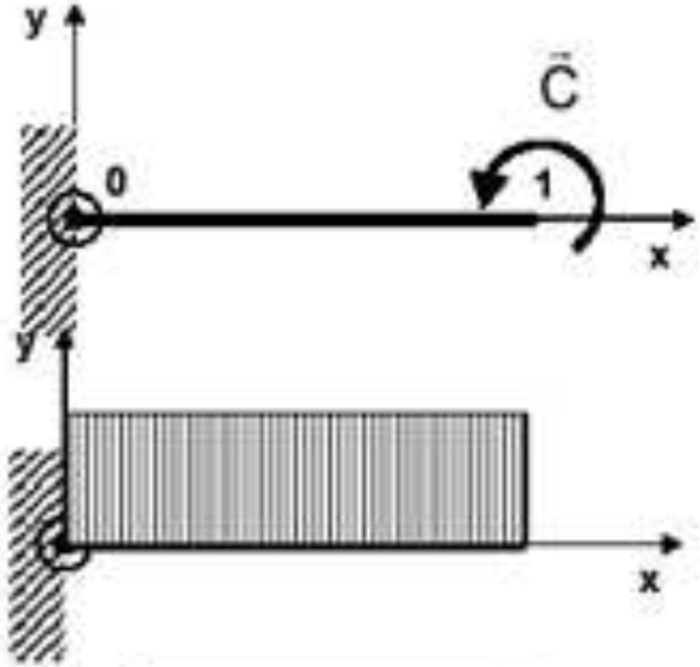
Pour calculer $\boxed{\Delta_{10}}$ et $\boxed{\delta_{11}}$ on peut utiliser le théorème de la charge unitaire.

$$\Delta_{10} = \int_0^l \frac{M_0 M_1}{EI} dx \qquad \delta_{11} = \int_0^l \frac{M_1 M_1}{EI} dx$$

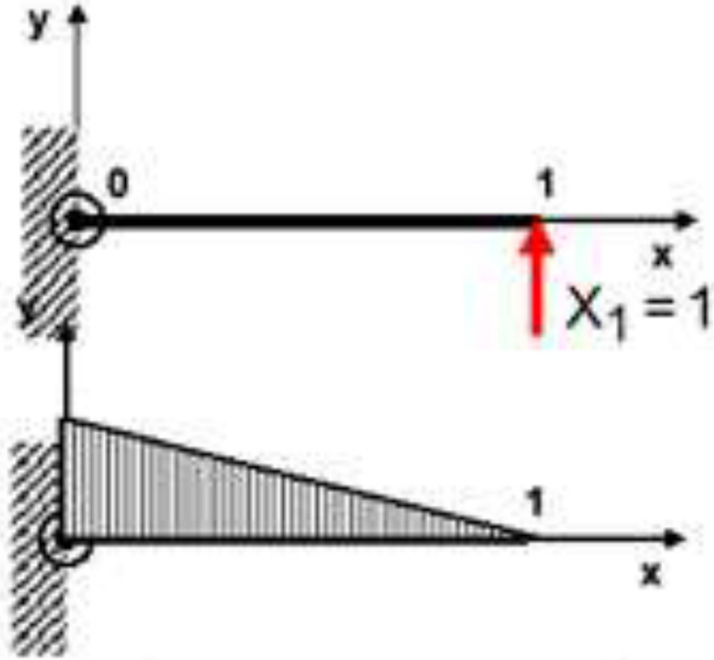
M_0 : Moment fléchissant dû au chargement extérieur (**Problème 0**).

M_1 : Moment fléchissant dû à X_1=1 (**Problème 1**).

M_0 :



M_1 :

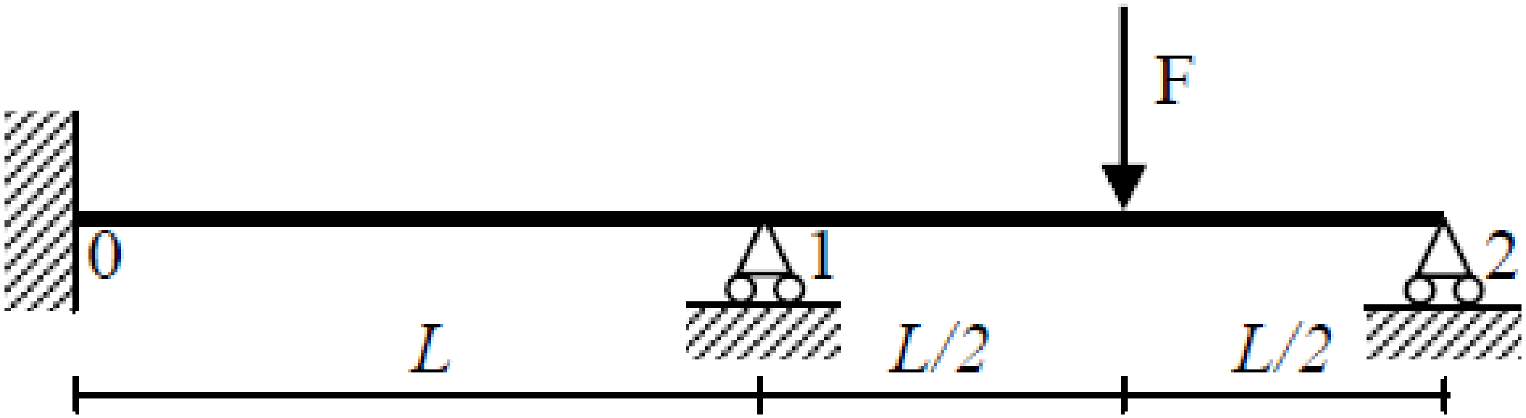


$$\Delta_{10} = \frac{Cl^2}{2EI}$$

$$\delta_{11} = \frac{l^3}{3EI}$$

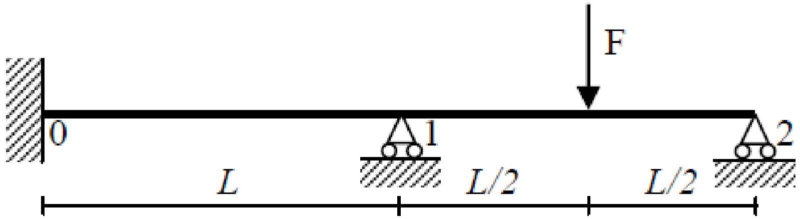
$$X_1 = -\frac{3C}{2l}$$

App3: méthode des forces

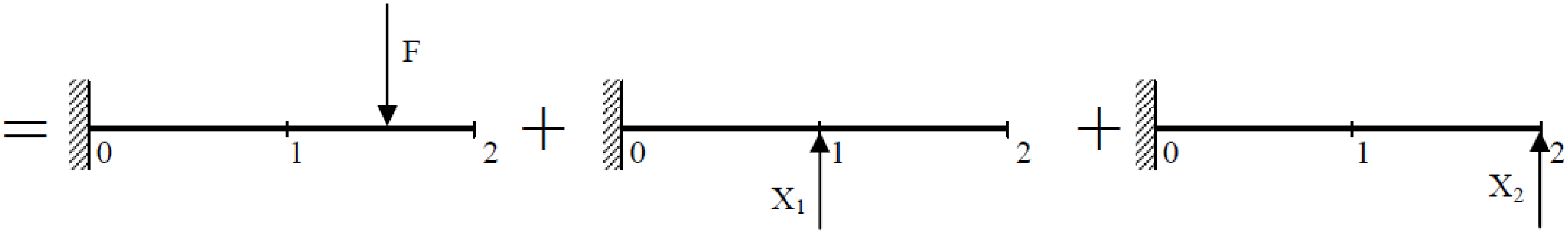


Ce problème est équivalent à la superposition de (h+1) problèmes isostatiques associés à h conditions cinématiques.

Soient X1 et X2 les réactions aux appuis en 1 et 2.



=



problème 0 problème 1 problème 2

Conditions cinématiques

$$\Delta_1 = \Delta_{10} + X_1\delta_{11} + X_2\delta_{12} = 0$$
$$\Delta_2 = \Delta_{20} + X_1\delta_{21} + X_2\delta_{22} = 0$$

Δ_{i0} flèche en i (i=1,2) dans le pb 0

δ_{ij} flèche en i (i=1,2) dans le pb j pour une force X_i=1

Après calculs ou par utilisation d'un formulaire :

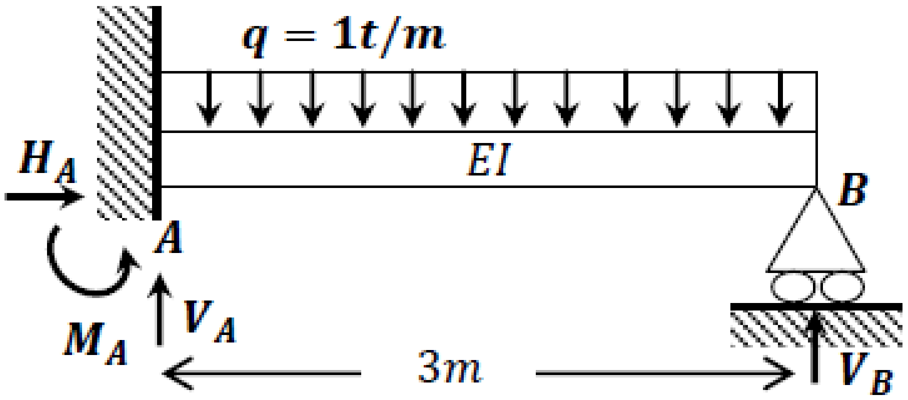
$$\Delta_{10} = \frac{-7FL^3}{12EI}, \quad \Delta_{20} = \frac{-27FL^3}{16EI}, \quad \delta_{11} = \frac{L^3}{3EI}, \quad \delta_{22} = \frac{8L^3}{3EI},$$

$$\delta_{21} = \delta_{12} = \frac{5L^3}{6EI} \text{ d'où} \qquad X_1 = \frac{43}{56}F \text{ et } X_2 = \frac{11}{28}F$$

App4: méthode des forces

On étudie la poutre représentée sur la figure suivante. Celle-ci est encastrée en A, repose sur un appui simple en B et soumise à une charge uniformément répartie sur toute la longueur de la poutre. La rigidité EI est constante.

On demande de tracer le diagramme des moments fléchissants.

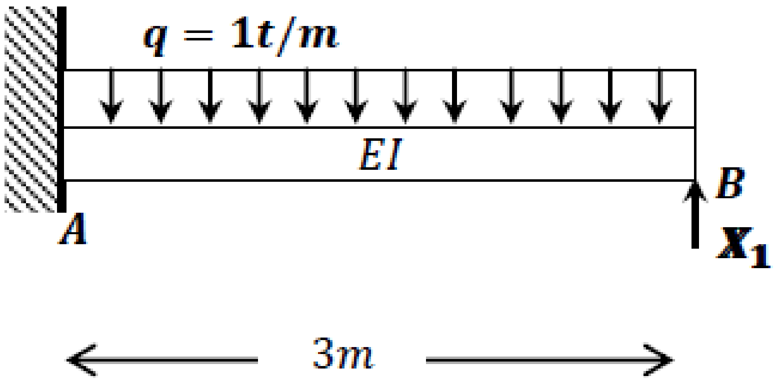


On détermine le degré d'hyperstatique (le nombre d'inconnus) : 1

- On écrit le système d'équations canoniques :

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{10} = 0$$

- Choix du système de base (fondamental)



- On Trace l'épure unitaire (diagramme) (m_1) et celui des charges extérieures (M_0)

- **Etat 0 : Charges extérieures ≠ 0 et $X_1 = 0$**

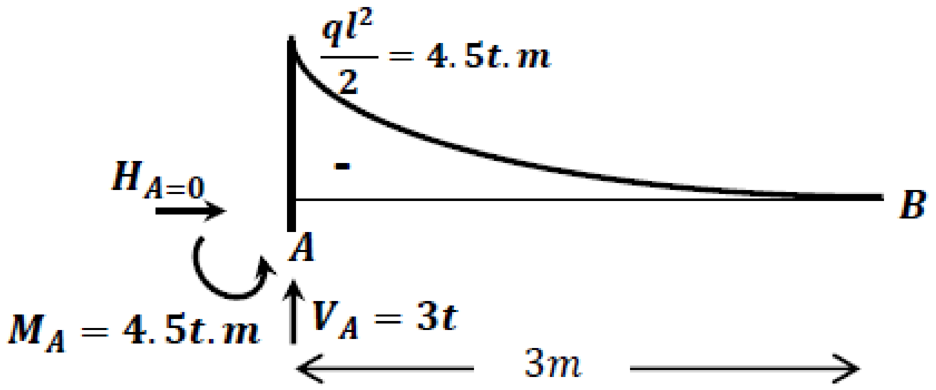


Diagramme M_0

- **Etat 1 : Charges extérieures =0 et $X_1 = 1$**

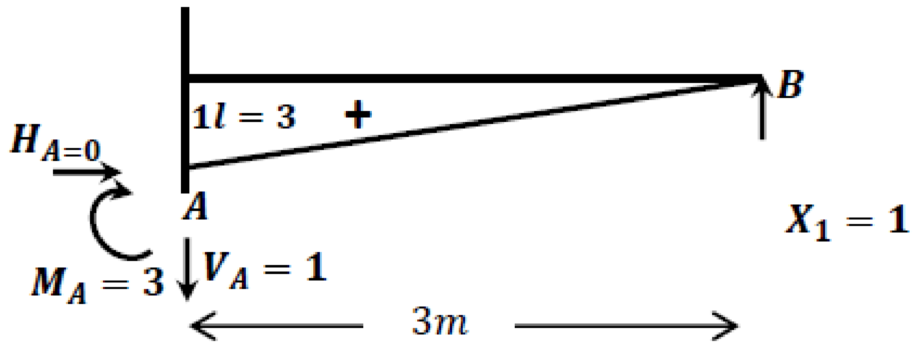


Diagramme m_1

- Calculer les déplacements δ_{ij}.

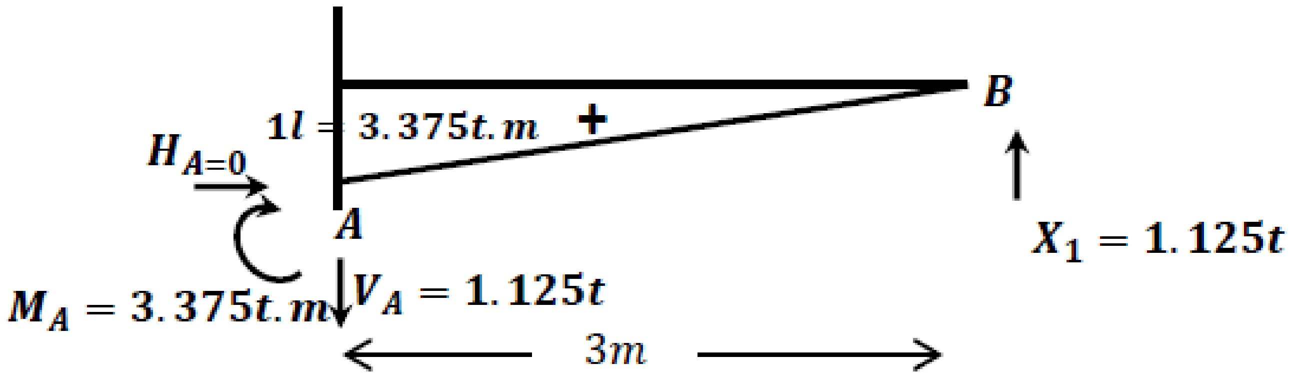
$$\delta_{11} = \frac{l^3}{3EI} = \frac{9}{EI}, \qquad \delta_{10} = -\frac{ql^4}{8EI} = -\frac{10.125}{EI}$$

$$\frac{9}{EI}X_1 - \frac{10.125}{EI} = 0$$

A partir de cette équation, on tire : $X_1 = 1.125t$

- Correction de l'épure unitaire :

Le diagramme corrigé $m_1^* = m_1 X_1$



- On Trace le diagramme final des moments fléchissants de l'état réel par superposition de l'épure unitaire $\boldsymbol{m_1^*}$ avec le diagramme M_0.

$$M_f = M_0 + m_1^*$$

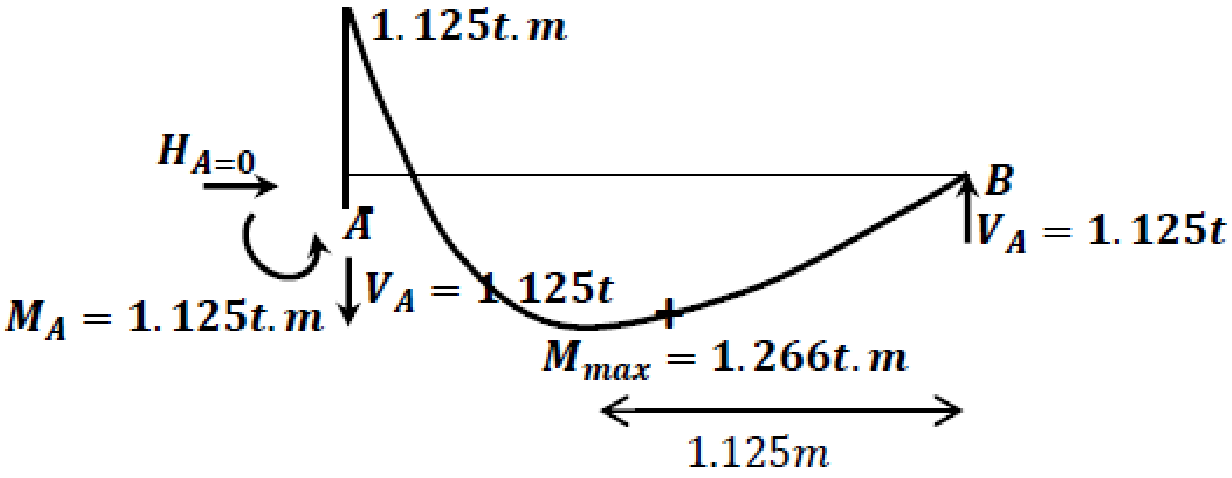
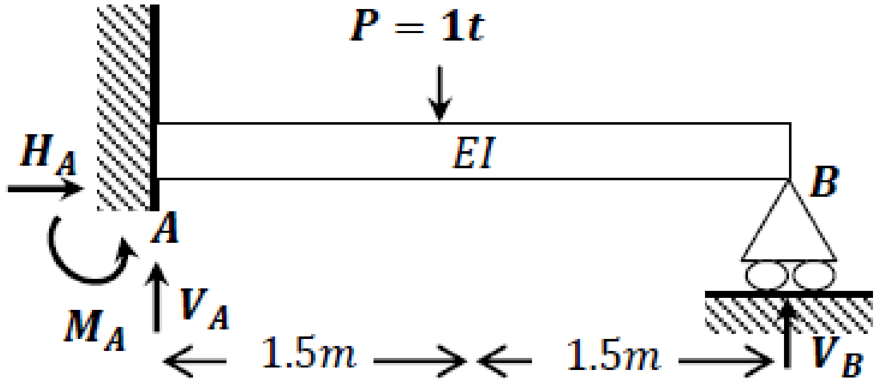


Diagramme M_f

App5: méthode des forces

On étudie la poutre représentée sur la figure suivante. Celle-ci est encastrée en A, repose sur un appui simple en B, est soumise à une charge constante de 1t. EI est constante.

On demande de tracer le diagramme des moments fléchissants et de l'effort tranchant.

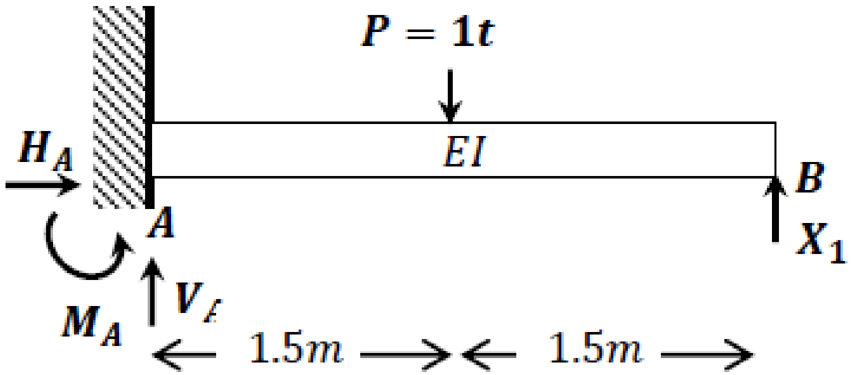


- **On détermine le degré d'hyperstatique (le nombre d'inconnus) : 1**

- On écrit le système d'équations canoniques :

$$\delta_{11}^{u} X_1 + \delta_{10} = 0$$

- Choix du système de base (fondamental)



- On Trace le diagramme unitaire (m_1) et celui des charges extérieures (M_0)

- **Etat 0 : Charges extérieures $\neq 0$ et $X_1 = 0$**

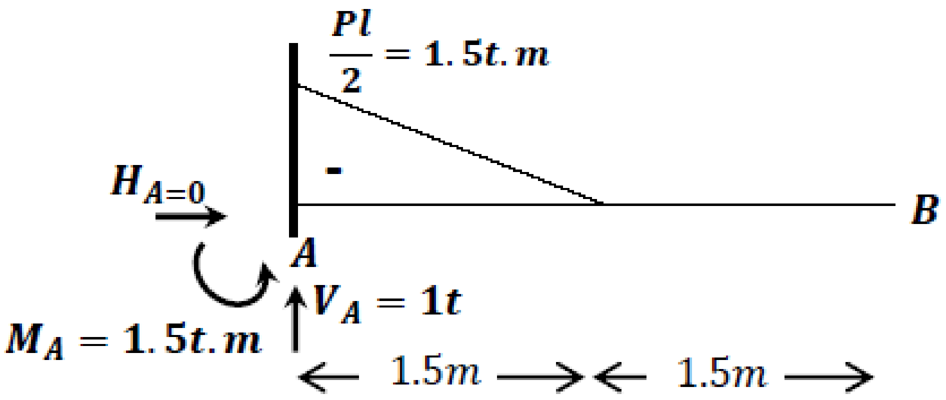


Diagramme M_0

- **Etat 1 : Charges extérieures =0 et $X_1 = 1$**

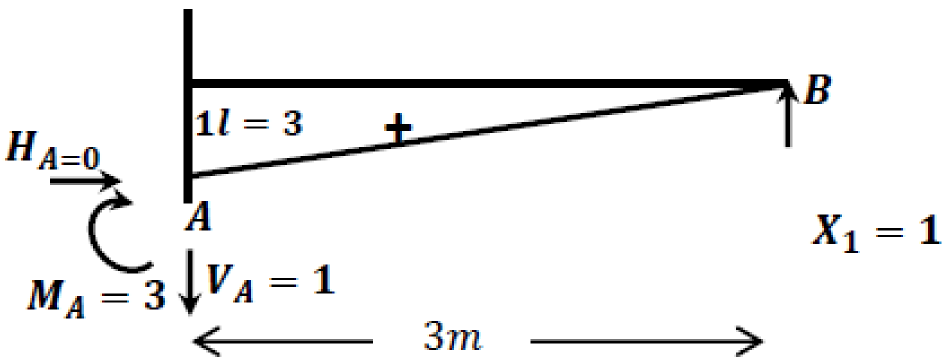


Diagramme m_1

- Calculer les déplacements δ_{ij}.

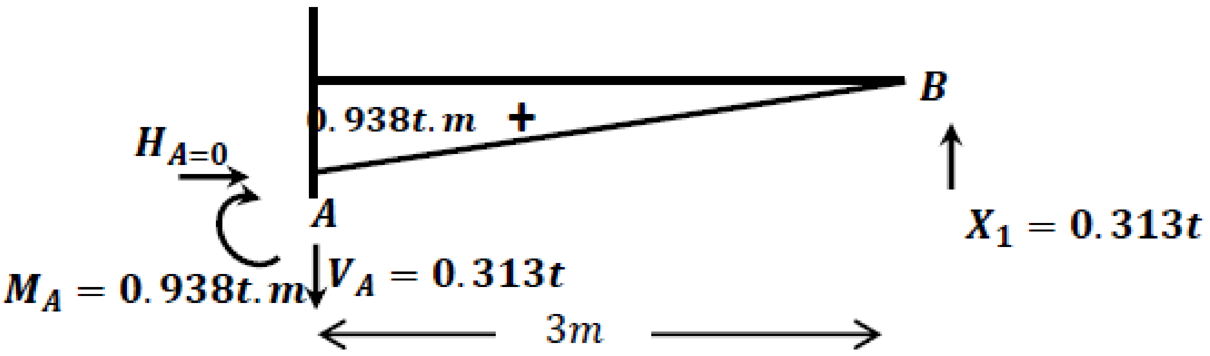
$$\delta_{11}=\frac{l^3}{3EI}=\frac{9}{EI},\qquad \delta_{10}=-\frac{5Pl^3}{48EI}=-\frac{2.813}{EI}$$

$$\frac{9}{EI}X_1-\frac{2.813}{EI}=0$$

A partir de cette équation, on tire : $X_1=0.313t$

- Correction de diagramme unitaire :

Le diagramme corrigé $m_1 *= m_1X_1$



- On Trace le diagramme final des moments fléchissants :

$$M_f = M_0 + m_1^*$$

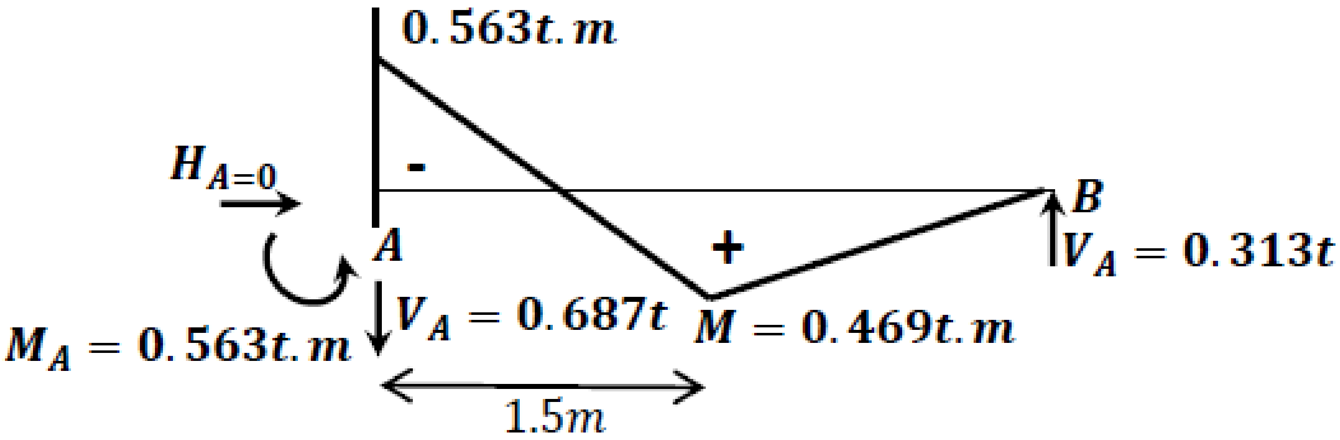
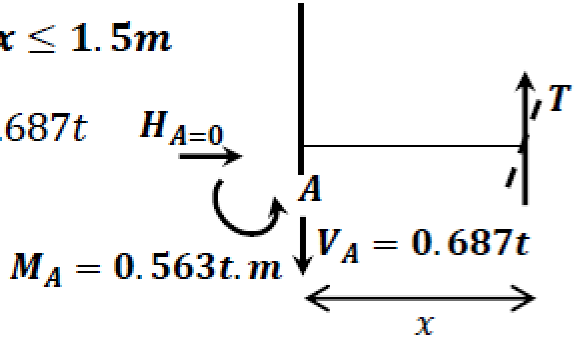


Diagramme des M_f

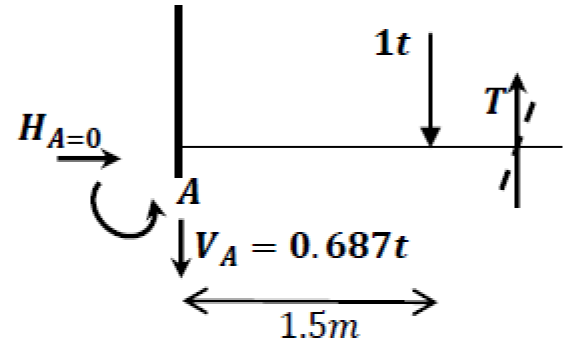
Section 1-1 $\mathbf{0 \leq x \leq 1.5m}$

$\sum F_V = 0 \Rightarrow T = 0.687t$



Section 1-1 $\mathbf{1.5 \leq x \leq 3m}$

$\sum F_V = 0 \Rightarrow T = 0.687 - 1 = 0.313t$



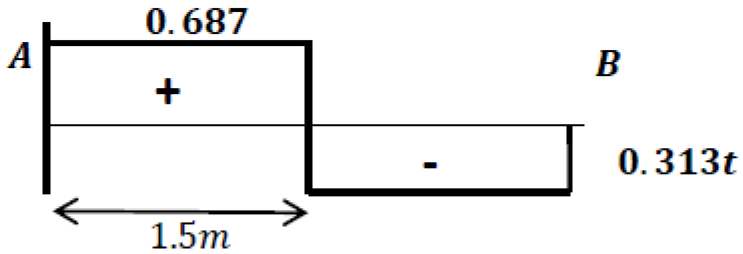
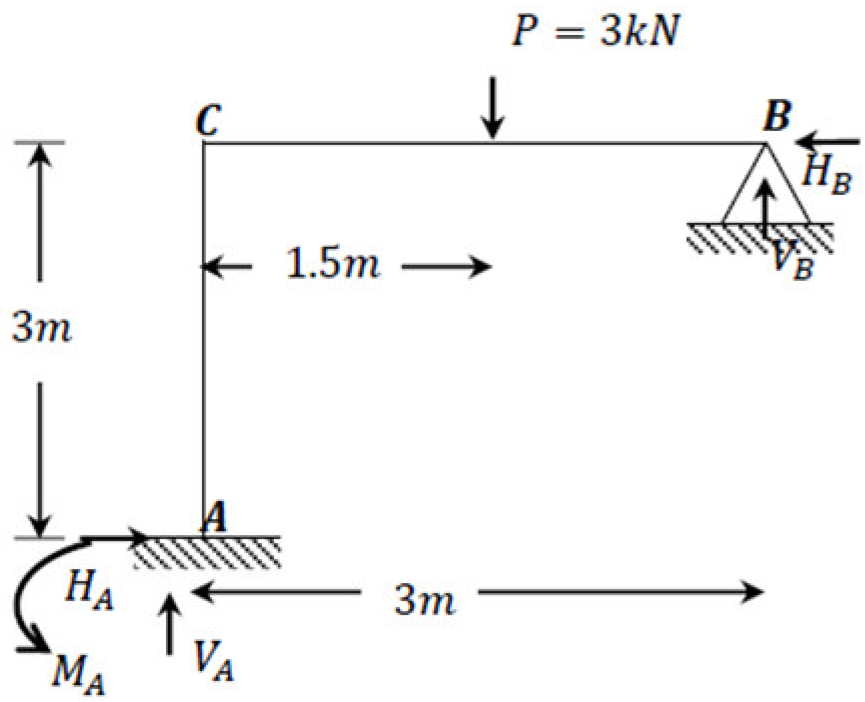


Diagramme de T

App6: méthode des forces

Un portique ACB constitué de poutre et de poteau de rigidité EI en flexion. Tracer les diagrammes des moments fléchissants M_f, des efforts tranchants T et des efforts normaux N.



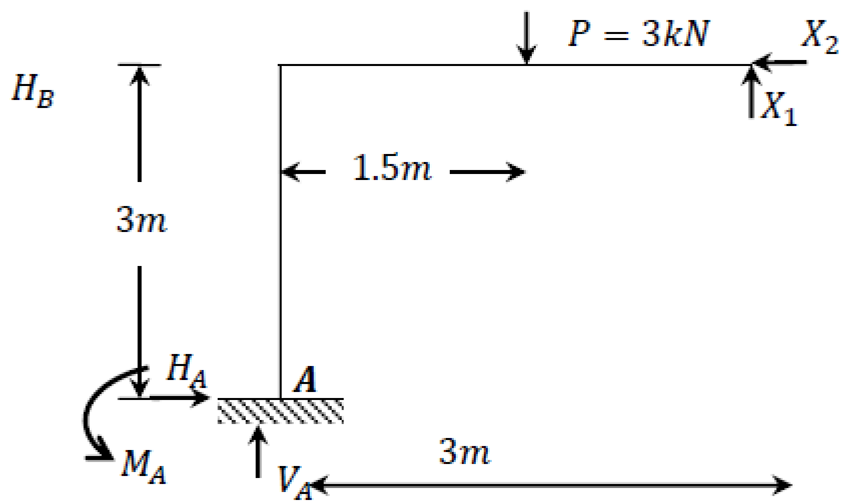
On détermine le degré d'hyperstatique (le nombre d'inconnus) : 2

On écrit le système d'équations canoniques :

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{10} = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{20} = 0 \end{cases}$$

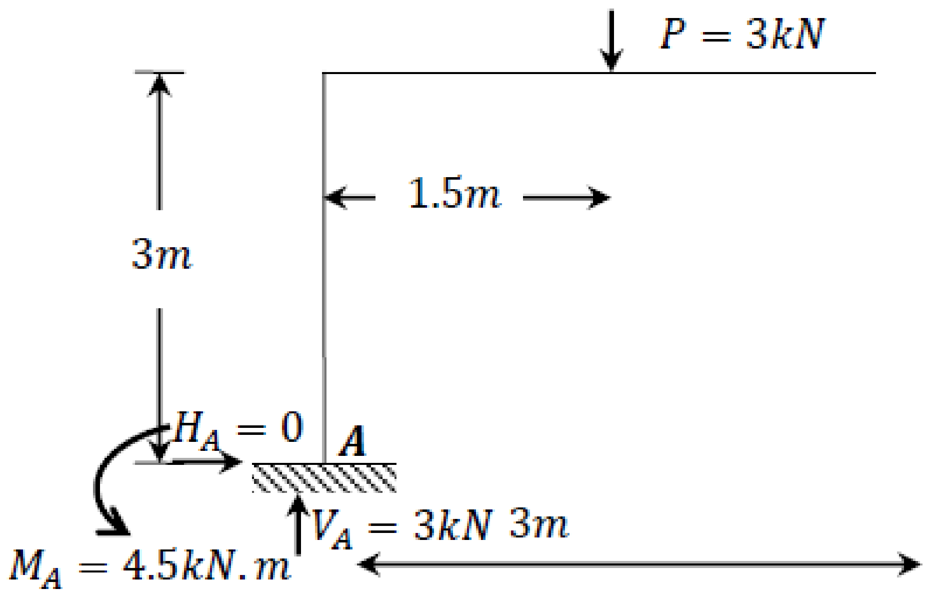
Choix du système de base (fondamental)

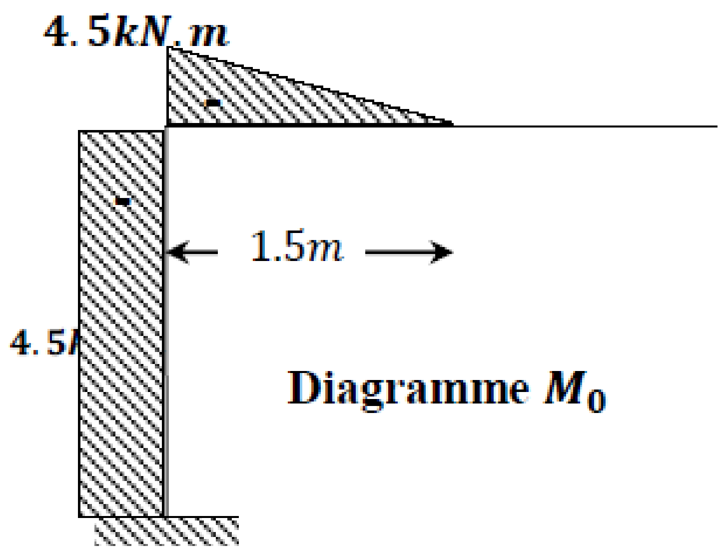
La structure initiale (hyperstatique) est transformée en une structure isostatique soumise aux charges extérieures de départ (P=3kN) et aux deux forces inconnues (X1 et X2)



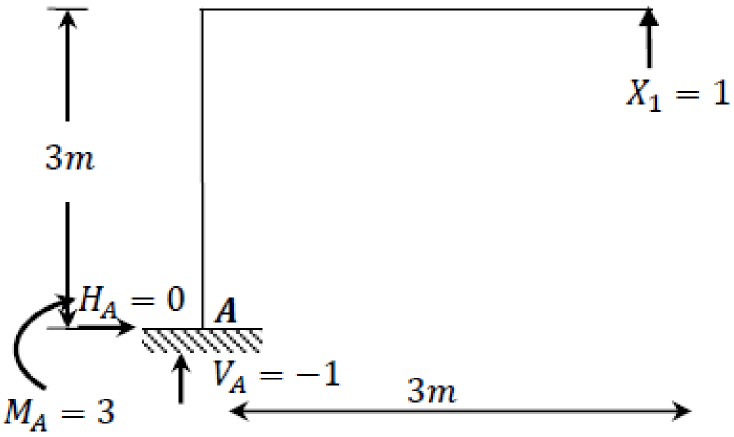
On Trace les diagrammes unitaires (m1, m2) et celui des charges extérieures (M_0)

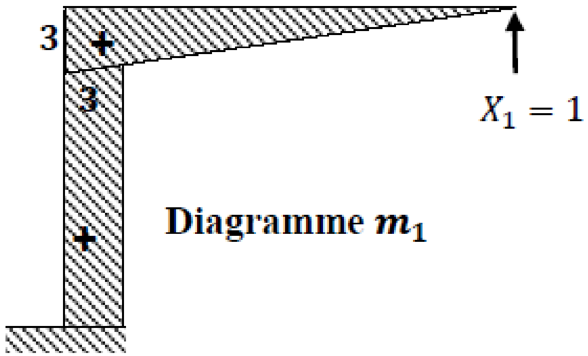
- **Etat 0 : Charges extérieures $\neq 0$ et $X_1 = X_2 = 0$**



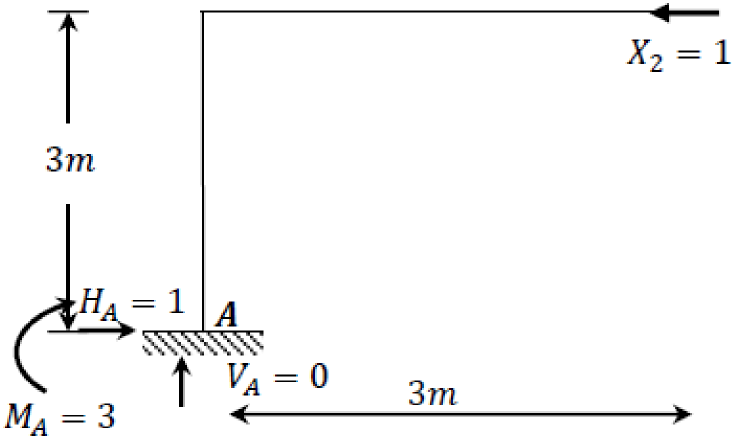


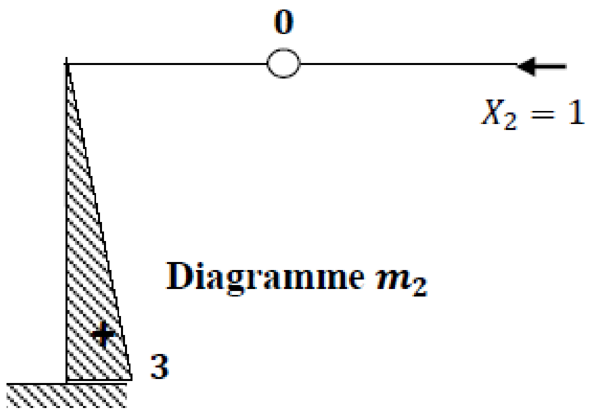
- **Etat 1 : Charges extérieures = 0, $X_1 = 1$ et $X_2 = 0$**





- **Etat 2 : Charges extérieures = 0, $X_1 = 1$ et $X_2 = 0$**





- Calculer des déplacements δ_{ij}.

$\delta_{ij} = \frac{1}{EI}\int_0^l m_i m_j dx$ (Méthode de VERETCHAGUINE)

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{10} = 0$$
$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{20} = 0$$

- Les coefficients δ_{11} et δ_{21} sont obtenus en appliquant au système de base la sollicitation unitaire $X_1 = 1$.
- Les coefficients δ_{12} et δ_{22} sont obtenus en appliquant au système de base la sollicitation unitaire $X_2 = 1$.
- Les coefficients δ_{10} et δ_{20} se calculent sous l'effet des charges extérieures (ici la force P=3kN) appliquées au système de isostatique de base.
- Les diagrammes (m_1; m_2 et M_0) servirons au calcul de ces coefficients.

On trouve,

$$\delta_{11} = \frac{36}{EI}, \qquad \delta_{12} = \delta_{21} = \frac{13.5}{EI}, \qquad \delta_{22} = \frac{9}{EI}$$

$$\delta_{10} = -\frac{48.94}{EI} \qquad et \qquad \delta_{20} = -\frac{20.25}{EI}$$

$$\begin{cases} \frac{36}{EI}X_1 + \frac{13.5}{EI}X_2 - \frac{48.94}{EI} = 0 \\ \frac{13.5}{EI}X_1 + \frac{9}{EI}X_2 - \frac{20.25}{EI} = 0 \end{cases}$$

A partir du système, on trouve :

$$\begin{cases} X_1 = 1.19kN \\ X_2 = 0.48kN \end{cases}$$

- Correction des épures unitaires
  - **Le diagramme corrigé** $m_1^* = m_1 X_1$
  - **Le diagramme corrigé** $m_2^* = m_2 X_2$

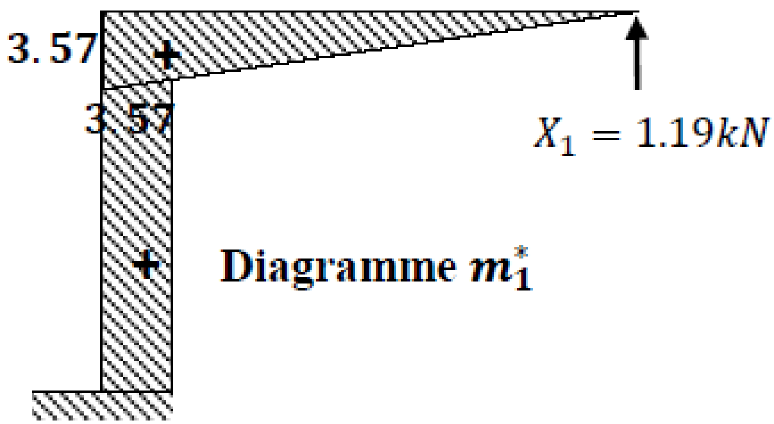


Diagramme m_1^*

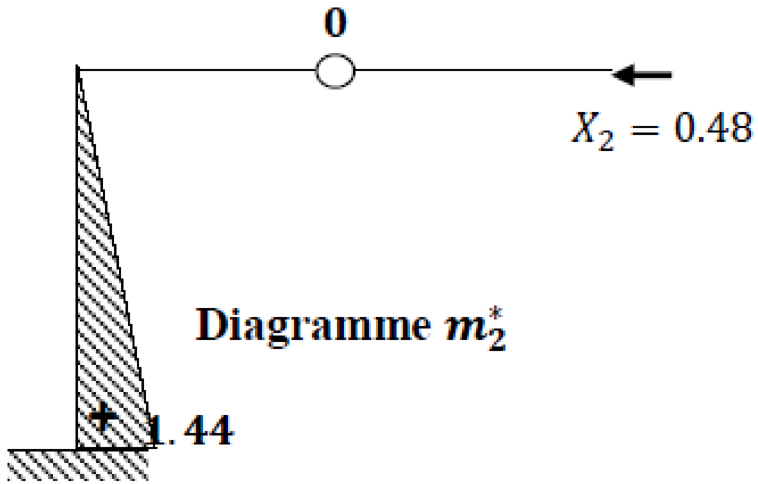
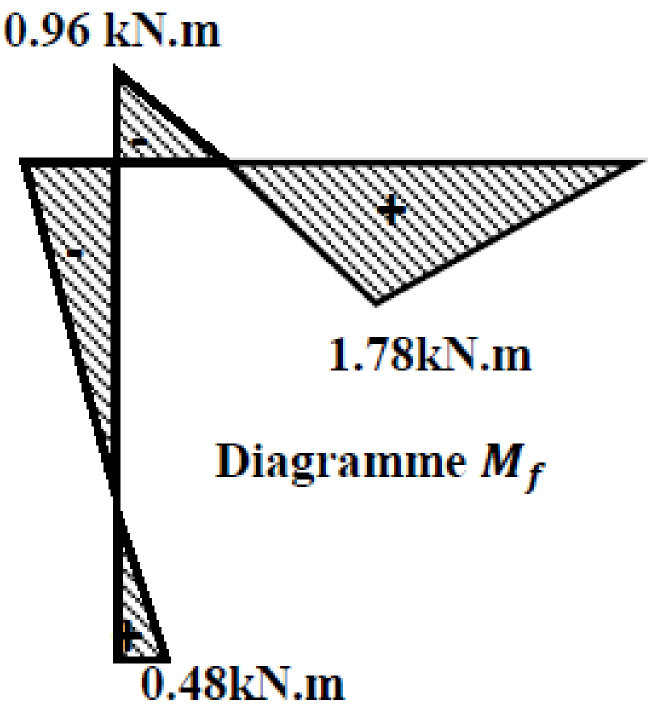


Diagramme m_2^*

- Le diagramme final des moments fléchissants :

$$M_f = M_0 + m_1^* + m_2^*$$



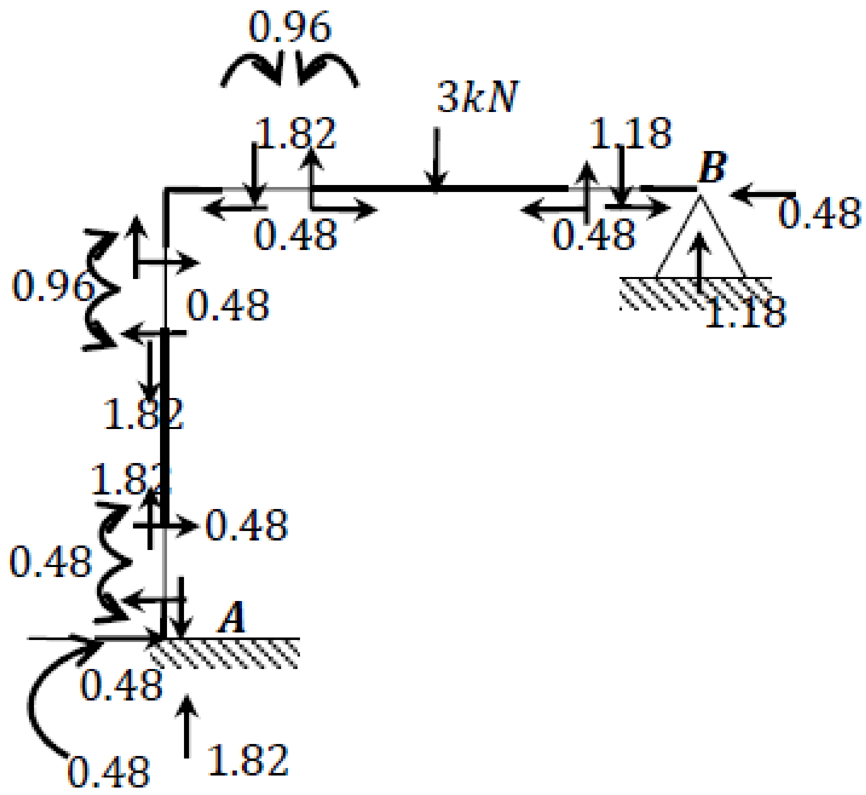


Diagramme de l'effort tranchant

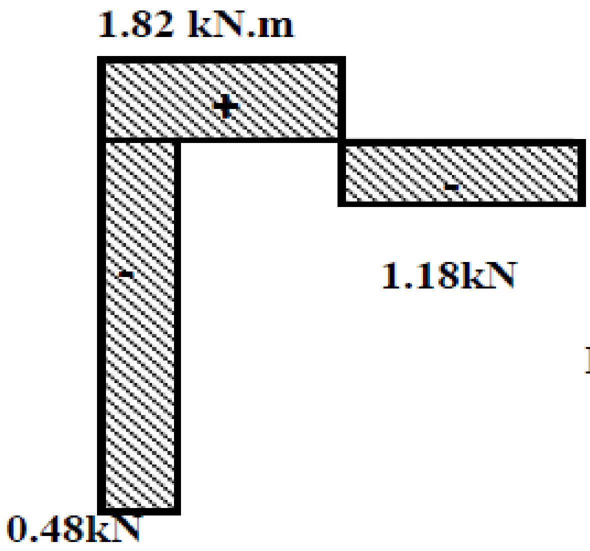


Diagramme de *T*

Diagramme de l'effort normal

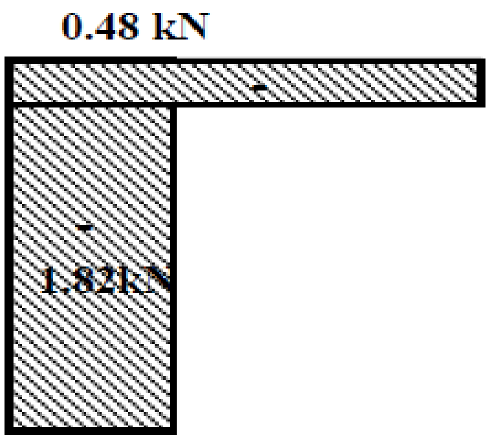
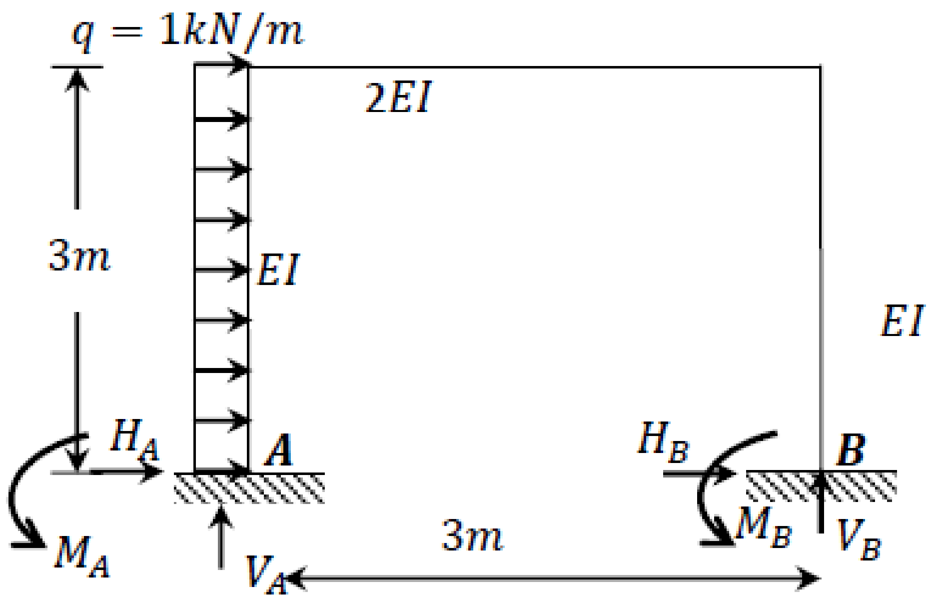


Diagramme de *N*

App7: méthode des forces

Un portique constitué de deux poteaux et une poutre. Tracer le diagramme des moments fléchissants.



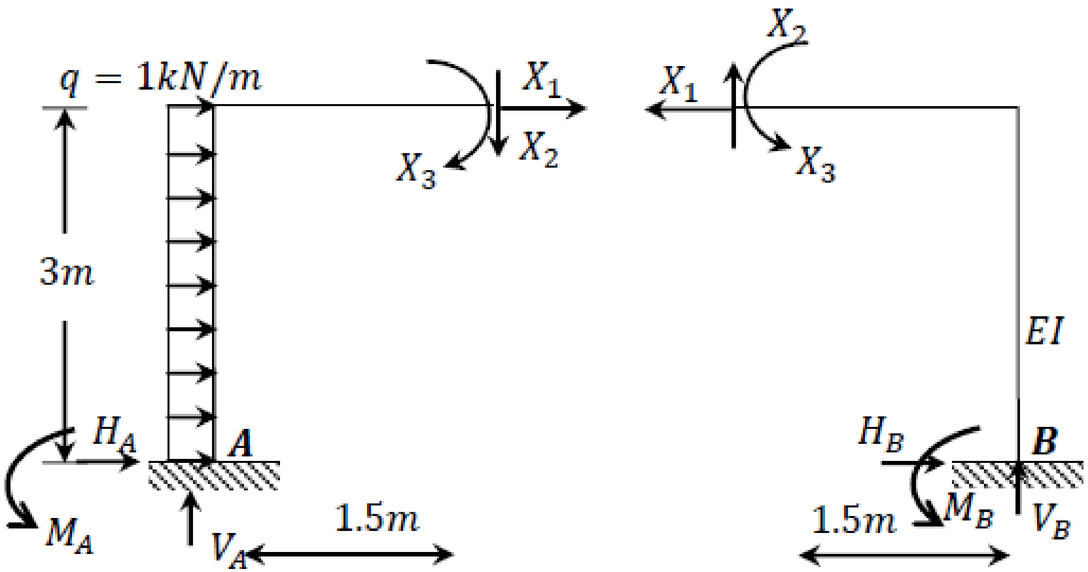
On détermine le degré d'hyperstatique (le nombre d'inconnus) : 3

- On écrit le système d'équations canoniques :

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \delta_{10} = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \delta_{20} = 0 \\ \delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \delta_{30} = 0 \end{cases}$$

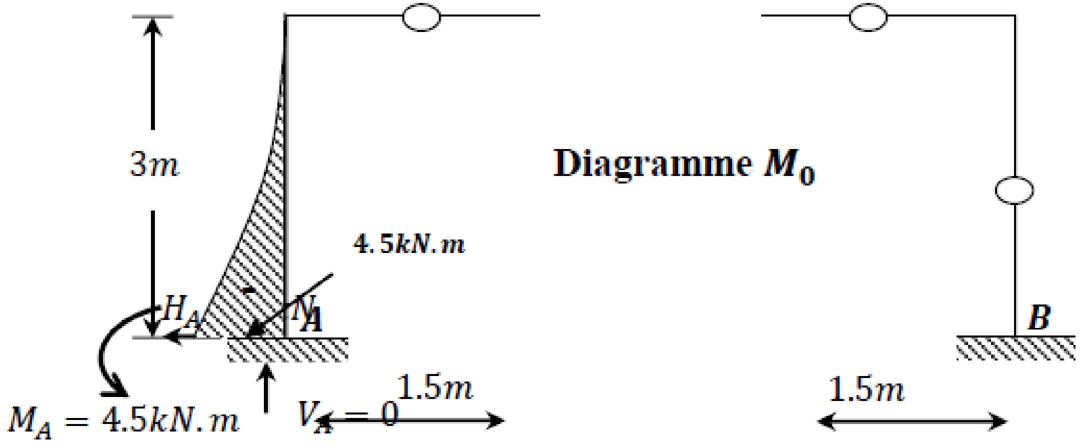
- Choix du système de base (fondamental)

  Les inconnus $X_1, X_2\ et\ X_3$ représente les efforts internes au milieu de la poutre du cadre.

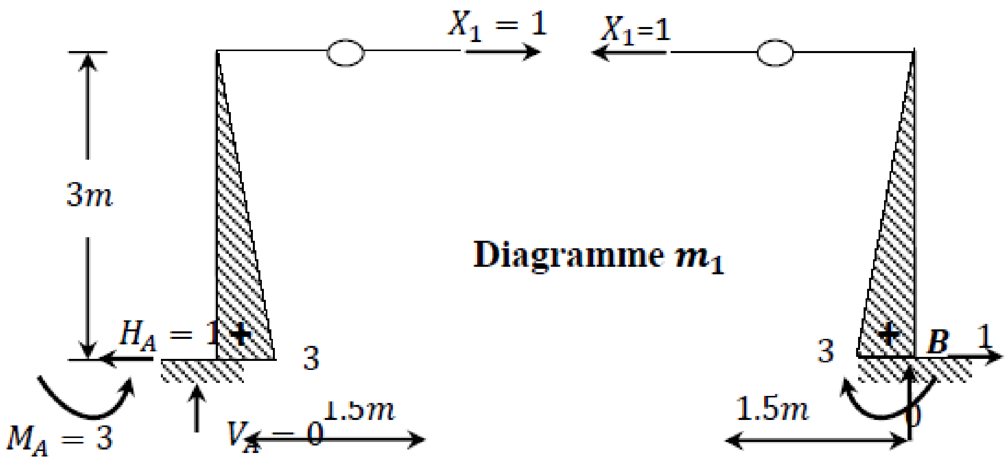


- On Trace les diagrammes unitaires (m_1; m_2; m_3) et celui des charges extérieures (M_0)

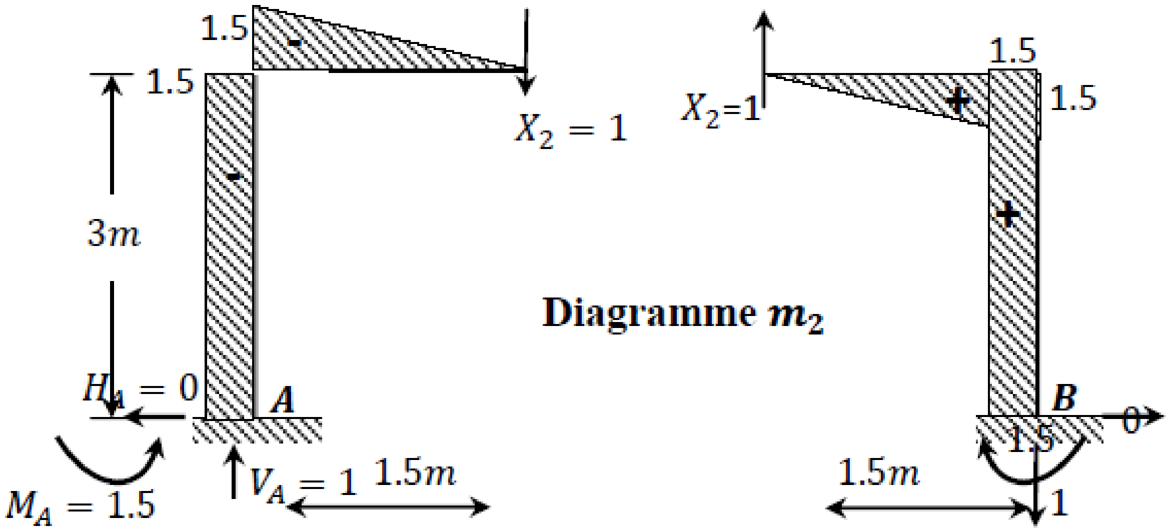
  - **Etat 0 : Charges extérieures $\neq$ 0 et $X_1 = X_2 = X_3 = 0$**



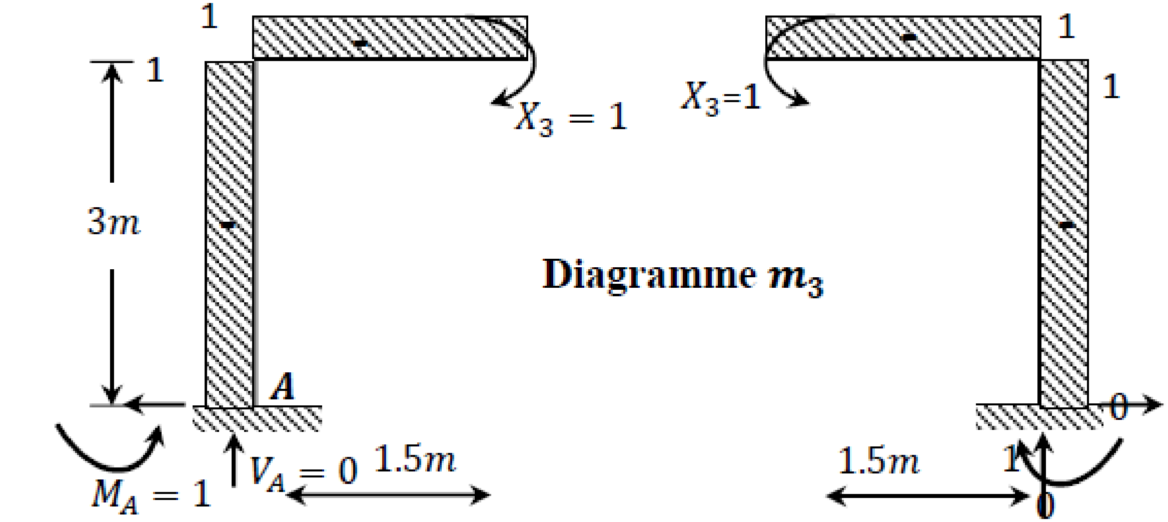
  - **Etat 1 : Charges extérieures = 0, $X_1 = 1$, $X_2 = 0$ et $X_3 = 0$**



- **Etat 2 : Charges extérieures = 0, $X_1 = 0$, $X_2 = 1$ et $X_3 = 0$**



- **Etat 3 : Charges extérieures = 0, $X_1 = 0$, $X_2 = 0$ et $X_3 = 1$**



- Calculer les déplacements δ_{ij}.

$$\delta_{11} = \frac{18}{EI}, \qquad \delta_{12} = \delta_{21} = \delta_{23} = \delta_{32} = 0, \qquad \delta_{22} = \frac{14.63}{EI}$$

$$\delta_{13} = \delta_{31} = -\frac{9}{EI}, \qquad \delta_{33} = \frac{7.5}{EI}$$

$$\delta_{10} = -\frac{10.13}{EI}, \qquad \delta_{20} = \frac{6.75}{EI} \qquad et \qquad \delta_{30} = \frac{13.5}{EI}$$

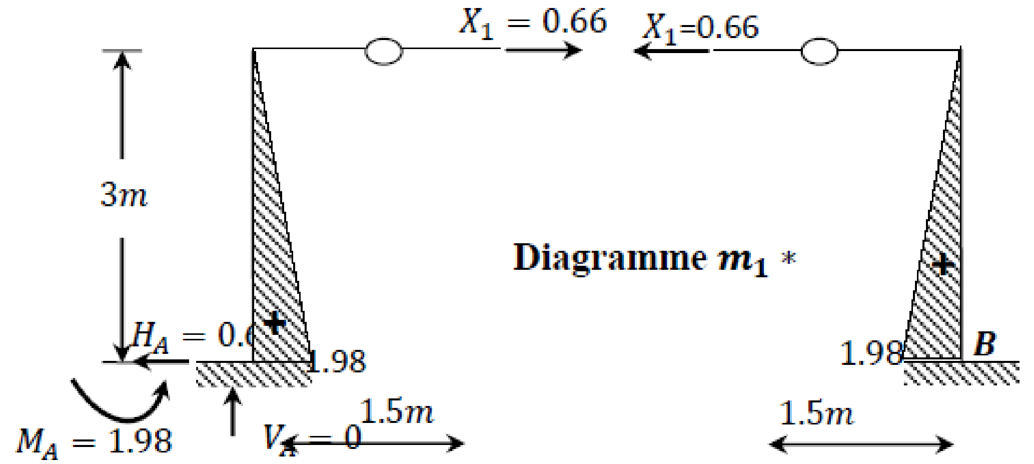
- Le système d'équations canoniques :

$$\begin{cases} \frac{18}{EI}X_1 + 0.X_2 + -\frac{9}{EI}X_3 - \frac{10.13}{EI} = 0 \\ 0.X_1 + \frac{14.63}{EI}X_2 + 0.X_3 + \frac{6.75}{EI} = 0 \\ -\frac{9}{EI}X_1 + 0.X_2 + \frac{7.5}{EI}X_3 + \frac{13.5}{EI} = 0 \end{cases}$$

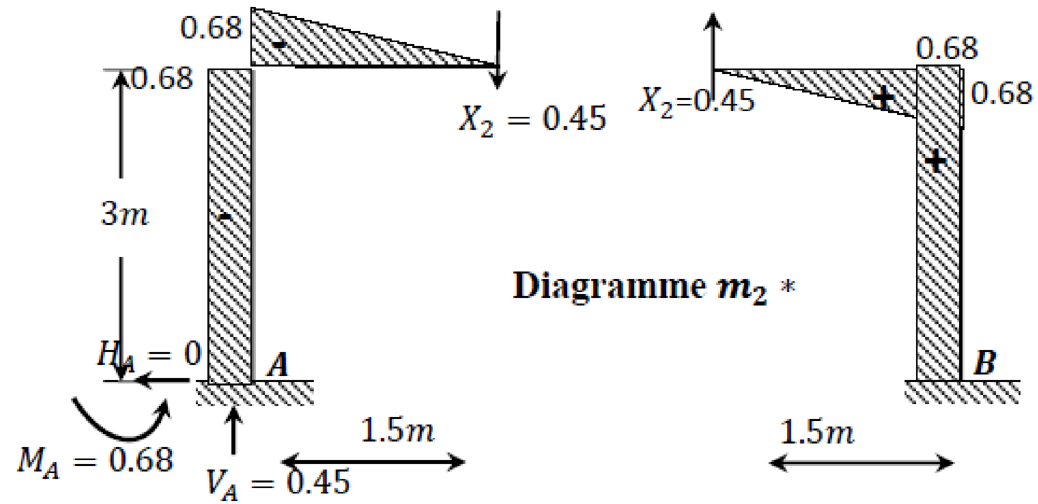
La résolution du système donne :

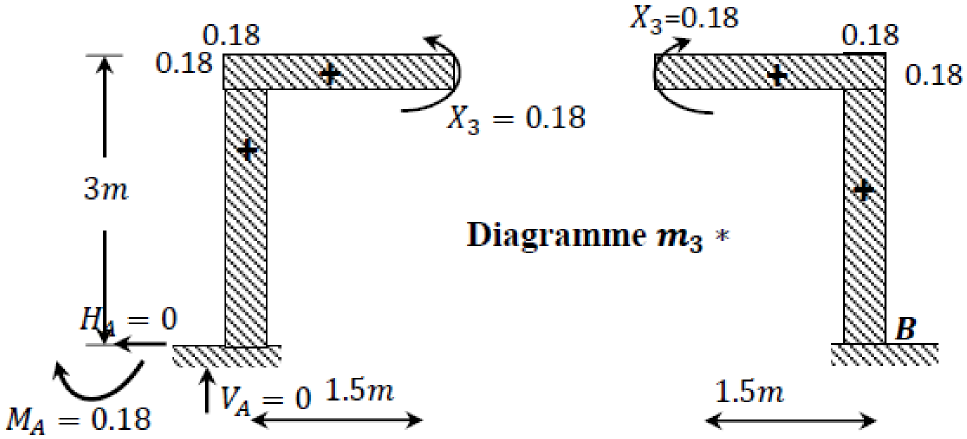
$$\begin{cases} X_1 = 0.66kN \\ X_2 = 0.45kN \\ X_3 = -0.18kN.m \end{cases}$$

- Correction des épures unitaires
  - **Le diagramme corrigé $m_1^* = m_1 X_1$**
  - **Le diagramme corrigé $m_2^* = m_2 X_2$**
  - **Le diagramme corrigé $m_3^* = m_3 X_3$**



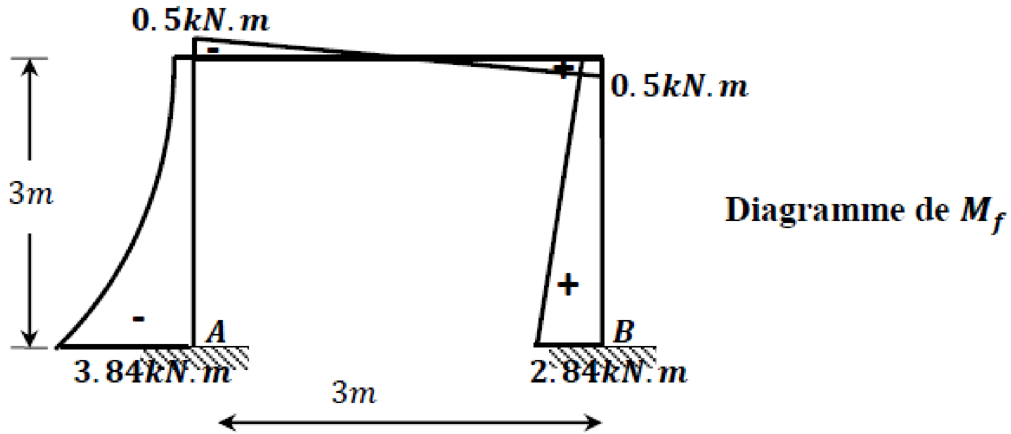
-





- Donc le diagramme final du système réel :

$$M_f = M_0 + m_1^* + m_2^* + m_3^*$$



Chap. 4:
MÉTHODE DES TROIS MOMENTS

MÉTHODE DES TROIS MOMENTS

Démarche

Définition

La méthode des trois moments s'applique aux systèmes dits poutres continues. On suppose que l'effet de l'effort tranchant est négligé

Principe de la méthode des trois moments :

Cette méthode consiste à déterminer les moments fléchissant dans le cas des poutres continues. C'est-à-dire des poutres qui reposent sur plus de deux appuis.

Le degré d'hyperstatique

Le degré d'hyperstatique est égal:

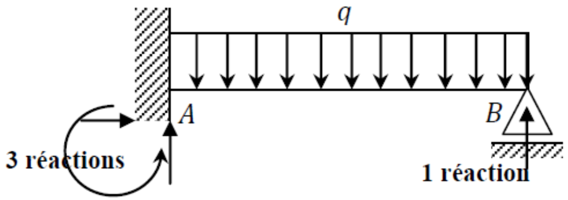
- D= r-3 avec r: le nombre de liaisons (réactions)

Ou bien :

- D= a-2 avec a: le nombre d'appuis

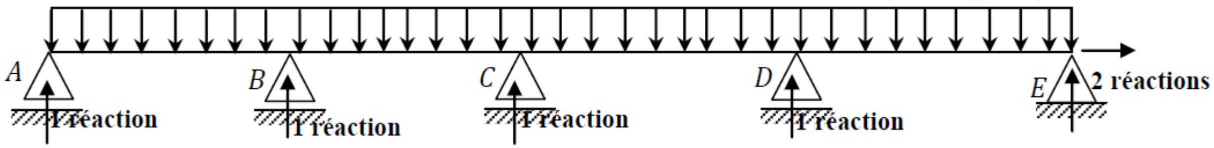
Ou bien :

- Le degré d'hyperstatique est égal au nombre des appuis intermédiaires.



$$d = r - 3 = (3 + 1) - 3 = 1$$

Figure 2.1. : Poutre sur 2 appuis (1 Encastrement et 1 simple)



$$d = r - 3 = 6 - 3 = 3$$

Figure 2.2. : Poutre sur 5 appuis (1 double et 4 simples)

Calcul des moments fléchissant dans les appuis :

- Considérons l'exemple de la figure 2.3. Le degré d'hyperstaicité de cette poutre est égal à N-2 où N représente le nombre d'appuis
- Prenons pour inconnues hyperstatiques les moments fléchissants agissant au droit de chaque appui intermédiaire. Pour ce faire, on procède à des coupures de manière à supprimer la liaison de moment au niveau de chaque appui.
- Dans chaque appui nous avons deux rotations (une à gauche et l'autre à droite).
- Pour une poutre de N-1 travées, on numérote les appuis de 1 à N. La travée l_i est comprise entre les appuis (i) et (i+1), avec une rigiditéEI_i.

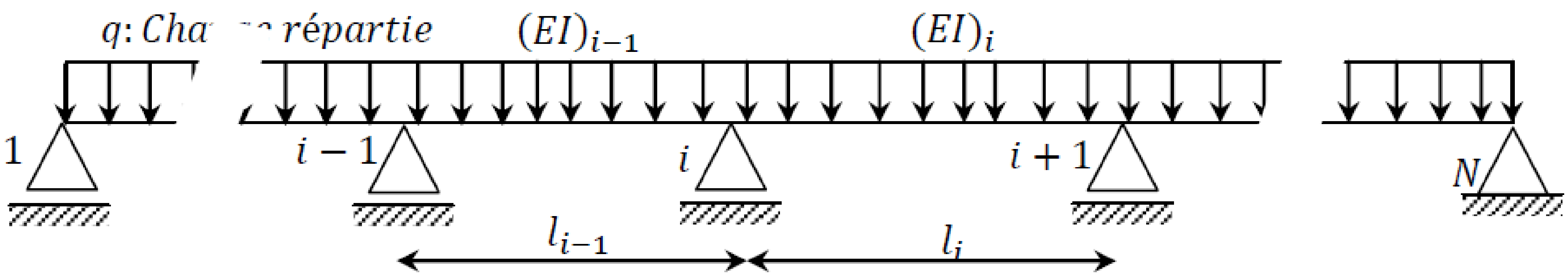


Figure 2.3. : Poutre continue sur N appuis

Une poutre continue comportant N-1 travées peut être décomposée en N-1 poutres isostatiques sur lesquelles s'appliquent les mêmes charges que sur la poutre continue avec en plus les moments aux appuis.

Nous obtenons alors pour la travée i-1 et i:

- M_{i-1} : désigne le moment sur l'appui A_{i-1}
- M_i : désigne le moment sur l'appui A_i
- M_{i+1} : désigne le moment sur l'appui A_{i+1}

$$\sum des\ rotations\ au\ niveau\ du\ point\ (i) = 0$$

On a deux types de rotations :

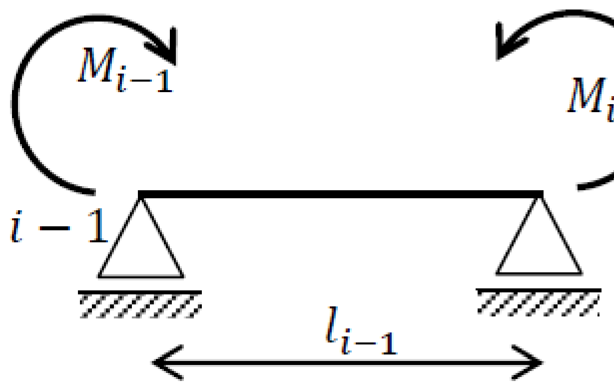
- Rotation due aux charges extérieures $(\varphi_{ig} + \varphi_{id})$
- Rotation due aux moments fléchissants $(\overline{\varphi_{\imath g}} + \overline{\varphi_{\imath d}})$

$$\sum des\ rotations\ au\ niveau\ du\ point\ (i) = (\varphi_{ig} + \varphi_{id}) + (\overline{\varphi_{\imath g}} + \overline{\varphi_{\imath d}}) = 0$$

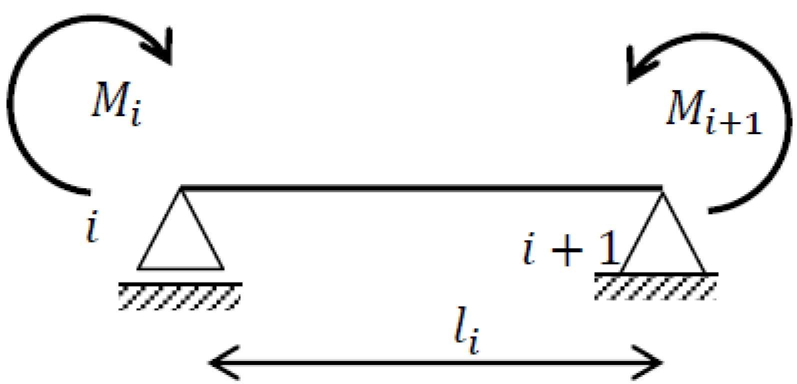
A- Rotations dues aux moments fléchissants $\left(\overline{\varphi_{\imath g}} + \overline{\varphi_{\imath d}}\right)$

Les déformations en général et spécifiquement les rotations dues aux moments fléchissant peuvent être évaluée par l'une des méthodes analytiques connues comme par App : la méthode de CASTIGLIANO ou Maxwell-Mohr et aussi la méthode graphique de VERETCHAGUINE.

Ici le calcul des rotations est effectué par la méthode de Mohr.

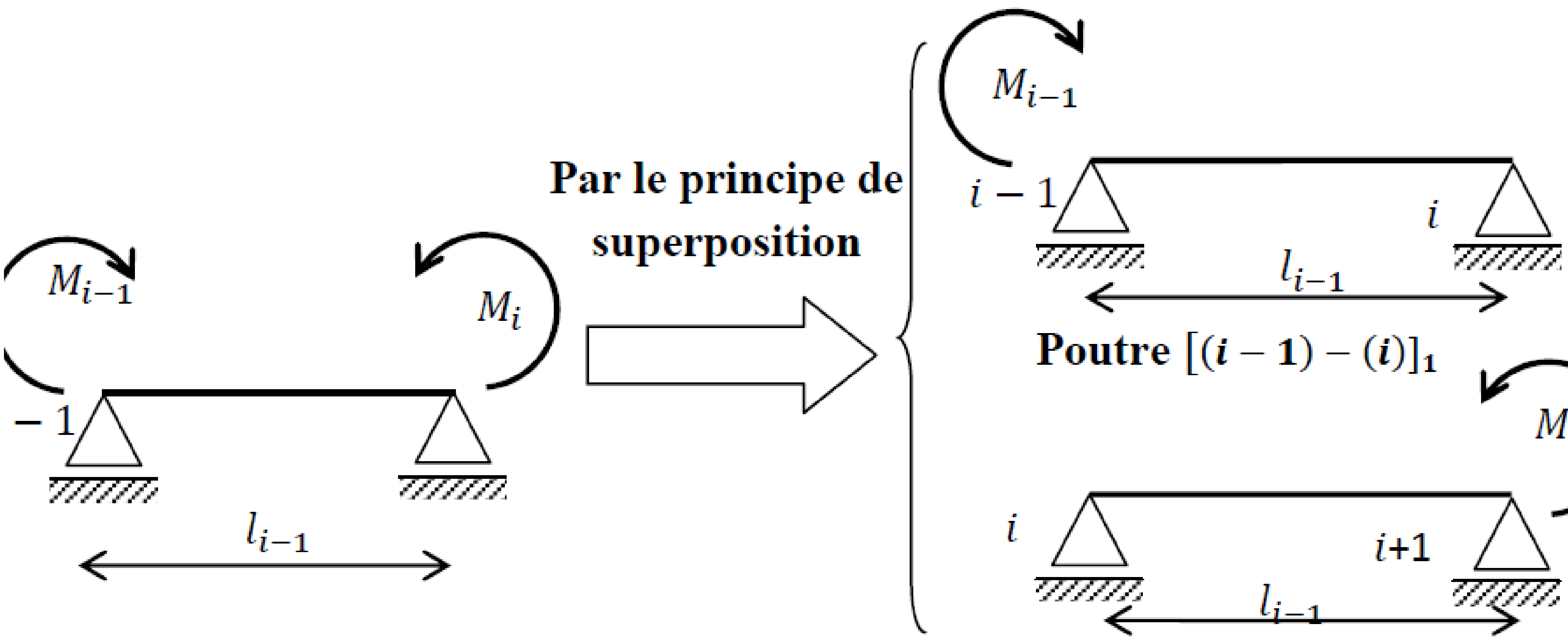


Poutre $(\boldsymbol{i-1})-(\boldsymbol{i})$



Poutre $(\boldsymbol{i})-(\boldsymbol{i+1})$

A1. Poutre (i-1) - (i)



- Poutre $[(i-1)-(i)]$

Poutre $[(i-1)-(i)]_2$

$$\overline{\varphi_{ig}} = \frac{1}{6}\frac{M_{i-1}}{(EI)_{i-1}} l_{i-1} + \frac{1}{3}\frac{M_i}{(EI)_{i-1}} l_{i-1}$$

A1. Poutre (i) - (i+1)

De la même pour la poutre $(\boldsymbol{i}) - (\boldsymbol{i}+\mathbf{1})$

$$\overline{\boldsymbol{\varphi_{id}}} = \frac{1}{3}\frac{M_i}{(EI)_i}l_i + \frac{1}{6}\frac{M_{i+1}}{(EI)_i}l_i$$

$$\sum Rotations/point\ (i) = \left(\varphi_{ig} + \varphi_{id}\right) + \left(\overline{\varphi_{ig}} + \overline{\varphi_{id}}\right) = 0 \qquad (2.3)$$

$$\left(\varphi_{ig} + \varphi_{id}\right) + \frac{1}{6}\frac{M_{i-1}}{(EI)_{i-1}}l_{i-1} + \frac{1}{3}\frac{M_i}{(EI)_{i-1}}l_{i-1} + \frac{1}{3}\frac{M_i}{(EI)_i}l_i + \frac{1}{6}\frac{M_{i+1}}{(EI)_i}l_i = 0$$

$$\left(\varphi_{ig} + \varphi_{id}\right) + \frac{1}{6}\frac{M_{i-1}}{(EI)_{i-1}}l_{i-1} + \frac{1}{3}\frac{M_i}{(EI)_{i-1}}l_{i-1} + \frac{1}{3}\frac{M_i}{(EI)_i}l_i + \frac{1}{6}\frac{M_{i+1}}{(EI)_i}l_i = 0$$

$$\left(\varphi_{ig} + \varphi_{id}\right) + \frac{1}{6}\frac{M_{i-1}}{(EI)_{i-1}}l_{i-1} + \frac{1}{3}M_i\left(\frac{l_{i-1}}{(EI)_{i-1}} + \frac{l_i}{(EI)_i}\right) + \frac{1}{6}\frac{M_{i+1}}{(EI)_i}l_i = 0$$

Cette équation est appelée méthode des trois moments (dite aussi méthode des rotations).

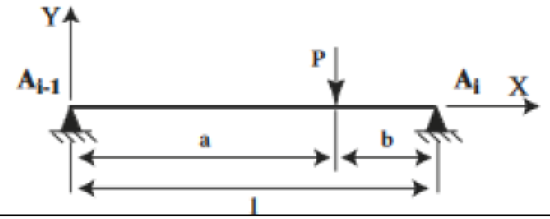
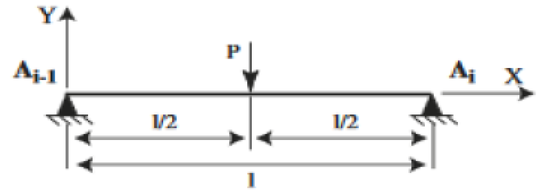
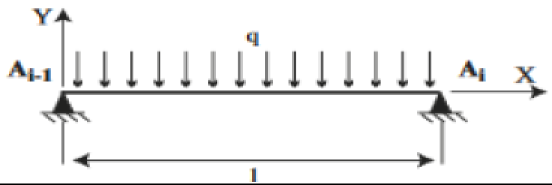
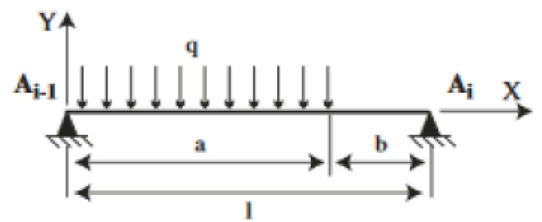
Elle permet de calculer les moments aux appuis intermédiaires des poutres continues.

Si toutes les travées de la poutre ont la même rigidité la relation devient

$$\boxed{M_{i-1}l_{i-1} + 2(l_{i-1} + l_i)M_i + M_{i+1}l_i = -6EI\left(\varphi_{ig} + \varphi_{id}\right) \qquad (2.4)}$$

B- Rotations dues aux charges extérieures $(\varphi_{ig} + \varphi_{id})$

Le tableau suivant résume les valeurs des rotations au niveau des appuis pour différentes charges extérieures :

Schéma statique (géométrie et chargement)	$-6EI\varphi_{i-1}$	$-6EI\varphi_i$
	$-\frac{Pab(a+l)}{l}$	$-\frac{Pab(a+l)}{l}$
	$-\frac{3}{8}Pl^2$	$-\frac{3}{8}Pl^2$
	$-\frac{1}{4}ql^3$	$-\frac{1}{4}ql^3$
	$-\frac{1}{24l}qa^2(2l-a)^2$	$-\frac{1}{24l}qa^2(2l-a)^2$

Récapitulatif de la méthode

1. Déterminer le degré d'hyperstaticité de la poutre k ;
2. Découper la poutre à (n) travées indépendantes (i) chacune de portée L_i et de rigidité flexionnelle EI_i;

3. Pour chaque poutre isostatique de travée (i), déterminer :
   - les réactions des appuis : $r_{i-1}^{d}\ et\ r_i^{g}$
   - les expressions efforts internes : l'effort tranchant $v_i(x)$ et moment fléchissant $m_i(x)$;
   - les rotations des appuis : $\theta_{i-1}^{d}\ et\ \theta_i^{g}$
4. Ecrire les k équations de 3 moments pour chaque deux travées consécutives (i) et (i+1):

$$\frac{L_i}{EI_i}M_{i-1} + 2\left(\frac{L_i}{EI_i} + \frac{L_{i+1}}{EI_{i+1}}\right)M_i + \frac{L_{i+1}}{EI_{i+1}}M_{i+1} = \boxed{-6\left(\theta_i^{g} + \theta_i^{d}\right)}$$

5. Résoudre ces équations pour déterminer les moments M_i sur appuis.
6. calculer les réactions et les efforts internes par les formules suivantes :
   - Les réactions des appuis : $R_i = r_i^{g} + r_i^{d} + \frac{M_{i-1} - M_i}{L_i} + \frac{M_{i+1} - M_i}{L_{i+1}}$
   - L'effort tranchant : $V_i(x) = v_i(x) + \frac{M_i - M_{i-1}}{L_i}$
   - Le moment fléchissant : $M_i(x) = m_i(x) + M_{i-1}(1 - \frac{x}{L_i}) + M_i \frac{x}{L_i}$

MÉTHODE DES TROIS MOMENTS

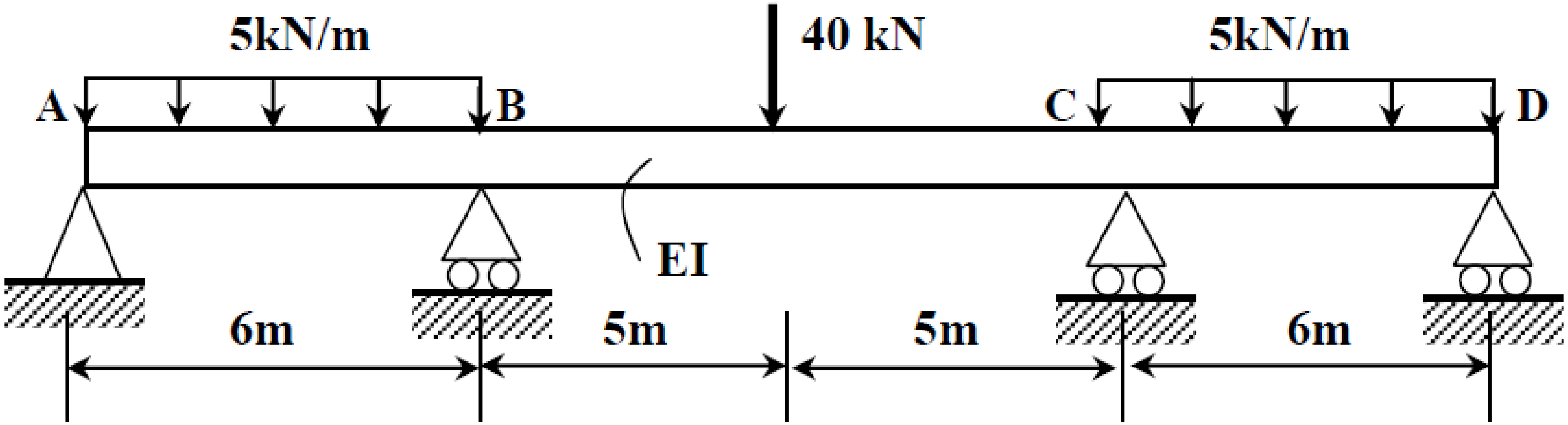
Applications

App1: Poutres à trois travées

On considère une poutre continue (ABCD) de trois travées, de rigidité EI constante. Elle supporte une charge répartie de 5kN/m sur la travée AB et CD et une charge concentrée de 40kN au milieu de la travée BC.

En utilisant la méthode des trois moments, déterminer :

- Les réactions aux appuis.
- Tracer le diagramme des moments fléchissants et des efforts tranchants.



Degré d'hyperstatique : 2 fois hyperstatique

Point B :

$$6M_A + 2(6+10)M_B + 10M_C = -6EI(\varphi_{Bg} + \varphi_{Bd})$$

$\boldsymbol{-6EI(\varphi_{Bg} + \varphi_{Bd})}$ **:**

$$\left.\begin{aligned} -6EI\varphi_{Bg} &= -q\frac{l^3}{4} = -5\frac{6^3}{4} = -270 \\ -6EI\varphi_{Bd} &= -\frac{3}{8}Pl^2 = -\frac{3}{8}40.10^2 = -1500 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boldsymbol{-6EI(\varphi_{Bg} + \varphi_{Bd})} = -1770kN.m^2$$

Et $M_A = 0$

Donc :

$$32M_B + 10M_C = -1770kN.m^2$$

Point C :

$$10M_B + 2(10+6)M_C + 6M_D = -6EI(\varphi_{Cg} + \varphi_{Cd})$$

$\boldsymbol{-6EI(\varphi_{Cg} + \varphi_{Cd})}$ **:**

$$\left.\begin{aligned} -6EI\varphi_{Cg} &= -\frac{3}{8}Pl^2 = -\frac{3}{8}40.10^2 = -1500 \\ -6EI\varphi_{Cd} &= -q\frac{l^3}{4} = -5\frac{6^3}{4} = -270 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boldsymbol{-6EI(\varphi_{Cg} + \varphi_{Cd})} = -1770kN.m^2$$

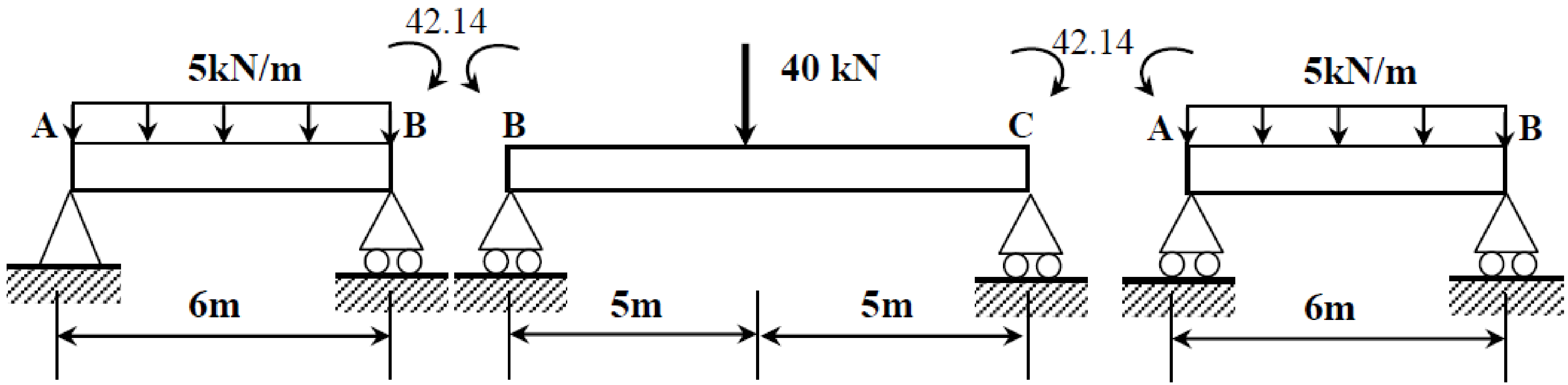
Et $M_D = 0$

Donc :

$$10M_B + 32M_C = -1770kN.m^2$$

$$\begin{bmatrix} 32 & 10 \\ 10 & 32 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_B \\ M_C \end{Bmatrix} = -\begin{Bmatrix} 1770 \\ 1770 \end{Bmatrix} kN.m^2 \Longrightarrow M_B = M_C = -42.14kN.m$$

Calcul des réactions : par le principe de la décomposition (superposition)



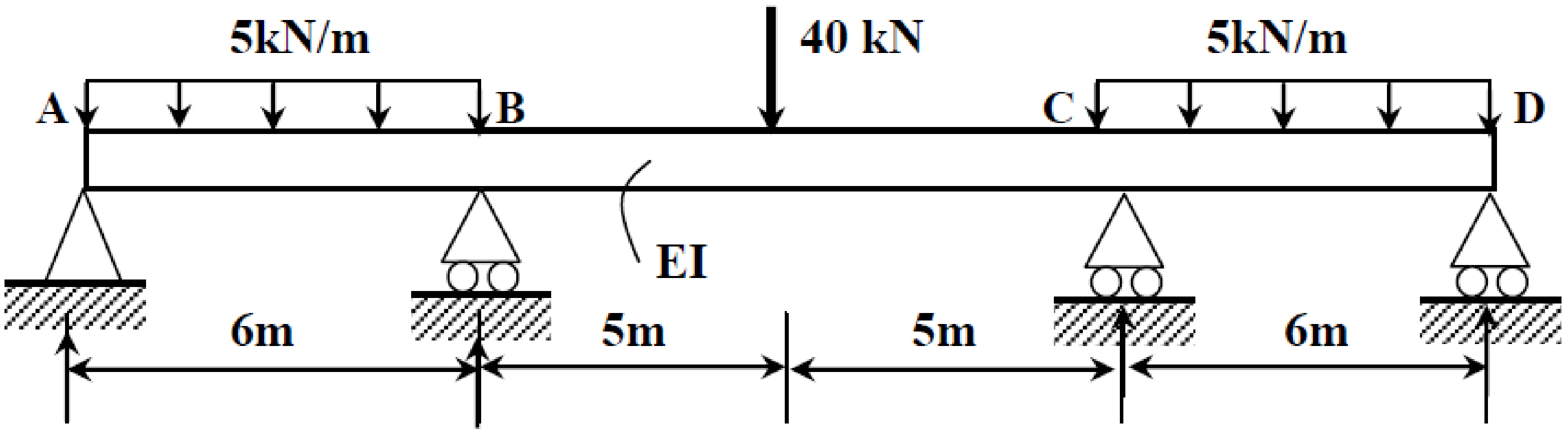
Les réactions dues aux charges extérieures :

↑ 15 | 15 ↑ | ↑ 20 | 20 ↑ | ↑ 15 | ↑ 15

Les réactions dues aux moments appliqués aux niveaux des appuis :

↓ 7.023 | 7.023 ↑ | 0 ↑ | 0 ↑ | ↑ 7.023 | ↓ 7.023

Les réactions totales :



$R_A = 7.023kN$ $R_B = 42.023kN$ $R_C = 42.023kN$ $R_D = 7.977kN$

Diagramme des efforts tranchants

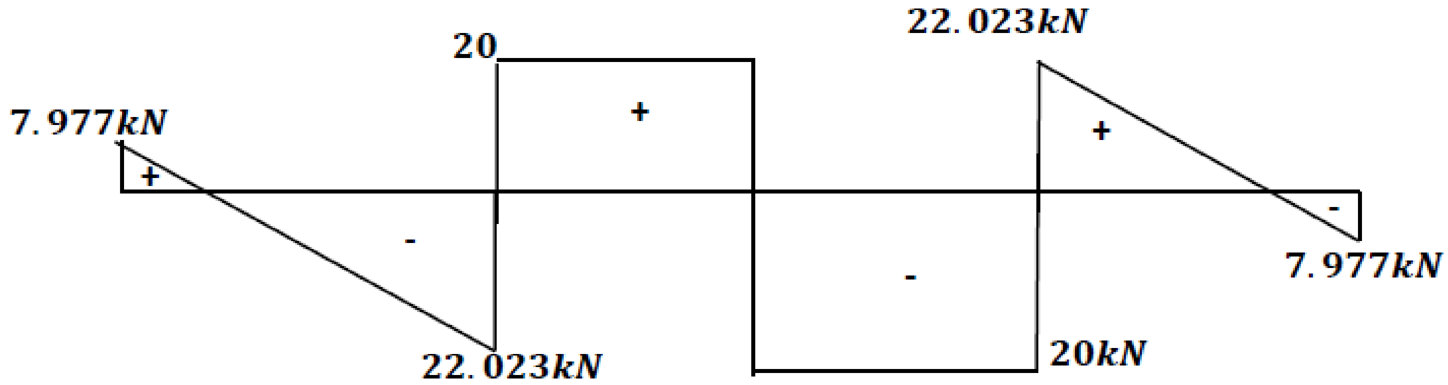
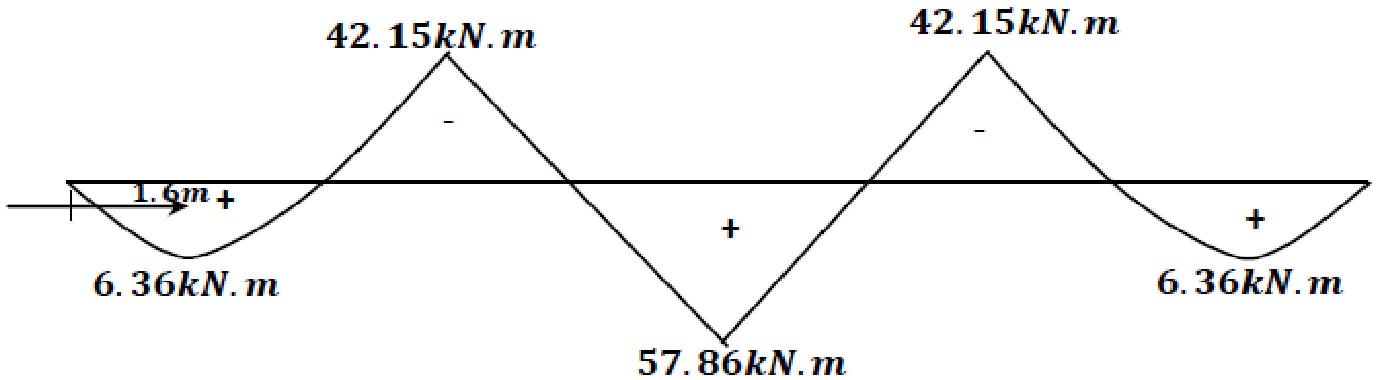
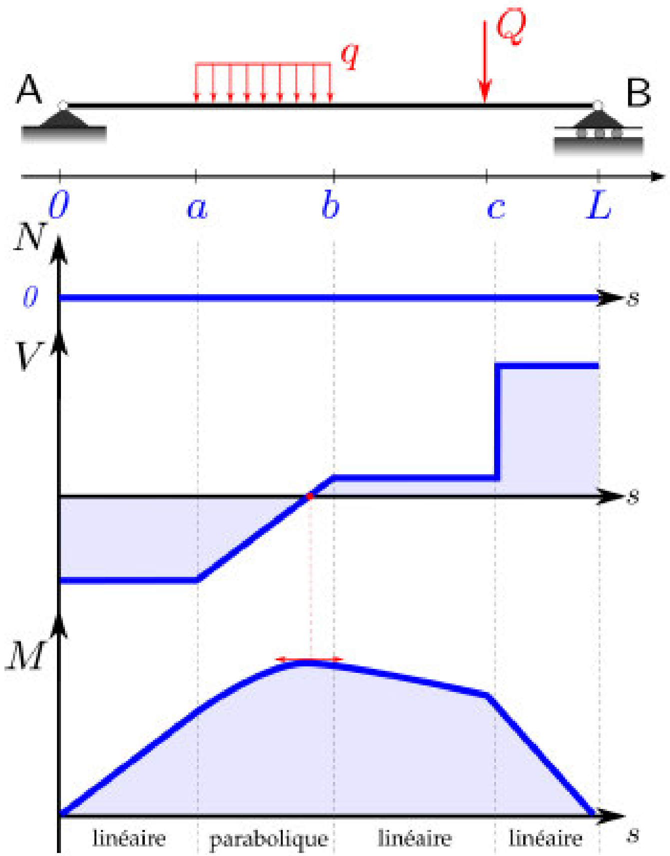


Diagramme des moments fléchissant :



Rappel traçage des diagramme DFT et DMF

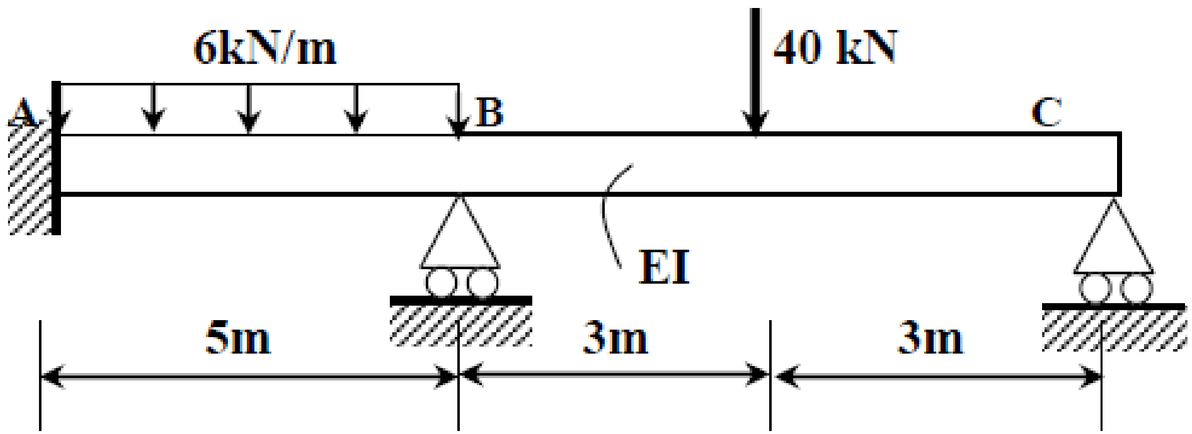


App2: Poutres encastrée à 1 travée

On considère une poutre continue (ABC) de deux travées, de rigidité *EI* constante. Celle-ci est encastrée en A, repose sur deux appuis simples en B et C. Elle supporte une charge répartie de 6kN/m sur la travée AB et une charge concentrée de 40kN au milieu de la travée BC.

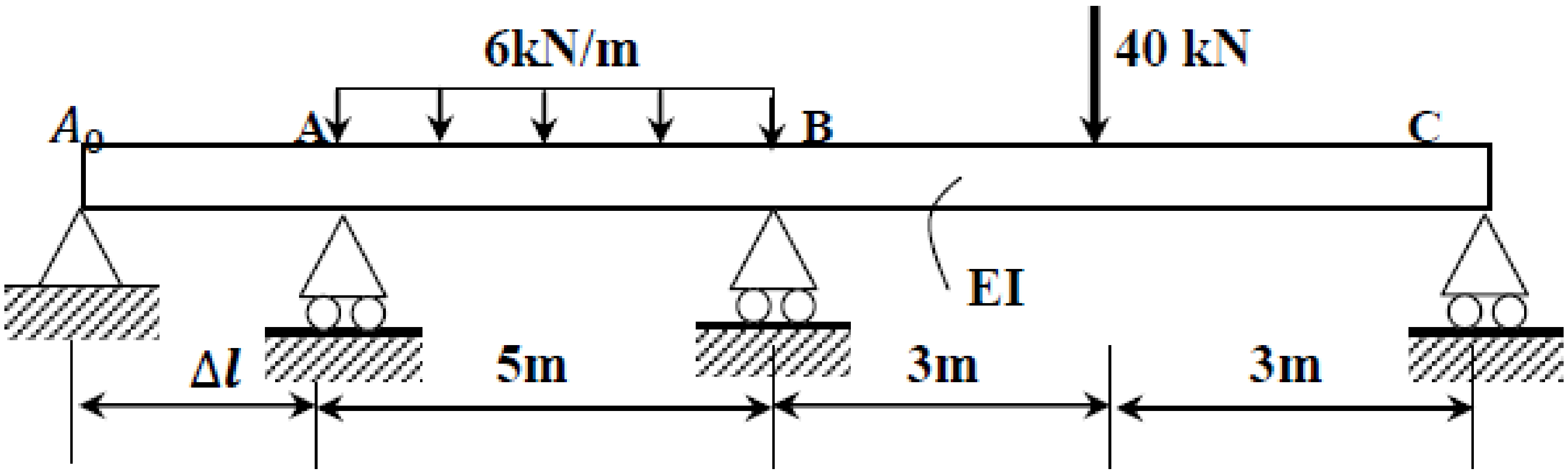
En utilisant la méthode des trois moments, déterminer :

- Les réactions d'appuis en A, B et C.
- Le diagramme des moments fléchissants et de l'effort tranchant.



Degré d’hyperstatique : 2

On remplace l’encastrement par une poutre bi articlée de longueur Δl



Point A :

$$\Delta l M_{A0} + 2(\Delta l + 5)M_A + 5M_B = -6EI(\varphi_{Ag} + \varphi_{Ad})$$

$\boldsymbol{-6EI(\varphi_{Ag} + \varphi_{Ad})}$ **:**

$$\left.\begin{array}{l} -6EI\varphi_{Ag} = 0\ (Auncune\ charge\ n'agit\ sur\ la\ poutre\ A_0 - A) \\ \quad -6EI\varphi_{Bd} = -q\dfrac{l^3}{4} = -6\dfrac{5^3}{4} = -187.5 \\ \quad = -187.5kN.m^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \boldsymbol{-6EI\left(\varphi_{Ag} + \varphi_{Ad}\right)}$$

Donc : $10M_A + 5M_B = -187.5kN.m^2$

Point B :

$$5M_A + 2(5+6)M_B + 6M_C = -6EI(\varphi_{Bg} + \varphi_{Bd})$$

$\boldsymbol{-6EI(\varphi_{Bg} + \varphi_{Bd})}$ **:**

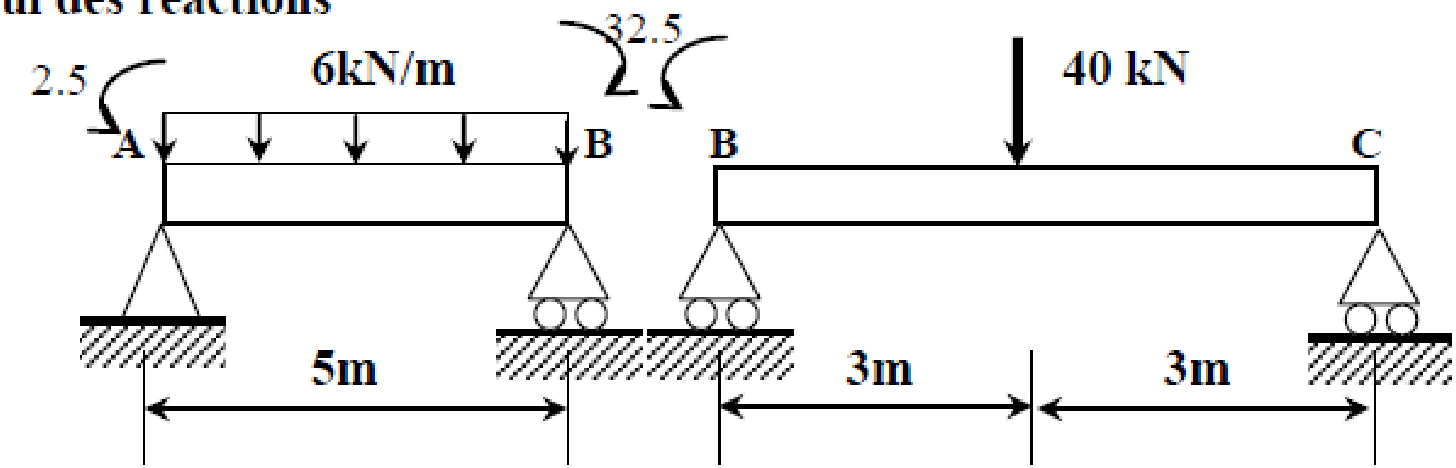
$$\left.\begin{aligned} -6EI\varphi_{Bg} &= -q\frac{l^3}{4} = -6\frac{5^3}{4} = -187.5 \\ -6EI\varphi_{Bd} &= -\frac{3}{8}Pl^2 = -\frac{3}{8}40.6^2 = -540 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boldsymbol{-6EI(\varphi_{Bg} + \varphi_{Bd})} = -727.5kN.m^2$$

Et $M_C = 0$

Donc : $$5M_A + 22M_B = -727.5kN.m^2$$

$$\begin{bmatrix} 10 & 5 \\ 5 & 22 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_A \\ M_B \end{Bmatrix} = -\begin{Bmatrix} 187.5 \\ 727.5 \end{Bmatrix} kN.m^2 \Longrightarrow M_A = -2.5kN.m \; et \; M_B = -32.5kN.m$$

Calcul des réactions



Les réactions dues aux charges extérieures :

$\frac{5.6}{2} = 15$ ↑ 15 ↑ $\frac{40}{2} = 20$ ↑ 20 ↑

Les réactions dues aux moments appliqués aux niveaux des appuis :

6 ↓ 6 ↑ ↑ 5.42 5.42 ↓

Les réactions totales :

Ou $R_A = 15 - 6 = 9kN, R_B = 21 + 25.42 = 46.42kN\ et\ R_c = 20 - 5.42 = 14.58kN$

Diagramme des efforts tranchants

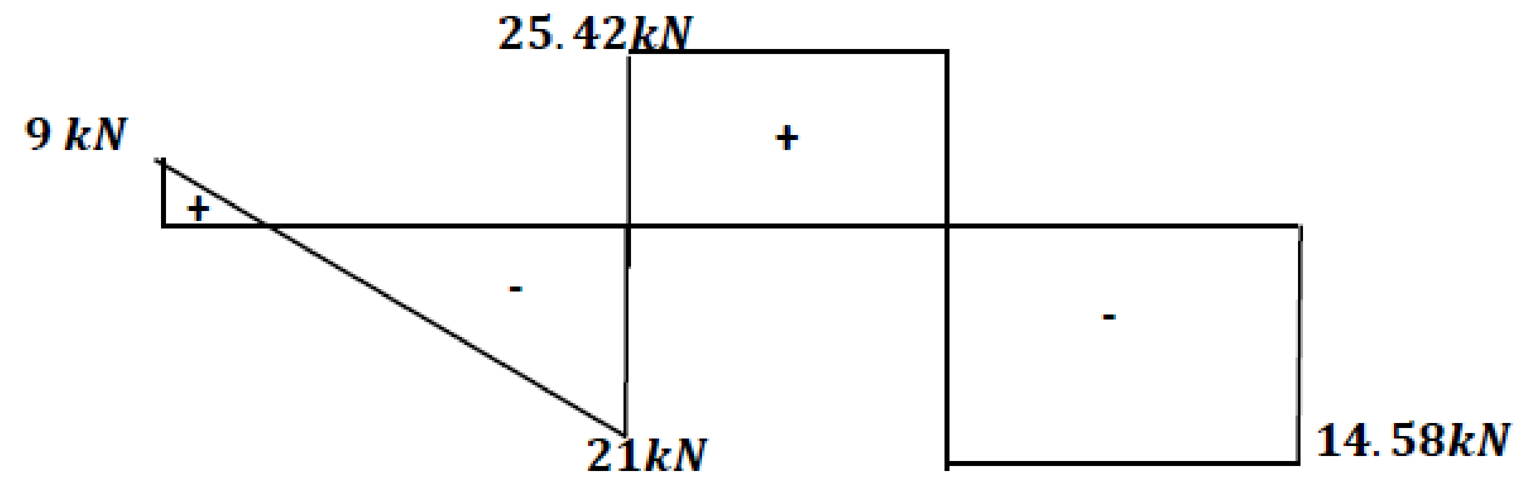
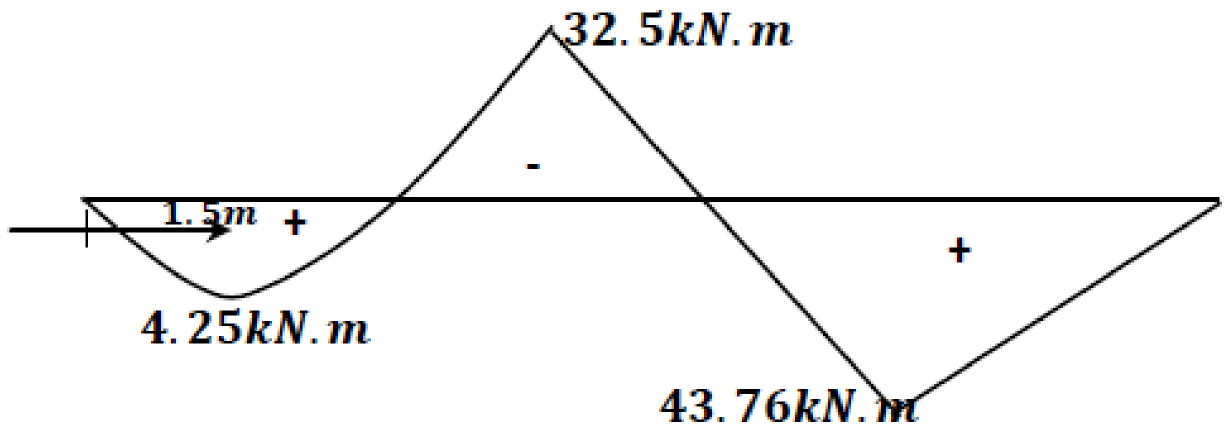


Diagramme des moments fléchissant :

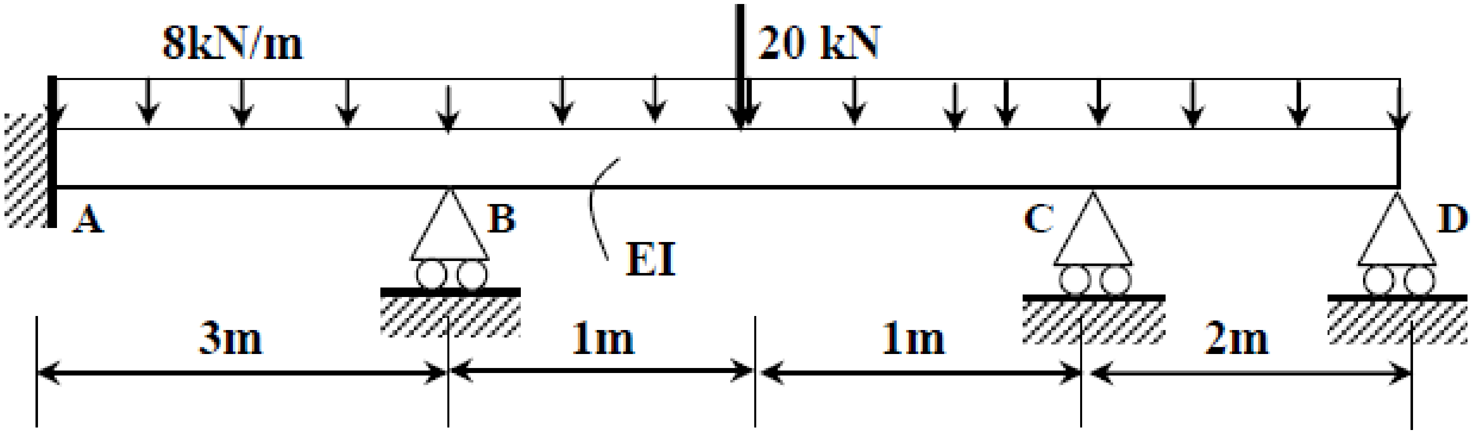


App3: Poutres encastrée à 2 travées

On considère une poutre continue (ABCD) de trois travées, de rigidité *EI* constante sur toutes les travées. Celle-ci est encastrée en A, repose sur deux appuis simples en B, C et D. Elle supporte une charge répartie de 8kN/m sur toute la longueur de la poutre continue ABCD et une charge concentrée de 20kN au milieu de la travée BC.

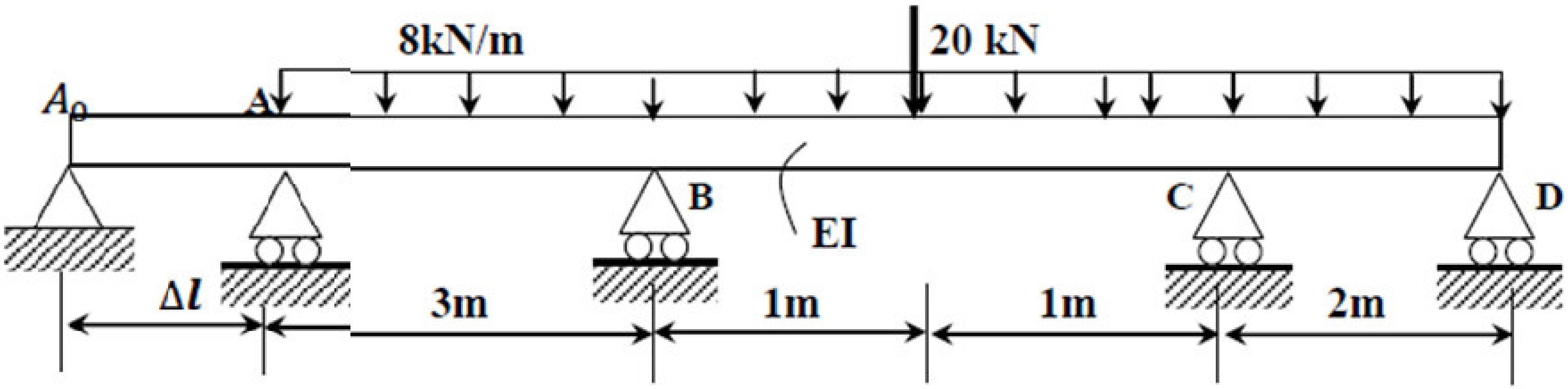
En utilisant la méthode des trois moments, déterminer :

- Les réactions d'appuis en A, B, C et D.
- Le diagramme des moments fléchissants et de l'effort tranchant.



Degré d'hyperstatique : 3

On remplace l'encastrement par une poutre bi articlée de longueur Δl



Point A :

$$\Delta l M_{A0} + 2(\Delta l + 3)M_A + 3M_B = -6EI(\varphi_{Ag} + \varphi_{Ad})$$

$\boldsymbol{-6EI(\varphi_{Ag} + \varphi_{Ad})}$ **:**

$$\left.\begin{array}{l} -6EI\varphi_{Ag} = 0(Auncune\ charge\ n'agit\ sur\ la\ poutre\ A_0 - A) \\ \quad -6EI\varphi_{Bd} = -q\dfrac{l^3}{4} = -8\dfrac{3^3}{4} = -54 \\ \quad = -54kN.m^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \boldsymbol{-6EI\left(\varphi_{Ag} + \varphi_{Ad}\right)}$$

$$6M_A + 3M_B = -54$$

Point B :

$$3M_A + 2(3+2)M_B + 2M_C = -6EI(\varphi_{Bg} + \varphi_{Bd})$$

$\boldsymbol{-6EI(\varphi_{Bg} + \varphi_{Bd})}$ **:**

$$\left.\begin{array}{r} -6EI\varphi_{Bg} = -q\dfrac{l^3}{4} \\ -6EI\varphi_{Bd} = -q\dfrac{l^3}{4} - \dfrac{3}{8}Pl^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \boldsymbol{-6EI\left(\varphi_{Bg} + \varphi_{Bd}\right)} = -100kN.m^2$$

Donc :

$$3M_A + 10M_B + 2M_C = -100$$

Point C :

$$2M_B + 2(2+2)M_C + 2M_D = -6EI(\varphi_{Cg} + \varphi_{Cd})$$

$\boldsymbol{-6EI(\varphi_{Cg} + \varphi_{Cd}) :}$

$$\left.\begin{array}{r} -6EI\varphi_{Cg} = -q\dfrac{l^3}{4} - \dfrac{3}{8}Pl^2 \\ -6EI\varphi_{Cd} = -q\dfrac{l^3}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow \boldsymbol{-6EI(\varphi_{Cg} + \varphi_{Cd})} = -62kN.m^2$$

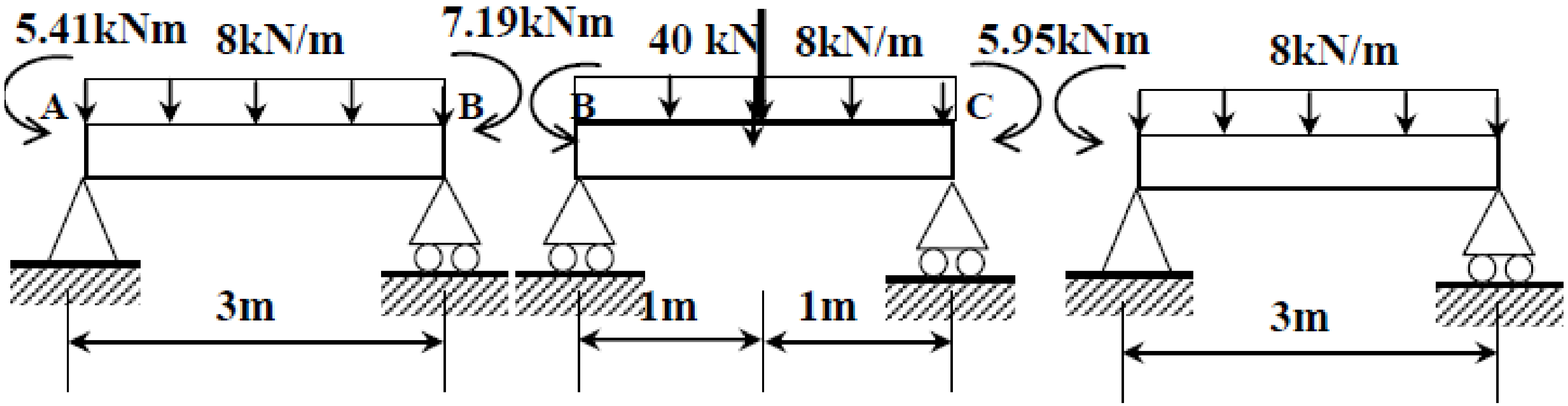
Et $M_D = 0$

Donc :

$$2M_B + 8M_C = -62kN.m^2$$

$$\begin{bmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 3 & 10 & 2 \\ 0 & 2 & 8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_A \\ M_B \\ M_C \end{Bmatrix} = -\begin{Bmatrix} 54 \\ 100 \\ 62 \end{Bmatrix} kN.m^2 \Rightarrow \begin{Bmatrix} M_A \\ M_B \\ M_C \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -5.4063 \\ -7.1875 \\ -5.9531 \end{Bmatrix} kN.$$

Calcul des réactions



Les réactions dues aux charges extérieures :

Les réactions dues aux moments appliqués aux niveaux des appuis :

Les réactions totales :

$$R_A = 11.41\ kN, R_B = 31.2kN\ et\ R_c = 5.02kN$$

Diagramme des efforts tranchants

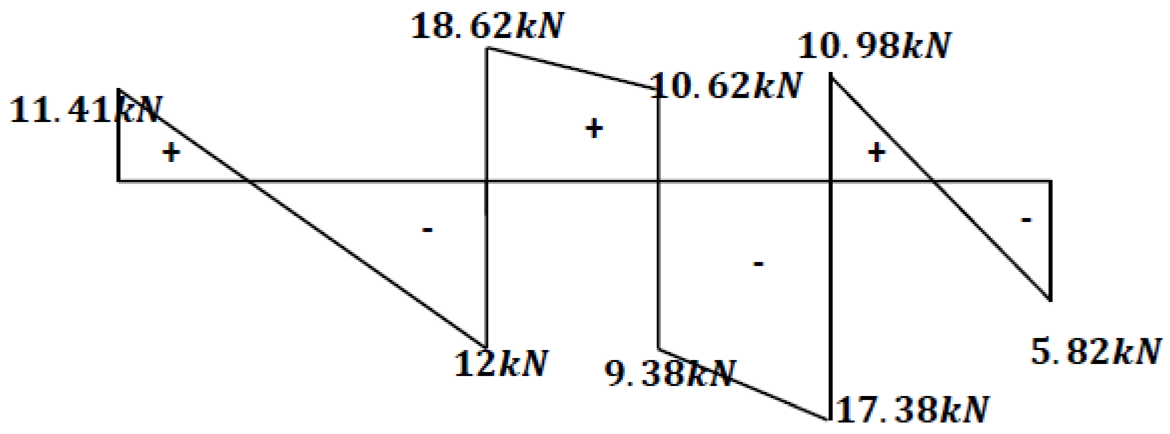
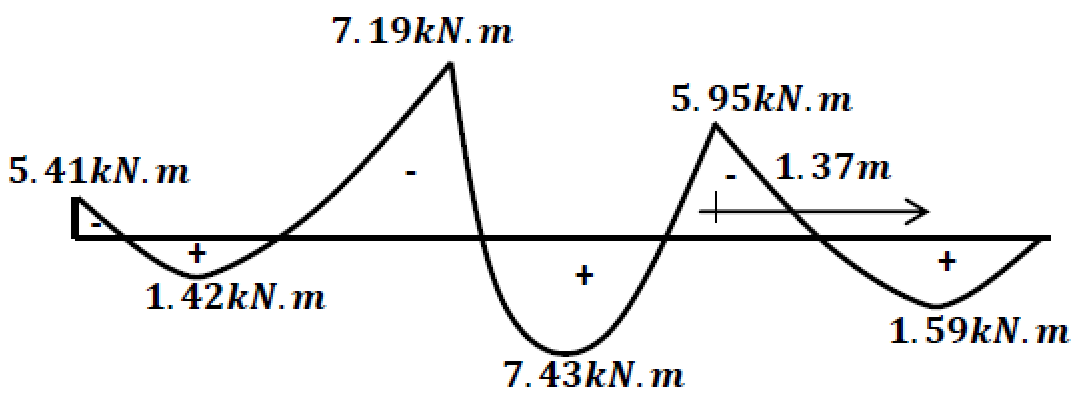
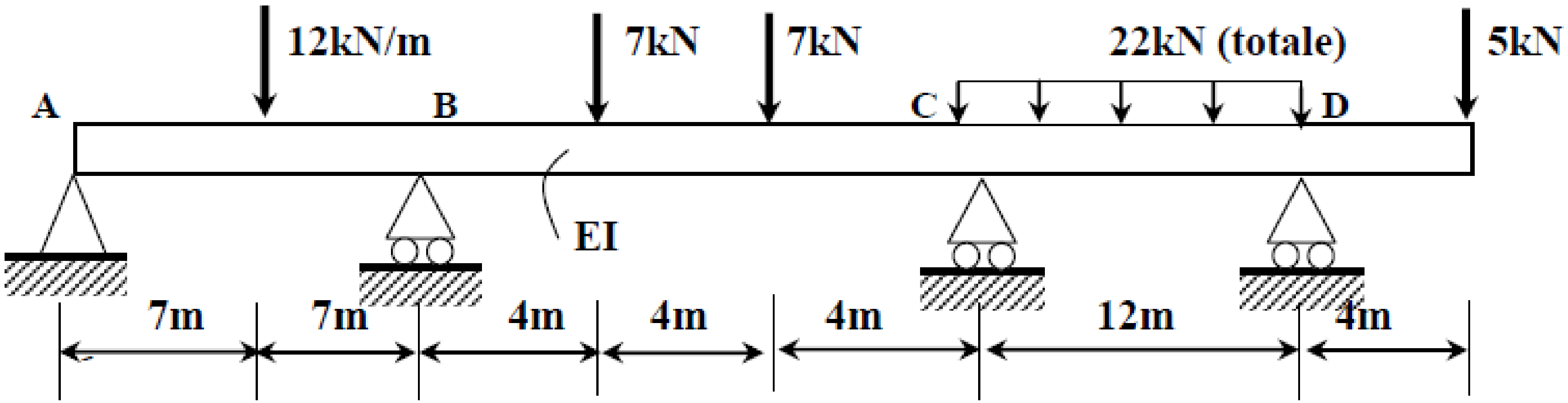


Diagramme des moments fléchissant :



App4: Poutres à 3 travées

Tracer le diagramme des moments fléchissants et de l'effort tranchant de la poutre suivante :



Point B :

$$14M_A + 2(14+12)M_B + 12M_C = -6EI(\varphi_{Bg} + \varphi_{Bd})$$

$\boldsymbol{-6EI(\varphi_{Bg} + \varphi_{Bd})}$ **:**

$$\left.\begin{aligned} -6EI\varphi_{Bg} &= -\frac{3}{8}Pl^2 = -\frac{3}{8}12.14^2 \\ -6EI\varphi_{Bd} &= -\frac{2}{3}Pl^2 = -\frac{2}{3}7.12^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boldsymbol{-6EI\left(\varphi_{Bg} + \varphi_{Bd}\right)} = -1554kN.m^2$$

Et $M_A = 0$

Donc :

$$52M_B + 12M_C = -1554kN.m^2$$

Point C :

$$12M_B + 2(12+12)M_C + 12M_D = -6EI(\varphi_{Cg} + \varphi_{Cd})$$

$\boldsymbol{-6EI(\varphi_{Cg} + \varphi_{Cd})}$ **:**

$$\left.\begin{aligned} -6EI\varphi_{Cg} &= -\frac{2}{3}Pl^2 = -\frac{2}{3}7.12^2 \\ -6EI\varphi_{Cd} &= -q\frac{l^3}{4} = -1.833\frac{12^3}{4} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boldsymbol{-6EI\left(\varphi_{Cg} + \varphi_{Cd}\right)} = -1464kN.m^2$$

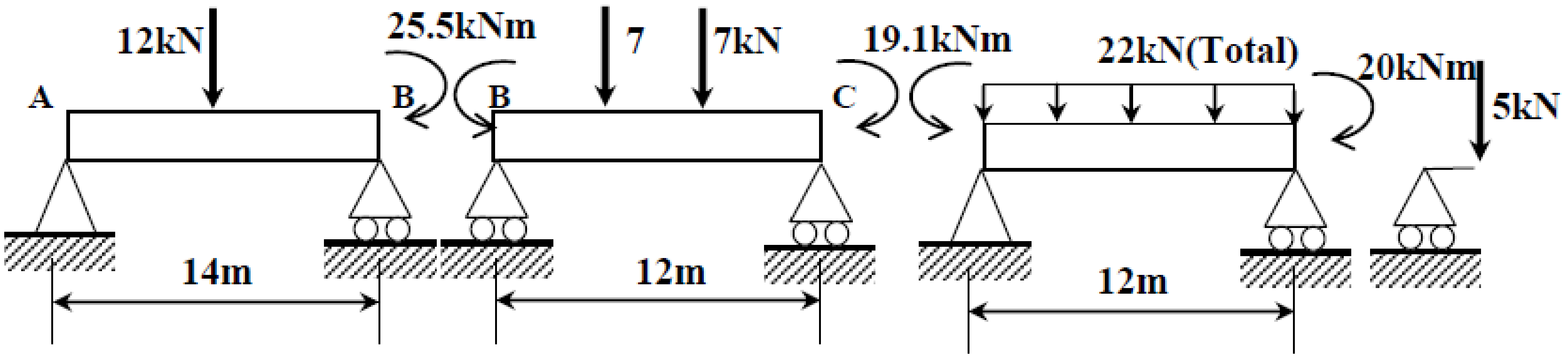
Et $M_D = -20kN.m$

Donc :

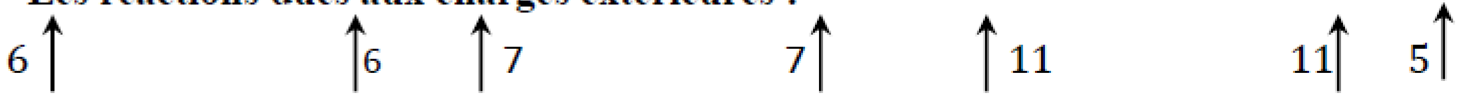
$$16M_B + 56M_C = -1464 - 12(-20)$$

$$\begin{bmatrix} 52 & 12 \\ 12 & 48 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_B \\ M_C \end{Bmatrix} = -\begin{Bmatrix} 1554 \\ 1224 \end{Bmatrix} kN.m^2 \Longrightarrow \begin{Bmatrix} M_B \\ M_C \end{Bmatrix} = -\begin{Bmatrix} 25.5 \\ 19.1 \end{Bmatrix} kN.m$$

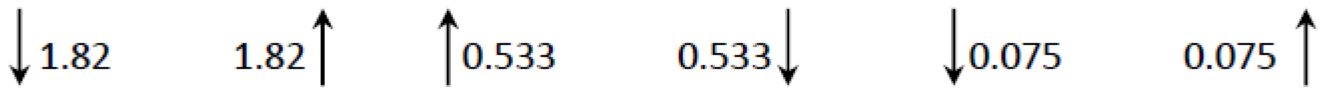
Calcul des réactions



Les réactions dues aux charges extérieures :



Les réactions dues aux moments appliqués aux niveaux des appuis :



Les réactions totales :

$$R_A = 4.18\ kN,\quad R_B = 15.1246kN,\quad R_c = 17.39kN\ et\ R_D = 16.07kN$$

Diagramme des efforts tranchants

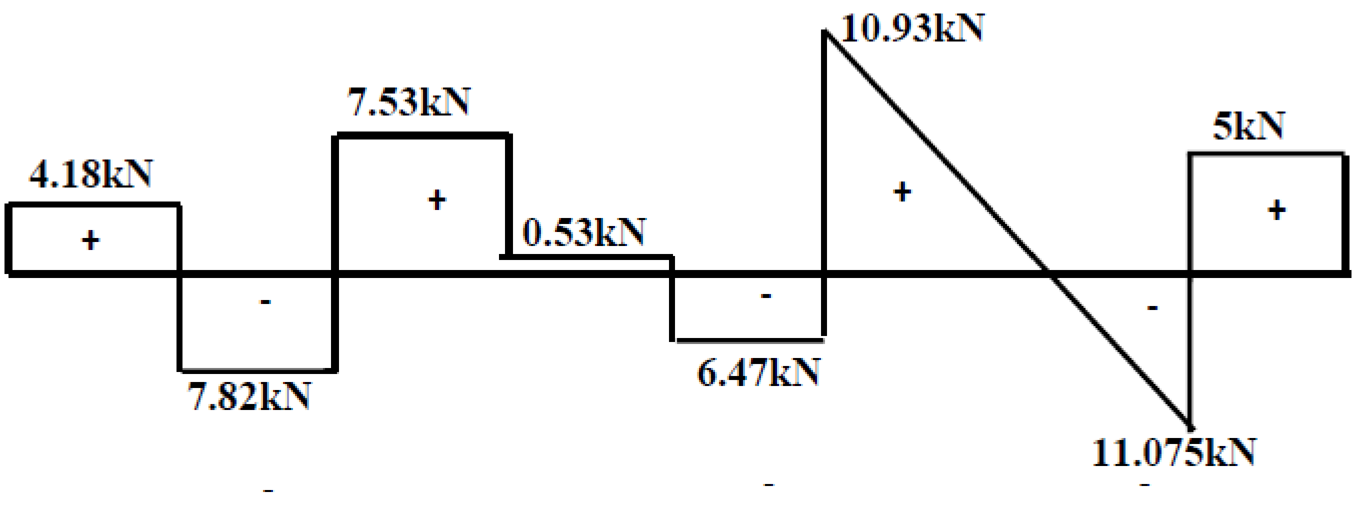
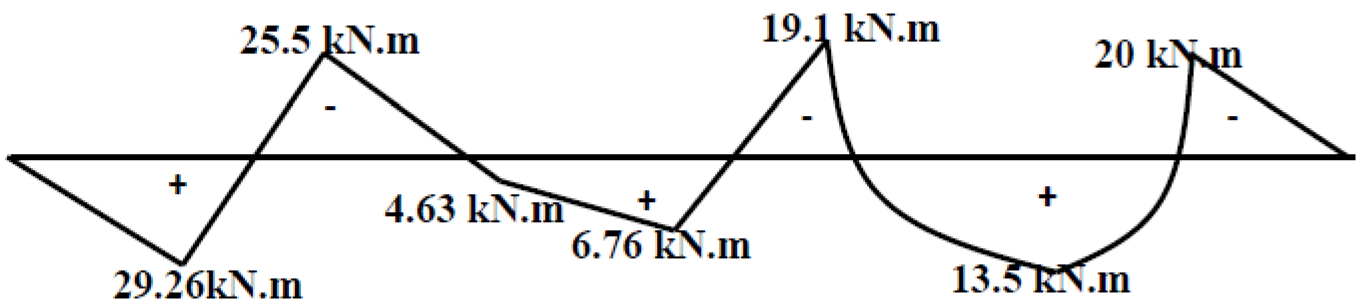


Diagramme des moments fléchissant :



Chap. 5:
Applications supplémentaires

AS1: Poutre SS et encastrée

Soit la structure (S) de la figure (5-4), simplement appuyée en A et encastrée en B, d'inertie flexionnelle E.I constante et soumise à une charge uniformément répartie q.

1. Calculer le degré d'hyperstatique de la structure S.

2. Déterminer les expressions des moments aux appuis.

3. Déterminer les expressions des efforts internes le long de S.

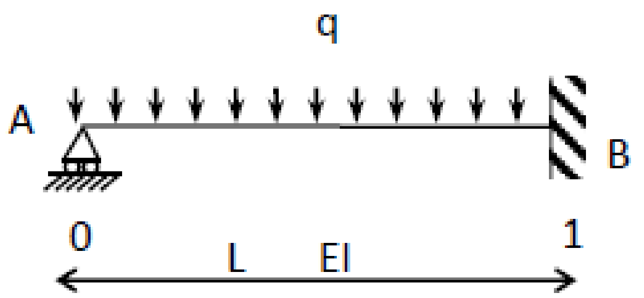
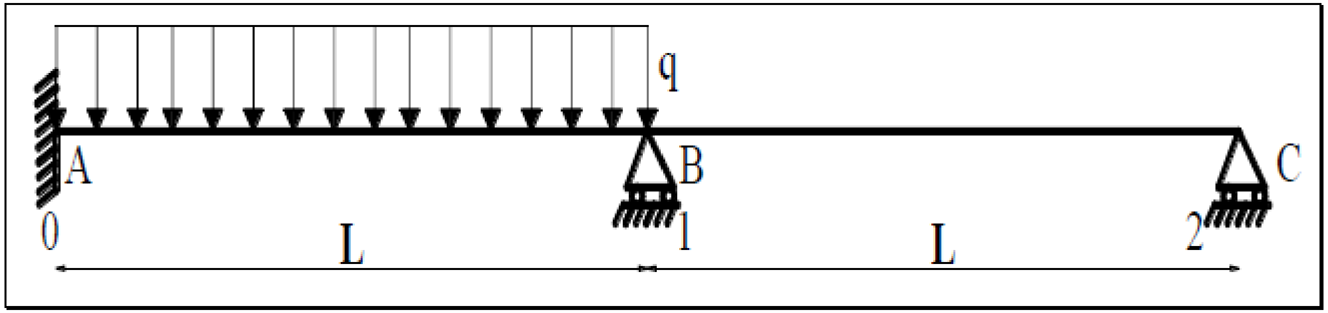


Figure 5-4 : Schéma statique de (S)
(exercice 5.1)

AS2: Poutre ABC

On considère la poutre continue ABC constituée de deux travées de mêmes longueurs l et de même inerties flexionnelles EI.



1. Calculer le degré d'hyperstatique de ABC.

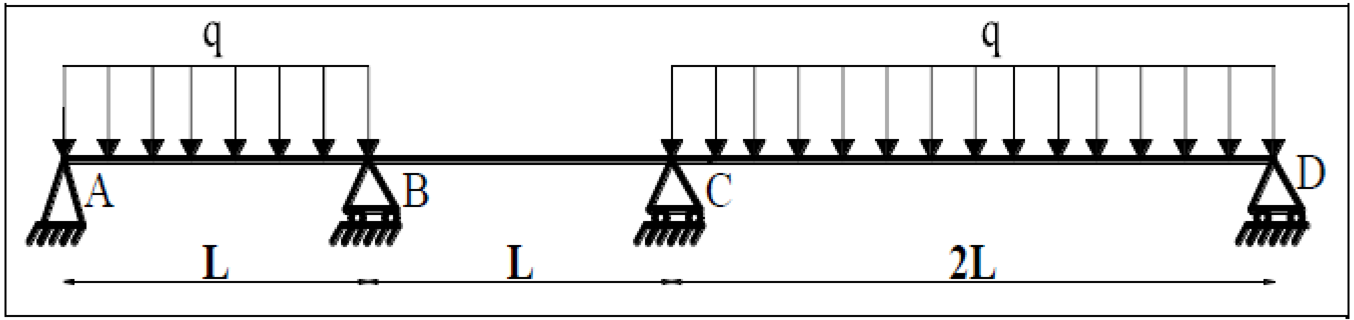
2. Déterminer les moments aux appuis.

3. En déduire l'expression du moment fléchissant et l'effort tranchant le long de la poutre, ainsi que les réactions aux appuis.

4. Tracer les diagrammes des efforts internes.

AS3: Poutre ABCD

On considère la poutre hyperstatique ABCD, ci-dessous, constituée de trois travées de même inertie flexionnelle EI.



1. Calculer le degré d'hyperstatique de cette structure.

2. Déterminer les moments aux appuis.

3. En déduire l'expression du moment fléchissant et l'effort tranchant le long de la poutre, ainsi que les réactions aux appuis.

4. Tracer les diagrammes des efforts internes.

AS4: Poutres à 3 travées

Soit la poutre continue à quatre travées de la figure 5.23. Supposons les moments d'inertie suivants : $I_1 = 1$, $I_2 = I_3 = 2$ et $I_4 = 1,5$.

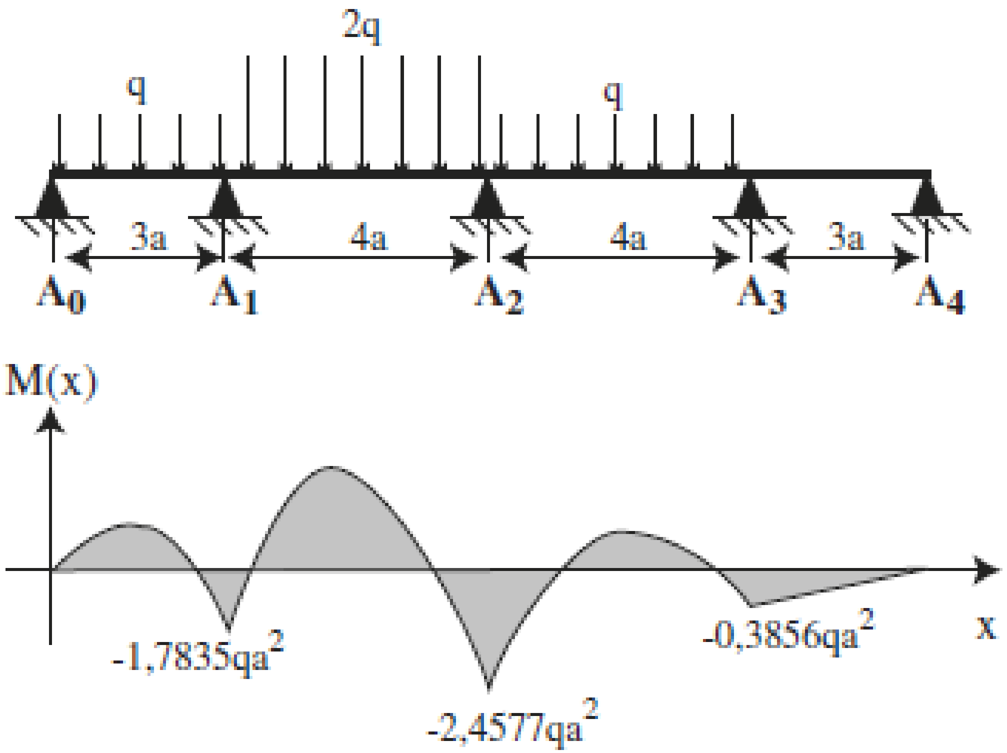
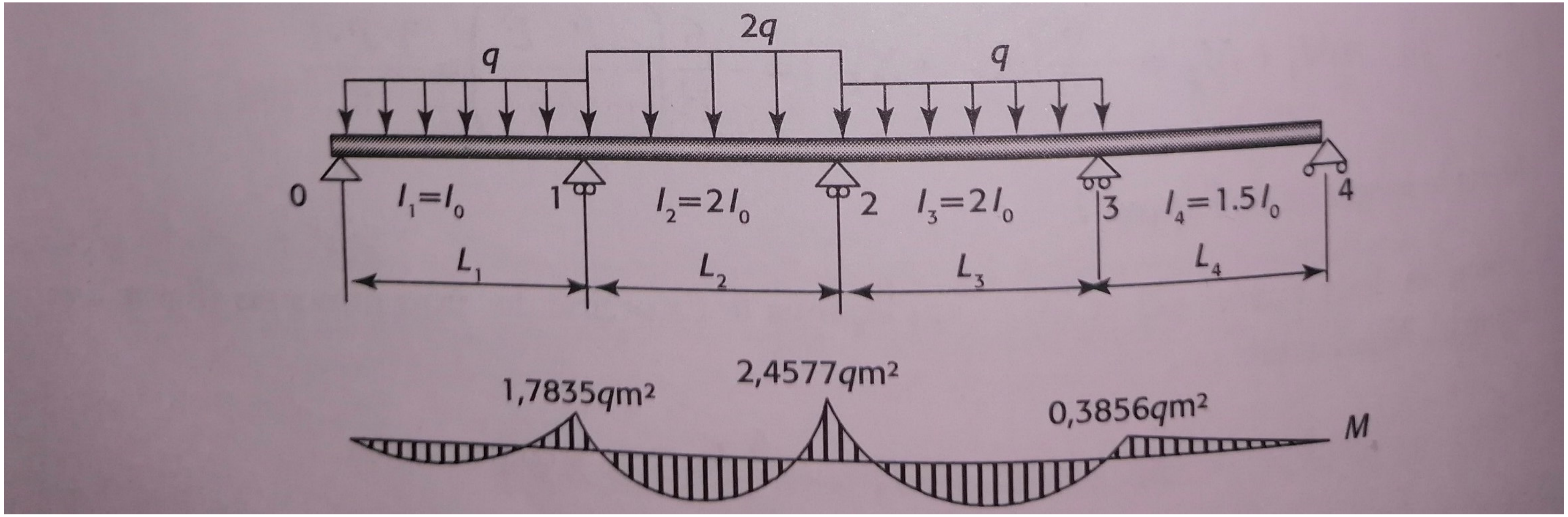


Figure 5.23 Exemple d'application de la formule des trois moments

AS5: Poutre à quatre travées

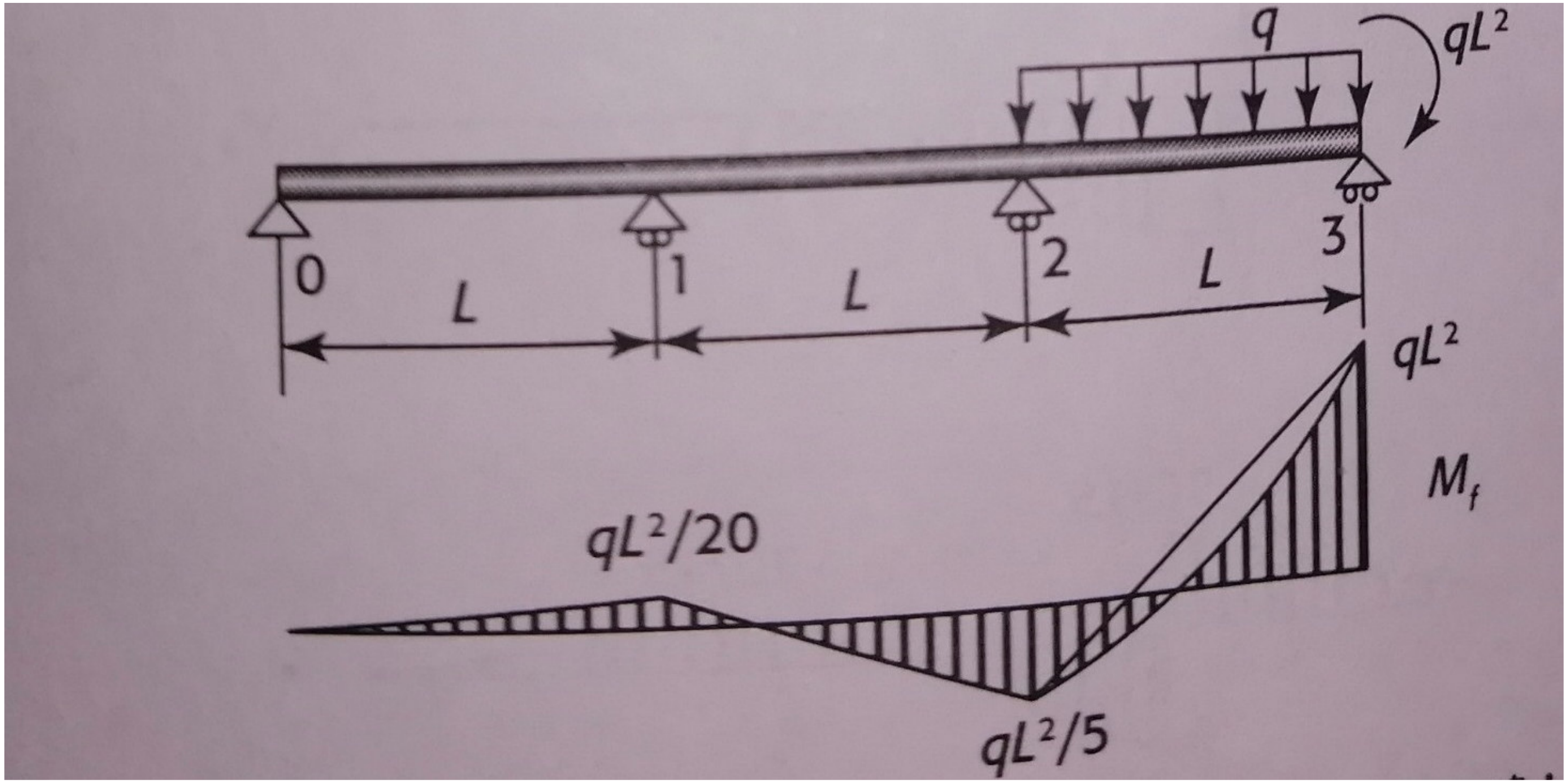
On considère la poutre à quatre travées égales. Les longueur des travées sont $L_1 = L_4 = 3\text{m}$ et $L_2 = L_3 = 4$ m. **Déterminer les moments de flexion aux droits des appuis.**



AS6: Poutre à trois travées

On considère la poutre à trois travées égales, supporte une charge uniforme partielle.

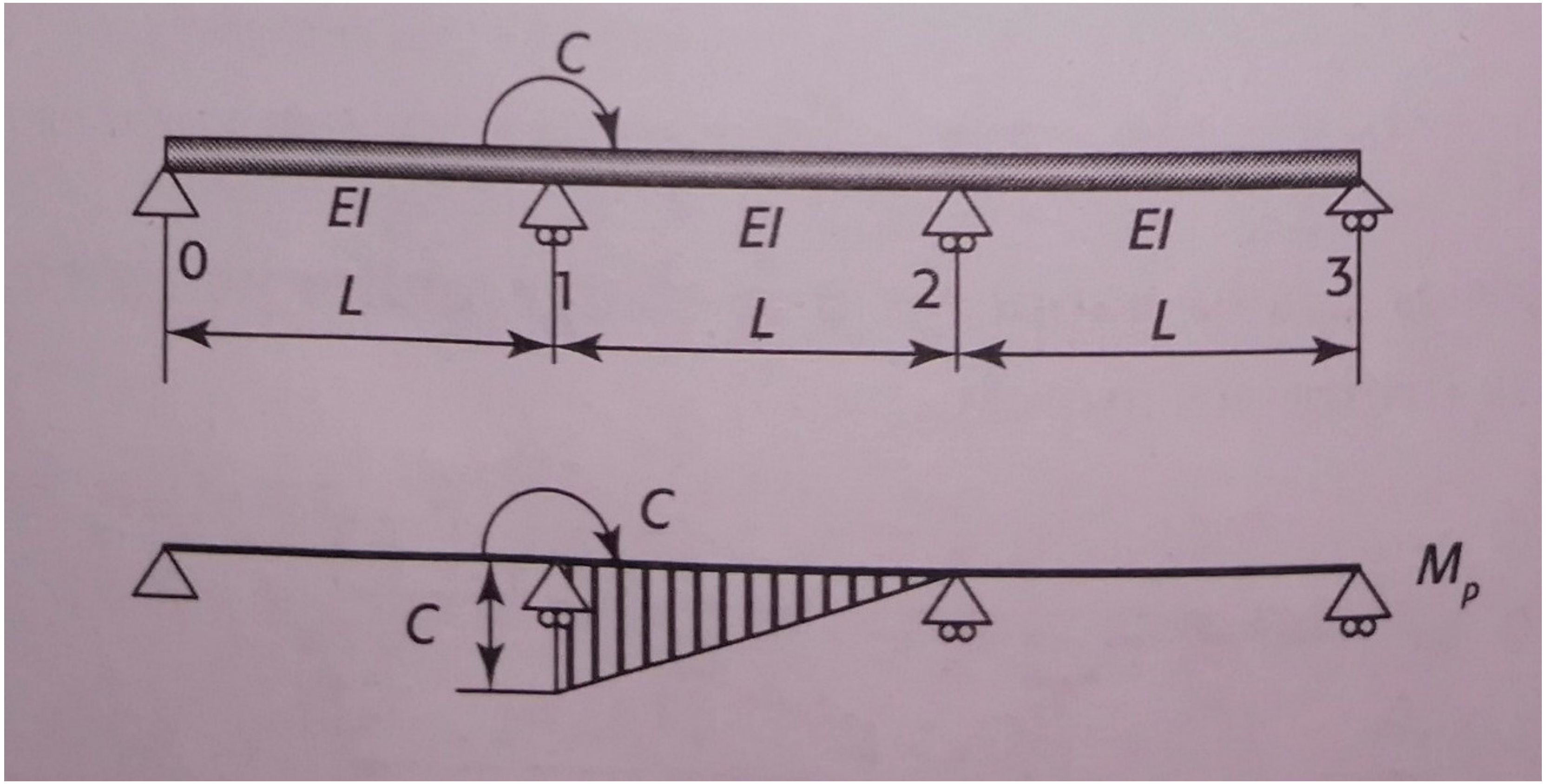
Déterminer les moments de flexion aux droits des appuis.



AS7: Poutre à quatre travées

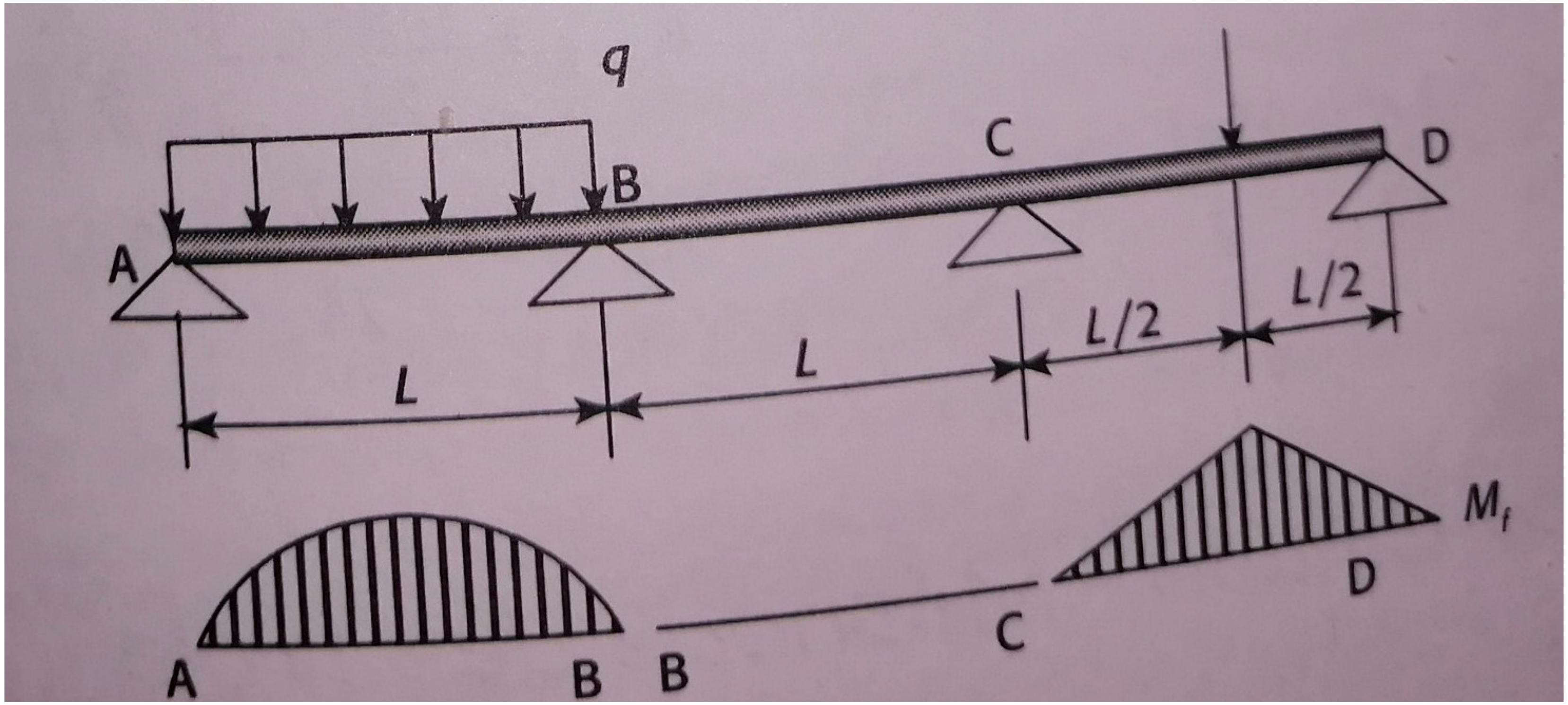
On considère la poutre droite continue à trois travées égales, supporte un couple C.

Déterminer les moments de flexion aux appuis 1 et 2.



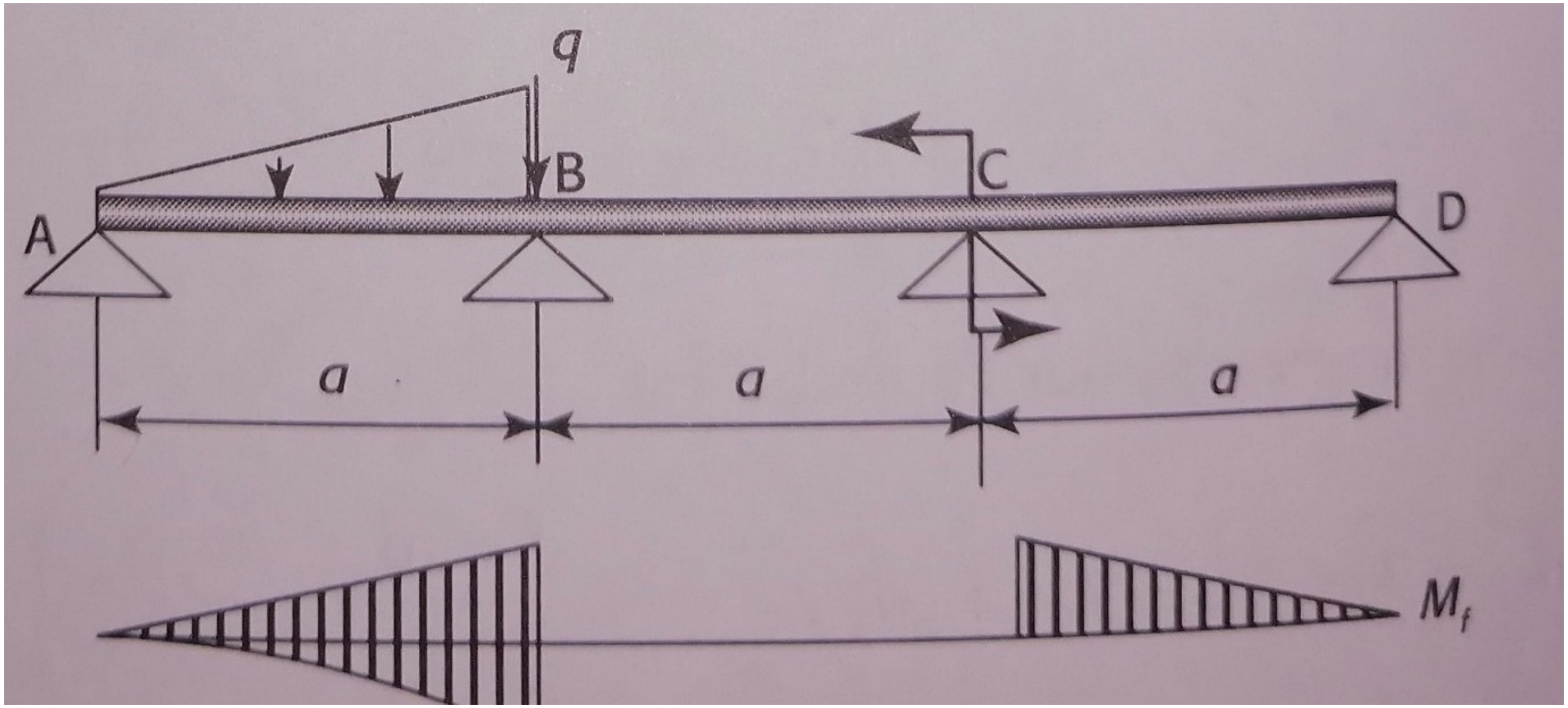
AS8: Poutre à quatre travées

La poutre droite continue à trois travées, sur quatre appuis équidistants, supporte une charge uniformément répartie et une charge concentrée. **Déterminer les réactions des appuis.**



AS9: Poutre à trois travées

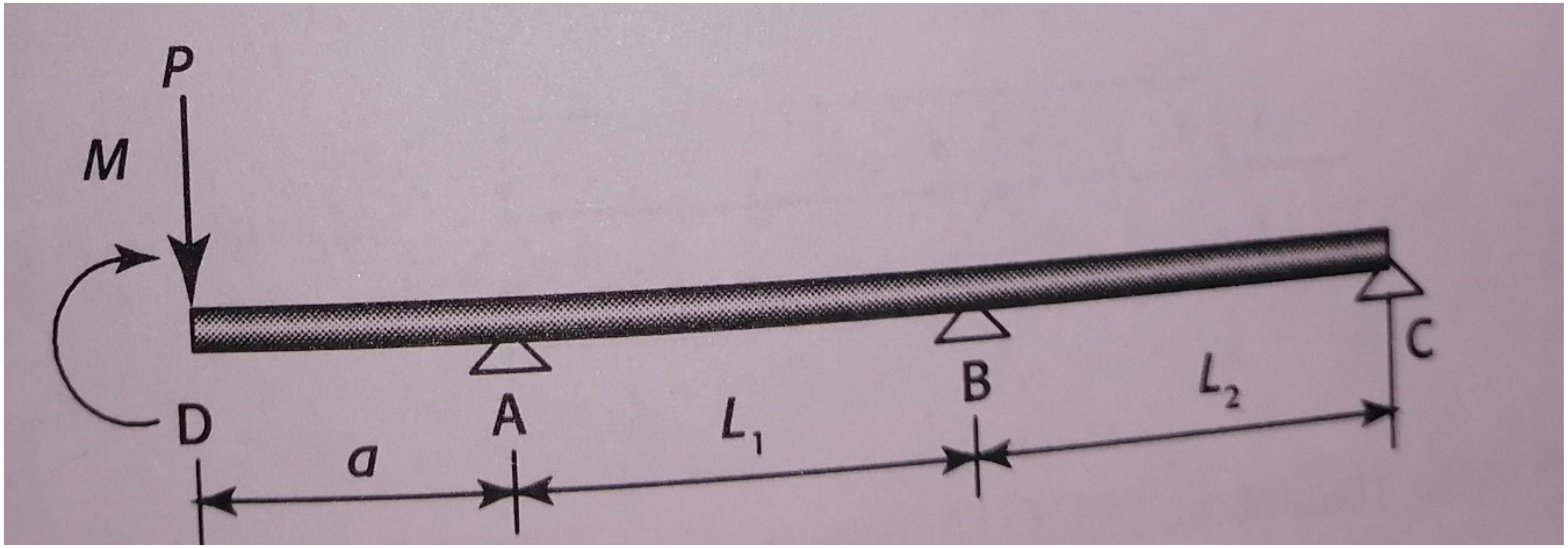
La poutre droite continue à trois travées, sur quatre appuis équidistants, supporte une charge triangulaire et un couple C. **Déterminer les moments de flexion des appuis B et C.**



AS10: Poutre en porte à faux

Une poutre droite continue, à une extimité en porte à faux, repose des appuis simples.

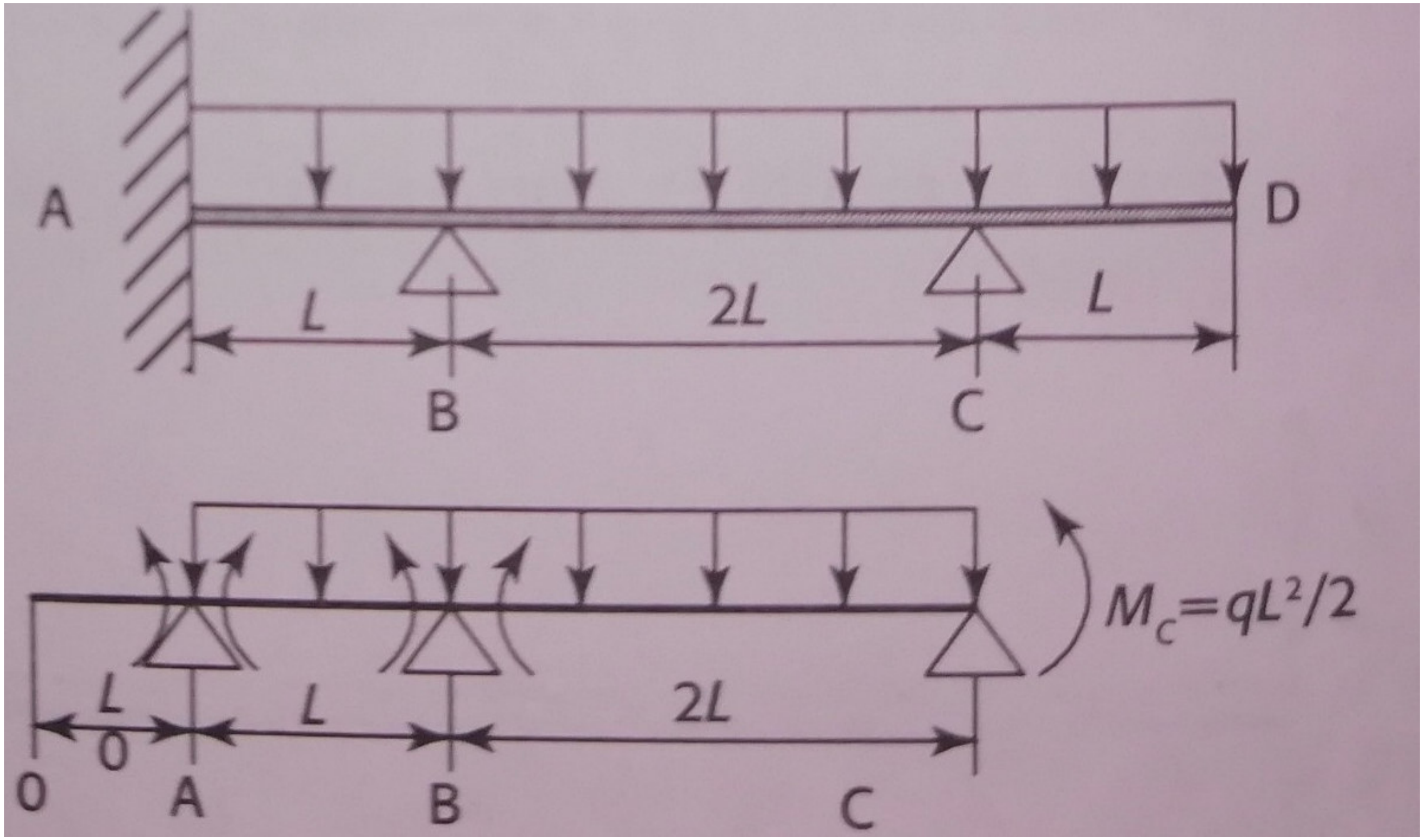
Déterminer les réactions des appuis.



AS11: Poutre avec extrémité encastrée

Une poutre droite continue, avec une extimité encastrée, supporte une charge uniformément répartie.

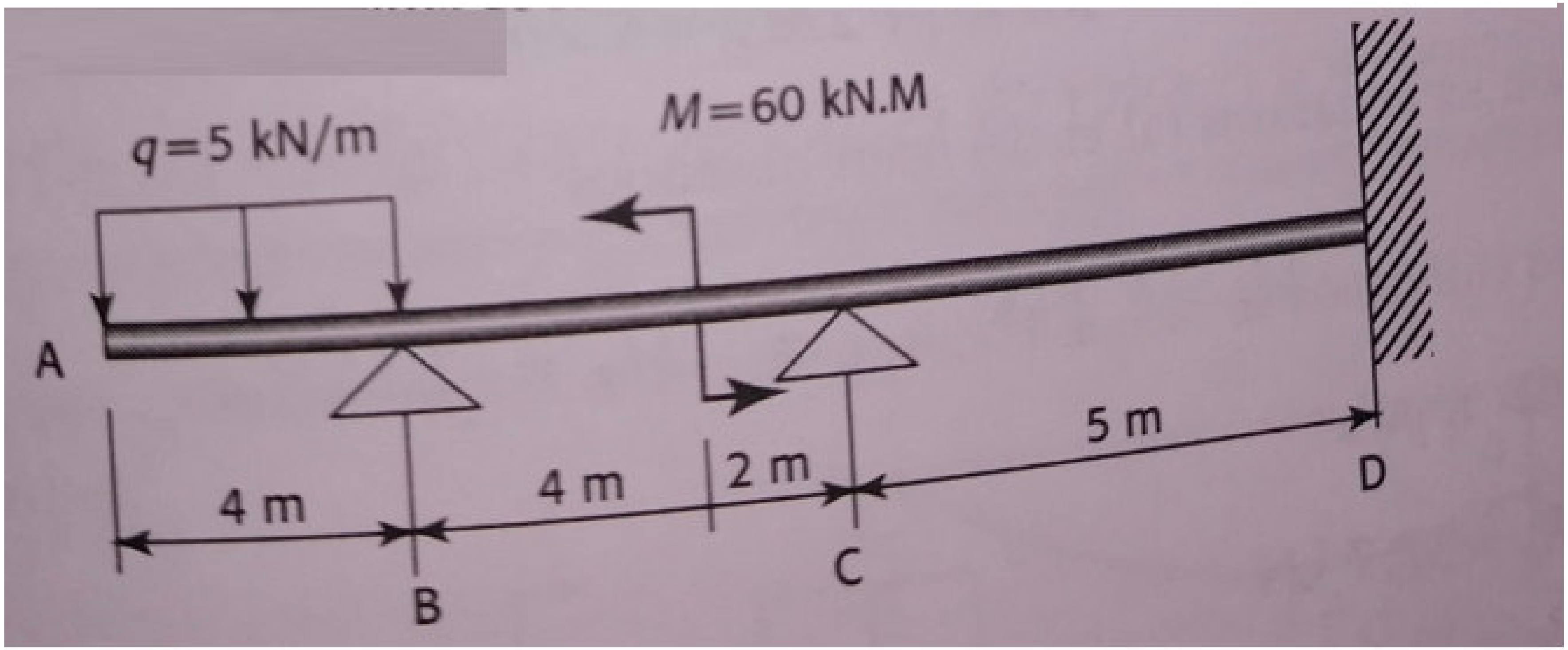
Déterminer les réactions des appuis.



AS12: Poutre avec extrémité en PF encastrée

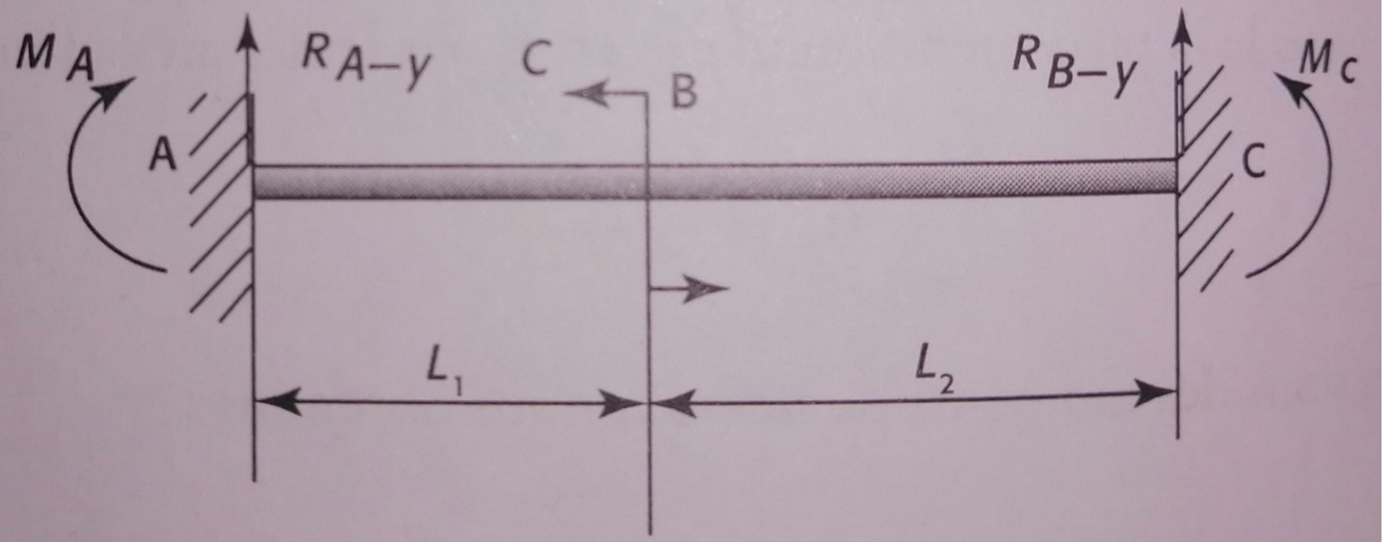
Une poutre droite continue à l'extimité en porte à faux et encastrée sur une extrémité.

Déterminer les réactions des appuis et les moments de flexion.



AS13: Poutre bi-encastrée

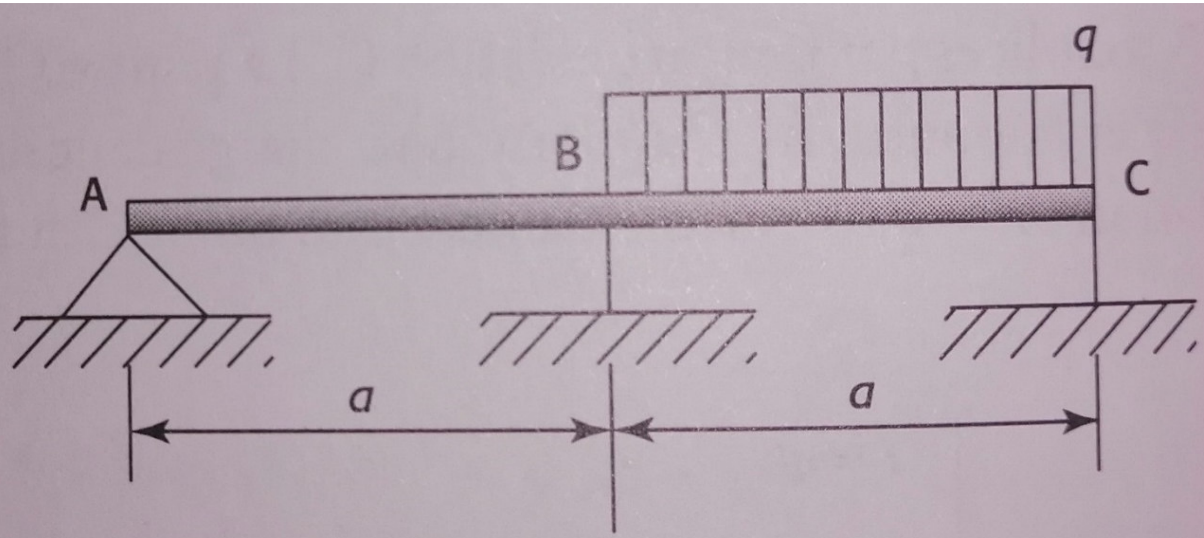
Une poutre avec EI constante supporte un coupe C. **Calculer les réactions des deux extimités.**



Réponse : $R_{A-y} = R_{C-y} = \dfrac{3M_C}{2L}$; $M_A = M_C = \dfrac{M_C}{4}$

AS14: Poutres sur trois appuis

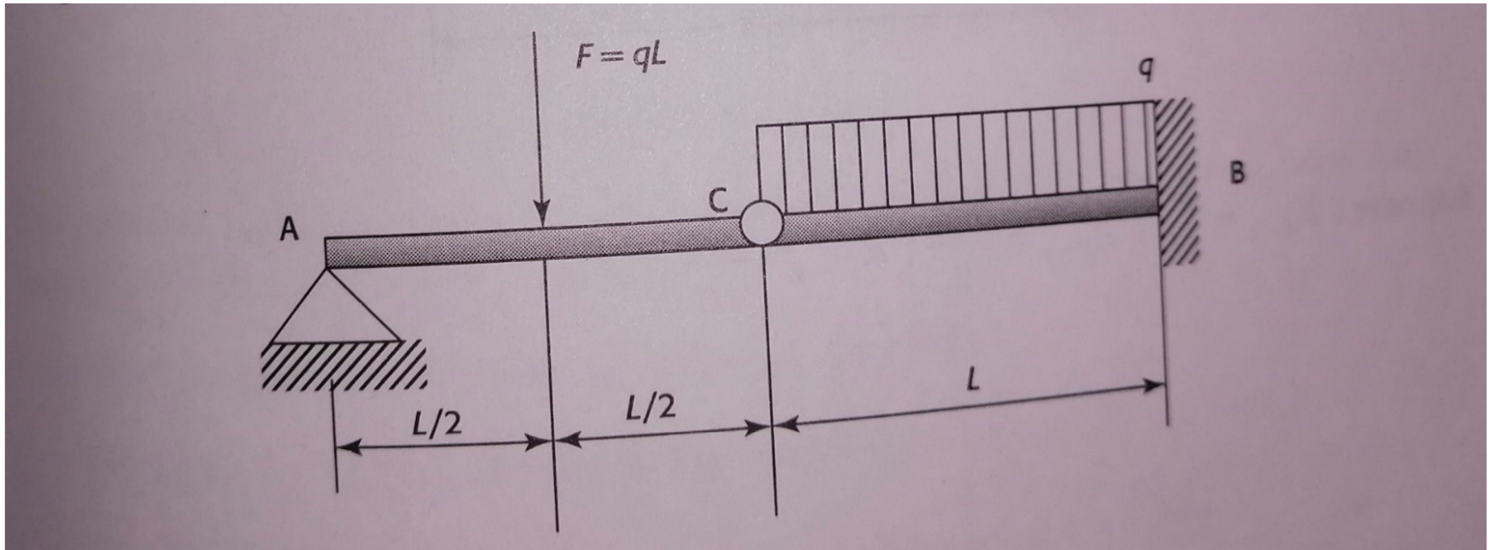
Une poutres continue ABC repose sur trois appuis. La partie BC de la poutre supporte une charge uniformément répartie **Calculer les réactions des trois appuis.**



Réponse : $R_{A-y} = \dfrac{qa}{16}$; $R_{B-y} = \dfrac{5qa}{8}$; $R_{C-y} = \dfrac{7qa}{16}$.

AS15: Deux poutres liées

Deux poutres AC et CB sont liées par une articulation **C**. La poutre CB supporte une charge uniformément répartie **q** et la poutre AC supporte une charge concentrée **F**. Entre les deux charges il existe une relation **F=qL**. **Calculer la flèche au point C et l'angle de déformation au point A.**



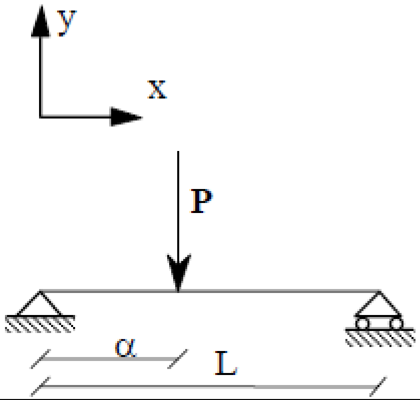
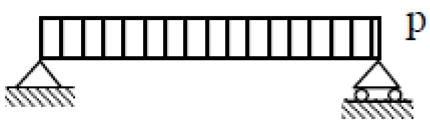
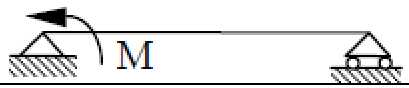
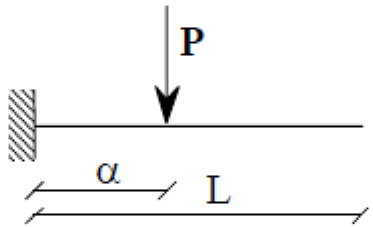
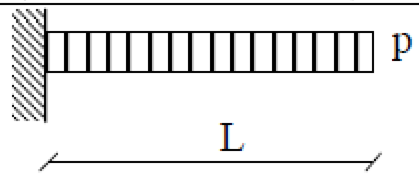
Réponse : $f_C = -\dfrac{7qL^4}{24EI}$ (↓) ; $\theta_A = \dfrac{17qL^3}{48EF}$

FORMULAIRES

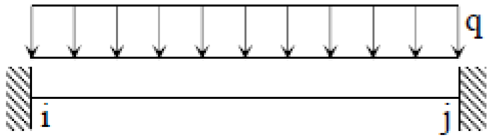
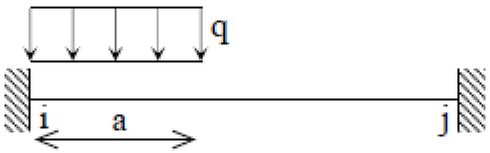
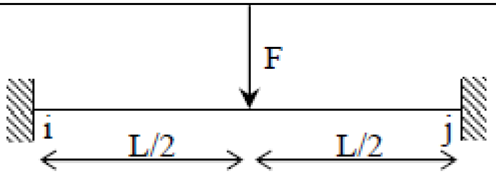
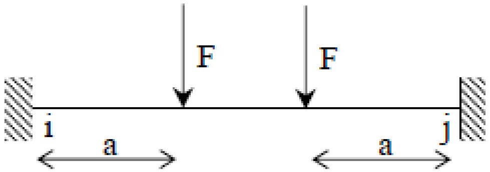
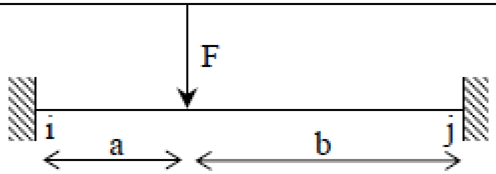
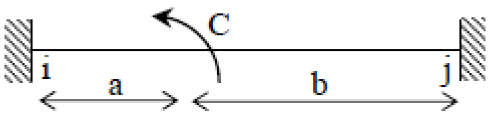
Liste des formulaires

1. **Formulaire de flèches de poutres isostatiques.**
2. **Formulaire des réactions de liaison de la poutre bi-encastrée.**
3. ***Valeur de*** $\boldsymbol{6\theta_i^g}$ ***et*** $\boldsymbol{6\theta_i^d}$
4. ***Valeur de*** $\boldsymbol{\frac{L}{EI}\int_0^L M_i m_j dx}$
5. **Formulaire de la poutre continue à 2 travées égales.**
6. **Formulaire de la poutre continue à 3 travées égales.**
7. **Formulaire de la poutre continue à 4 travées égales.**
8. **Formulaire de la poutre continue à 5 travées égales.**

1. Formulaire de flèches de poutres isostatiques

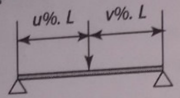
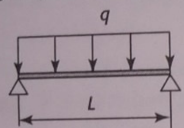
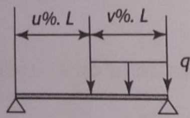
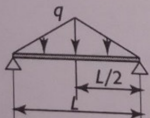
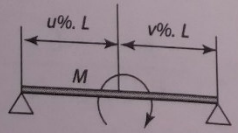
	$0 \le x \le \alpha$: $y(x) = \frac{P(L-\alpha)}{6EIL}[x^3 - \alpha(2L-\alpha)x]$ $\quad y'(x) = \frac{P(L-\alpha)}{6EIL}[3x^2 - \alpha(2L-\alpha)]$ $\alpha \le x \le L$: $y(x) = \frac{P\alpha}{6EIL}[(L-x)^3 - (L-\alpha)(L+\alpha)(L-x)]$ $y'(x) = \frac{P\alpha}{6EIL}[-3(L-x)^2 + (L-\alpha)(L+\alpha)]$ $y(\alpha) = -\frac{P\alpha^2(L-\alpha)^2}{3EIL}$ pour $x=\alpha$ $y(\frac{L}{2}) = -\frac{PL^3}{48EI}$ pour $x=\alpha=\frac{L}{2}$
	$y(x) = -\frac{p}{24EI}(x^4 - 2Lx^3 + L^3x)$ $\quad y'(x) = -\frac{p}{24EI}(4x^3 - 6Lx^2 + L^3)$ $y(\frac{L}{2}) = -\frac{5pL^4}{384EI}$ pour $x=\frac{L}{2}$
	$y(x) = \frac{M}{6EIL}(x^3 - 3Lx^2 + 2L^2x)$ $\quad y'(x) = \frac{M}{6EIL}(3x^2 - 6Lx + 2L^2)$
	$0 \le x \le \alpha$: $y(x) = \frac{Px^2(x-3\alpha)}{6EI}$ $\quad y'(x) = \frac{Px(x-2\alpha)}{2EI}$ $\alpha \le x \le L$: $y(x) = \frac{P\alpha^2(\alpha-3x)}{6EI}$ $y(L) = -\frac{PL^3}{3EI}$ pour $x=\alpha=L$
	$y(x) = -\frac{p}{24EI}(x^4 - 4Lx^3 + 6L^2x^2)$ $\quad y'(x) = -\frac{p}{6EI}(x^3 - 3Lx^2 + 3L^2x)$ $y(L) = -\frac{pL^4}{8EI}$ pour $x=L$

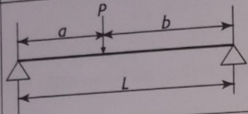
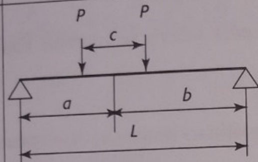
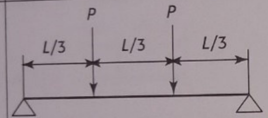
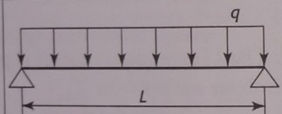
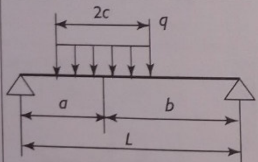
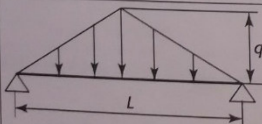
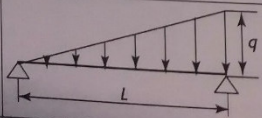
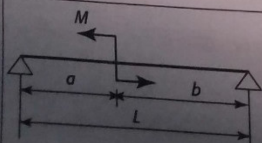
2. Formulaire des réactions de liaison de la poutre bi-encastrée

	$T_{ij}^0 = \frac{qL}{2}$; $T_{ji}^0 = \frac{qL}{2}$; $M_{ij}^0 = \frac{qL^2}{12}$; $M_{ji}^0 = \frac{-qL^2}{12}$
	$T_{ij}^0 = \frac{qa^3}{L^2}(1-\frac{a}{2L})$; $T_{ji}^0 = qa(1-\frac{a^2}{L^2}+\frac{a^3}{2L^3})$ $M_{ij}^0 = \frac{qa^2}{12L^2}(6L^2-8aL+3a^2)$; $M_{ji}^0 = \frac{-qa^3}{12L^2}(4L-3a)$
	$T_{ij}^0 = \frac{F}{2}$; $T_{ji}^0 = \frac{F}{2}$; $M_{ij}^0 = \frac{FL}{8}$; $M_{ji}^0 = \frac{-FL}{8}$
	$T_{ij}^0 = F$; $T_{ji}^0 = F$; $M_{ij}^0 = \frac{Fa(L-a)}{L}$; $M_{ji}^0 = \frac{-Fa(L-a)}{L}$
	$T_{ij}^0 = \frac{Fb^2}{L^3}(b+3a)$; $T_{ji}^0 = \frac{Fa^2}{L^3}(3b+a)$; $M_{ij}^0 = \frac{Fab^2}{L^2}$; $M_{ji}^0 = \frac{-Fba^2}{L^2}$
	$T_{ij}^0 = \frac{6abC}{L^3}$; $T_{ji}^0 = \frac{-6abC}{L^3}$; $M_{ij}^0 = \frac{b(2a-b)}{L^2}C$; $M_{ji}^0 = \frac{a(2b-a)}{L^2}C$

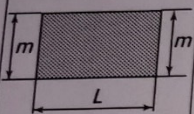
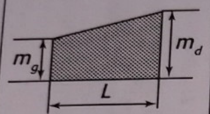
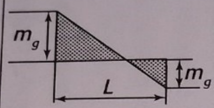
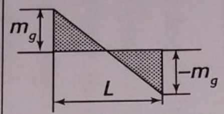
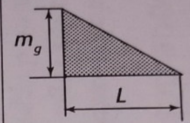
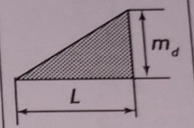
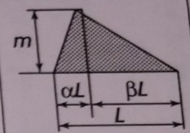
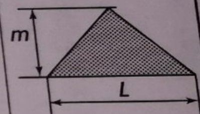
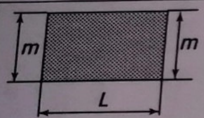
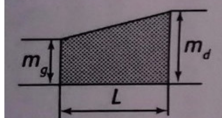
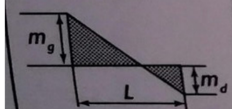
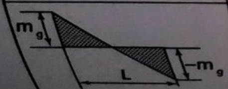
3. $Valeur\ de\ 6\theta_i^g\ et\ 6\theta_i^d$

Tableau 6.3 Valeur de 6A et 6B

Charge	6A	6B
a/ Charge concentrée 	$6A = PL^2 \cdot u\% \cdot v\% \cdot (1+v\%)$	$6B = PL^2 \cdot u\% \cdot v\% \cdot (1+u\%)$
b/ Charge uniformément répartie 	$6A = \frac{qL^3}{4}$	$6B = \frac{qL^3}{4}$
c/ Charge uniforme 	$6A = \frac{qL^3}{4}(v\%)^2[2-(v\%)^2]$	$6B = \frac{qL^3}{4}(v\%)^2[2-(v\%)]^2$
d/ Charge uniforme triangulaire 	$6A = \frac{5}{32}qL^3$	$6B = \frac{5}{32}qL^3$
e/ Couple 	$6A = -ML\ (1-3\ v^2\%)$	$6B = ML\ (1-3\ u^2\%)$
	$u=0,\quad v=100\%$ $6A = 2ML$	$u=0,\quad v=100\%$ $6B = ML$
	$u=100\%, v=0$ $6A = -ML$	$u=100\%,\ v=0$ $6B = -2ML$

		Aire de moment fléchissant ω_n	Coefficient $C_1 = \frac{\omega_n \alpha_n}{L_n}$	Coefficient $C_2 = \frac{\omega_{n+1} b_{n+1}}{L_{n+1}}$
1		$\omega_n = \frac{1}{2}Pab$	$C_1 = \frac{\omega_n \alpha_n}{L_n} = \frac{Pab}{6L}(L+a)$	$C_2 = \frac{\omega_{n+1} b_{n+1}}{L_{n+1}} = \frac{Pab}{6L}(L+b)$
2		$\omega_n = P\left(ab - \frac{c^2}{4}\right)$	$C_1 = \frac{\omega_n \alpha_n}{L_n} = \frac{Pa}{6L}\left[2b\cdot(L+c) - \frac{3c^2}{2}\right]$	$C_2 = \frac{\omega_{n+1} b_{n+1}}{L_{n+1}} = \frac{Pb}{6L}\left[2a\cdot(L+b) - \frac{3c^2}{2}\right]$
3		$\omega_n = \frac{2}{9}PL^2$	$C_1 = \frac{\omega_n \alpha_n}{L_n} = \frac{1}{9}PL^2$	$C_2 = \frac{\omega_{n+1} b_{n+1}}{L_{n+1}} = \frac{1}{9}PL^2$
4		$\omega_n = \frac{1}{12}qL^3$	$C_1 = \frac{\omega_n \alpha_n}{L_n} = \frac{1}{24}qL^3$	$C_2 = \frac{\omega_{n+1} b_{n+1}}{L_{n+1}} = \frac{1}{24L}qL^3$
5		$\omega_n = \frac{qc}{3}(3ab - c^2)$	$C_1 = \frac{\omega_n \alpha_n}{L_n} = \frac{qac}{3L}(L^2 - a^2 - c^2)$	$C_2 = \frac{\omega_{n+1} b_{n+1}}{L_{n+1}} = \frac{qbc}{3L}(L^2 - a^2 - c^2)$
6		$\omega_n = \frac{5}{96}qL^3$	$C_1 = \frac{\omega_n \alpha_n}{L_n} = \frac{5}{192}qL^3$	$C_2 = \frac{\omega_{n+1} b_{n+1}}{L_{n+1}} = \frac{5}{192}qL^3$
7		$\omega_n = \frac{1}{24}qL^3$	$C_1 = \frac{\omega_n \alpha_n}{L_n} = \frac{8}{360}qL^3$	$C_2 = \frac{\omega_{n+1} b_{n+1}}{L_{n+1}} = \frac{7}{360}qL^3$
8		$\omega_n = \frac{1}{2}M(a-b)$	$C_1 = \frac{\omega_n \alpha_n}{L_n} = \frac{M}{6L}(3a^2 - L^2)$	$C_2 = \frac{\omega_{n+1} b_{n+1}}{L_{n+1}} = \frac{M}{6L}(L^2 - 3b^2)$

4. Valeur de $\frac{L}{EI}\int_0^L M_i m_j \, dx$

M_i	m_j							
								
	$\Delta_{ij}=\frac{L}{EI}Mm$	$\Delta_{ij}=\frac{L}{2EI}\cdot M(m_g+m_d)$	$\Delta_{ij}=\frac{L}{2EI}\cdot M(m_g+m_d)$	0	$\Delta_{ij}=\frac{L}{2EI}Mm_g$	$\Delta_{ij}=\frac{L}{2EI}Mm_d$	$\Delta_{ij}=\frac{L}{2EI}Mm$	$\Delta_{ij}=\frac{L}{2EI}Mm$
	$\Delta_{ij}=\frac{L}{2EI}\cdot(M_g+M_d)m$	$\Delta_{ij}=\frac{L}{6EI}(2M_gm_g+M_gm_d+M_dm_g+2M_dm_d)$	$\Delta_{ij}=\frac{L}{6EI}(2M_gm_g+M_gm_d+M_dm_g+2M_dm_d)$	$\Delta_{ij}=\frac{L}{6EI}(M_g-M_d)m$	$\Delta_{ij}=\frac{L}{6EI}m_g(2M_g+M_d)$	$\Delta_{ij}=\frac{L}{6EI}m_d(M_g+2M_d)$	$\Delta_{ij}=\frac{L}{6EI}\cdot[(M_g(1+\beta)+M_d(1+\alpha)]m$	$\Delta_{ij}=\frac{L}{4EI}m(M_g+m_d)$
	$\Delta_{ij}=\frac{L}{2EI}\cdot(M_g+M_d)m$	$\Delta_{ij}=\frac{L}{6EI}(2M_gm_g+M_gm_d+M_dm_g+2M_dm_d)$	$\Delta_{ij}=\frac{L}{6EI}(2M_gm_g+M_gm_d+M_dm_g+2M_dm_d)$	$\Delta_{ij}=\frac{L}{6EI}(M_g-M_d)m$	$\Delta_{ij}=\frac{L}{6EI}m_g(2M_g+M_d)$	$\Delta_{ij}=\frac{L}{6EI}m_d(M_g+2M_d)$	$\Delta_{ij}=\frac{L}{6EI}\cdot[(M_g(1+\beta)+M_d(1+\alpha)]m$	$\Delta_{ij}=\frac{L}{4EI}m(M_g+m_d)$
	0	$\Delta_{ij}=\frac{L}{6EI}M_g(m_g-m_d)$	$\Delta_{ij}=\frac{L}{6EI}M_g(m_g-m_d)$	$\Delta_{ij}=\frac{L}{3EI}M_gm$	$\Delta_{ij}=\frac{L}{6EI}M_gm$	$\Delta_{ij}=\frac{-L}{6EI}M_gm_d$	$\Delta_{ij}=\frac{L}{6EI}M_gm\cdot(1-2\alpha)$	0

4. Valeur de $\frac{L}{EI}\int_0^L M_i m_j \, dx$ suite

Tableau 6.2 (suite)

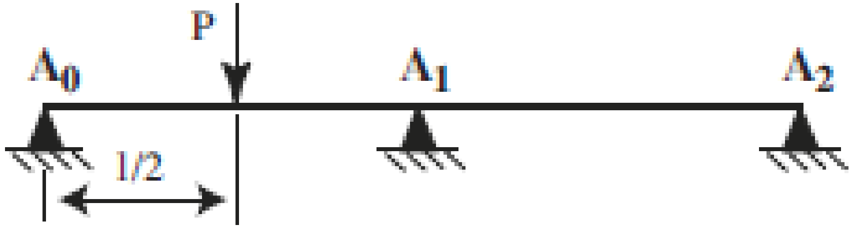
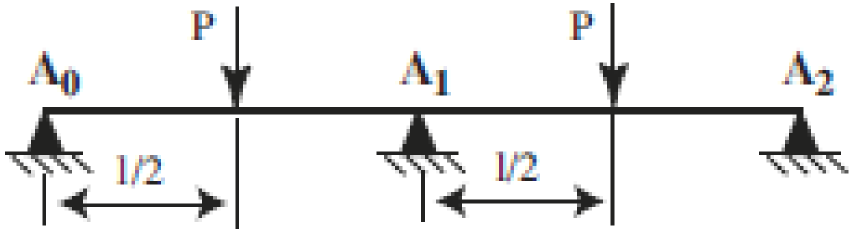
M_i \ m_j	m, m, L	m_g, m_d, L	m_g, L, m_g	m_g, L, $-m_g$	m_g, L	m_d, L	m, αL, βL, L	m, L
m_g, L	$\Delta_{ij}=\frac{L}{2EI}M_g m$	$\Delta_{ij}=\frac{L}{6EI}M_g(2m_g+m_d)$	$\Delta_{ij}=\frac{L}{6EI}M_g(2m_g+m_d)$	$\Delta_{ij}=\frac{L}{6EI}M_g m$	$\Delta_{ij}=\frac{L}{3EI}M_g m_g$	$\Delta_{ij}=\frac{L}{6EI}M_g m_d$	$\Delta_{ij}=\frac{L}{6EI}M_g m\cdot(1+\beta)$	$\Delta_{ij}=\frac{L}{4EI}M_g m$
m_d, L	$\Delta_{ij}=\frac{L}{2EI}M_d m$	$\Delta_{ij}=\frac{L}{6EI}M_d(m_g+2m_d)$	$\Delta_{ij}=\frac{L}{6EI}M_d(m_g+2m_d)$	$\Delta_{ij}=\frac{-L}{6EI}M_d m$	$\Delta_{ij}=\frac{L}{6EI}M_d m_g$	$\Delta_{ij}=\frac{L}{3EI}M_d m_d$	$\Delta_{ij}=\frac{L}{6EI}M_d m\cdot(1+\alpha)$	$\Delta_{ij}=\frac{L}{4EI}M_d m$
m, αL, βL, L	$\Delta_{ij}=\frac{L}{2EI}Mm$	$\Delta_{ij}=\frac{L}{6EI}M\cdot[m_g(1+\beta)+m_d(1+\alpha)]$	$\Delta_{ij}=\frac{L}{6EI}M\cdot[m_g(1+\beta)+m_d(1+\alpha)]$	$\Delta_{ij}=\frac{L}{6EI}Mm(1-2\alpha)$	$\Delta_{ij}=\frac{L}{6EI}Mm_g(1+\beta)$	$\Delta_{ij}=\frac{L}{6EI}Mm_d(1+\alpha)$	$\alpha<\beta$ $\Delta_{ij}=\frac{L}{12EI}Mm\cdot\frac{3-4\alpha^2}{\beta}$	$\Delta_{ij}=\frac{L}{3EI}Mm$
m, L	$\Delta_{ij}=\frac{L}{2EI}Mm$	$\Delta_{ij}=\frac{L}{4EI}M(m_g+m_d)$	$\Delta_{ij}=\frac{L}{4EI}M(m_g+m_d)$	0	$\Delta_{ij}=\frac{L}{4EI}Mm_g$	$\Delta_{ij}=\frac{L}{4EI}Mm_d$	$\Delta_{ij}=\frac{L}{12EI}Mm\cdot\frac{3-4\alpha^2}{\beta}$	$\Delta_{ij}=\frac{L}{3EI}Mm$
M, L	$\Delta_{ij}=\frac{L}{3EI}M_g m$	$\Delta_{ij}=\frac{L}{12EI}M_g(3m_g+m_d)$	$\Delta_{ij}=\frac{L}{12EI}M_g(3m_g+m_d)$	$\Delta_{ij}=\frac{L}{6EI}M_g m$	$\Delta_{ij}=\frac{L}{4EI}M_g m_g$	$\Delta_{ij}=\frac{L}{12EI}\cdot M_g m_d$	$\Delta_{ij}=\frac{L}{12EI}M_g\cdot m(1+\beta+\beta^2)$	$\Delta_{ij}=\frac{7L}{48EI}\cdot M_g m$

4. Valeur de $\frac{L}{EI}\int_0^L M_i m_j dx$ suite

Tableau 6.2 (Suite)

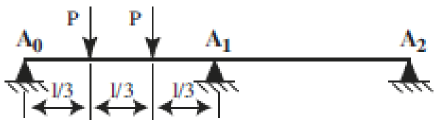
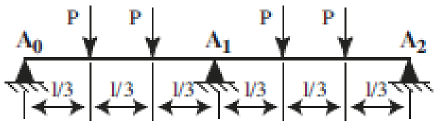
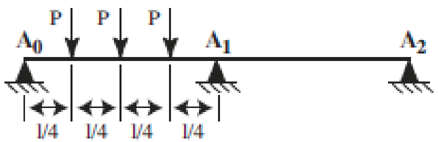
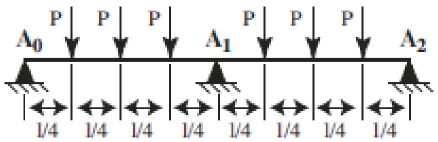
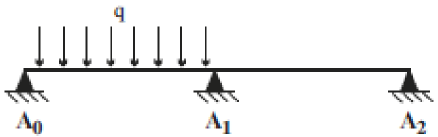
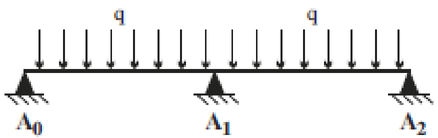
M_i \ m_j	m, L	m_g, m_d, L	m_g, m_g, L	m_g, $-m_g$, L	m_g, L	m_d, L	m, αL, βL, L	m, L
M_d, L	$\Delta_{ij}=\frac{L}{3EI}M_d m$	$\Delta_{ij}=\frac{L}{12EI}M_d$ (m_g+3m_d)	$\Delta_{ij}=\frac{L}{12EI}M_d$ (m_g+3m_d)	$\Delta_{ij}=\frac{-L}{6EI}M_d m$	$\Delta_{ij}=\frac{L}{12EI}$ $\cdot M_d m_g$	$\Delta_{ij}=\frac{L}{4EI}M_d m_d$	$\Delta_{ij}=\frac{L}{12EI}M_d$ $\cdot m(1+\alpha+\alpha^2)$	$\Delta_{ij}=\frac{7L}{48EI}$ $\cdot M_d m$
M, L	$\Delta_{ij}=\frac{2L}{3EI}Mm$	$\Delta_{ij}=\frac{L}{3EI}M$ (m_g+m_d)	$\Delta_{ij}=\frac{L}{3EI}M$ (m_g+m_d)	0	$\Delta_{ij}=\frac{L}{3EI}Mm_g$	$\Delta_{ij}=\frac{L}{3EI}Mm_d$	$\Delta_{ij}=\frac{L}{3EI}Mm$ $\cdot(1+\alpha\beta)$	$\Delta_{ij}=\frac{5L}{12EI}Mm$
M_g, L	$\Delta_{ij}=\frac{2L}{3EI}M_g m$	$\Delta_{ij}=\frac{L}{12EI}M_g$ $(5m_g+3m_d)$	$\Delta_{ij}=\frac{L}{12EI}M_g$ $(5m_g+3m_d)$	$\Delta_{ij}=\frac{L}{6EI}M_g m$	$\Delta_{ij}=\frac{5L}{12EI}$ $\cdot M_g m_g$	$\Delta_{ij}=\frac{L}{4EI}M_g m_d$	$\Delta_{ij}=\frac{L}{12EI}$ $\cdot M_g m$ $\cdot(5-\alpha-\alpha^2)$	$\Delta_{ij}=\frac{17L}{48EI}$ $\cdot M_g m$
M_d, L	$\Delta_{ij}=\frac{2L}{3EI}M_d m$	$\Delta_{ij}=\frac{L}{12EI}M_d$ $(3m_g+5m_d)$	$\Delta_{ij}=\frac{L}{12EI}M_d$ $(3m_g+5m_d)$	$\Delta_{ij}=\frac{-L}{6EI}M_d m$	$\Delta_{ij}=\frac{L}{4EI}M_d m$	$\Delta_{ij}=\frac{5L}{12EI}$ $\cdot M_d m_d$	$\Delta_{ij}=\frac{L}{12EI}$ $\cdot M_d m$ $\cdot(5-\beta-\beta^2)$	$\Delta_{ij}=\frac{17L}{48EI}$ $\cdot M_d m$

5. Formulaire de la poutre continue à 2 travées égales

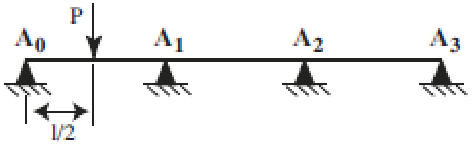
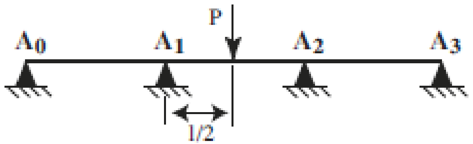
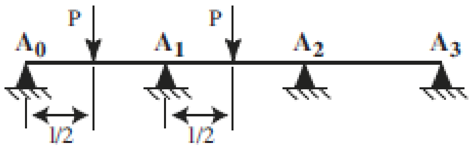
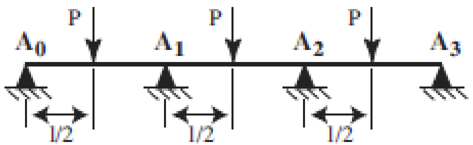
Géométrie et chargement	Moment sur appui et réaction d'appui
	$M_1 = -\dfrac{3}{32}Pl$ $Y_{A_0} = \dfrac{13}{32}P \quad Y_{A_1} = \dfrac{11}{16}P \quad Y_{A_2} = -\dfrac{3}{32}P$
	$M_1 = -\dfrac{3}{16}Pl$ $Y_{A_0} = \dfrac{5}{16}P \quad Y_{A_1} = \dfrac{11}{8}P \quad Y_{A_2} = \dfrac{5}{16}P$

5. Formulaire de la poutre continue à 2 travées égales

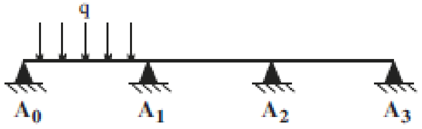
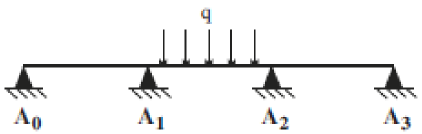
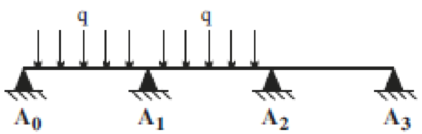
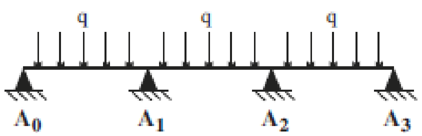
Suite

Géométrie et chargement	Moment sur appui et réaction d'appui
	$M_1 = -\frac{1}{6}Pl$ $Y_{A_0} = \frac{5}{6}P \quad Y_{A_1} = \frac{8}{6}P \quad Y_{A_2} = -\frac{1}{6}P$
	$M_1 = -\frac{1}{3}Pl$ $Y_{A_0} = \frac{2}{3}P \quad Y_{A_1} = \frac{8}{3}P \quad Y_{A_2} = \frac{2}{3}P$
	$M_1 = -\frac{15}{64}Pl$ $Y_{A_0} = \frac{81}{64}P \quad Y_{A_1} = \frac{126}{64}P \quad Y_{A_2} = -\frac{15}{64}P$
	$M_1 = -\frac{15}{32}Pl$ $Y_{A_0} = \frac{33}{32}P \quad Y_{A_1} = \frac{126}{32}P \quad Y_{A_2} = \frac{33}{32}P$
	$M_1 = -\frac{3}{48}ql^2$ $Y_{A_0} = \frac{7}{16}ql \quad Y_{A_1} = \frac{15}{24}ql \quad Y_{A_2} = -\frac{3}{48}ql$
	$M_1 = -\frac{ql^2}{8}$ $Y_{A_0} = \frac{3}{8}ql \quad Y_{A_1} = \frac{5}{4}ql \quad Y_{A_2} = \frac{3}{8}ql$

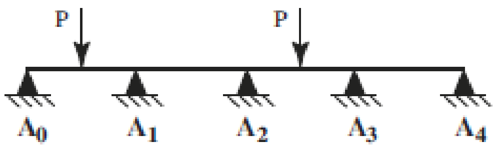
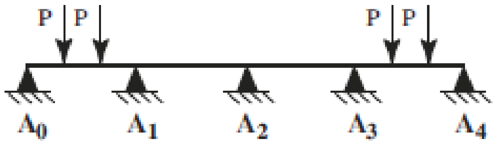
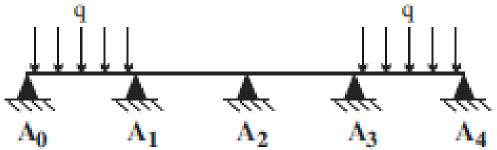
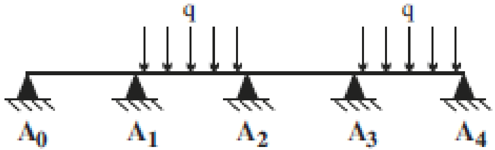
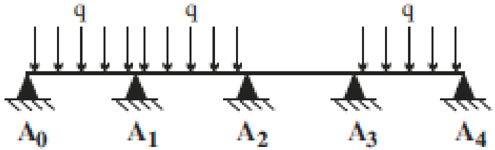
6. Formulaire de la poutre continue à 3 travées égales

Géométrie et chargement	Moment sur appui et réaction d'appui
	$M_1 = -\frac{3}{10}Pl \quad M_2 = \frac{3}{40}Pl$ $Y_{A_0} = \frac{1}{5}P \quad Y_{A_1} = \frac{47}{40}P$ $Y_{A_2} = -\frac{9}{20}P \quad Y_{A_3} = \frac{3}{40}P$
	$M_1 = -\frac{3}{40}Pl \quad M_2 = -\frac{3}{40}Pl$ $Y_{A_0} = -\frac{3}{40}P \quad Y_{A_1} = \frac{23}{40}P$ $Y_{A_2} = \frac{23}{40}P \quad Y_{A_3} = -\frac{3}{40}P$
	$M_1 = -\frac{3}{10}Pl \quad M_2 = -\frac{1}{20}Pl$ $Y_{A_0} = \frac{1}{5}P \quad Y_{A_1} = \frac{31}{20}P$ $Y_{A_2} = \frac{3}{10}P \quad Y_{A_3} = -\frac{1}{20}P$
	$M_1 = -\frac{3}{20}Pl \quad M_2 = -\frac{3}{20}Pl$ $Y_{A_0} = \frac{7}{20}P \quad Y_{A_1} = \frac{23}{20}P$ $Y_{A_2} = \frac{23}{20}P \quad Y_{A_3} = \frac{7}{20}P$

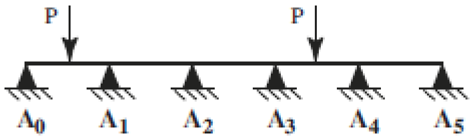
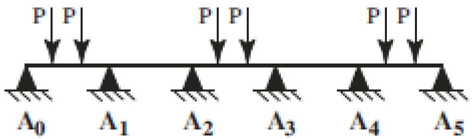
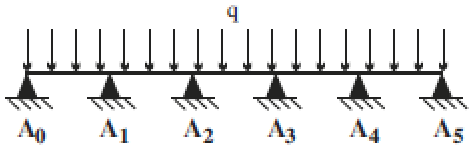
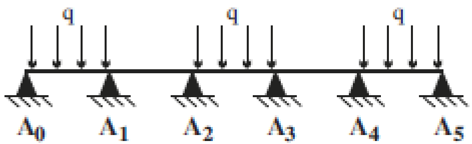
6. Formulaire de la poutre continue à 3 travées égales

Géométrie et chargement	Moment sur appui et réaction d'appui
	$M_1 = -\frac{1}{15}ql^2$ $M_2 = \frac{1}{60}ql^2$ $Y_{A_0} = \frac{13}{30}ql$ $Y_{A_1} = \frac{13}{20}ql$ $Y_{A_2} = -\frac{1}{10}ql$ $Y_{A_3} = \frac{1}{60}ql$
	$M_1 = -\frac{1}{20}ql^2$ $M_2 = -\frac{1}{20}ql^2$ $Y_{A_0} = -\frac{1}{20}ql$ $Y_{A_1} = \frac{11}{20}ql$ $Y_{A_2} = \frac{11}{20}ql$ $Y_{A_3} = -\frac{1}{20}ql$
	$M_1 = -\frac{7}{60}ql^2$ $M_2 = -\frac{1}{30}ql^2$ $Y_{A_0} = \frac{23}{60}ql$ $Y_{A_1} = \frac{18}{15}ql$ $Y_{A_2} = \frac{9}{20}ql$ $Y_{A_3} = -\frac{1}{30}ql$
	$M_1 = -\frac{1}{10}ql^2$ $M_2 = -\frac{1}{10}ql^2$ $Y_{A_0} = \frac{2}{5}ql$ $Y_{A_1} = \frac{11}{10}ql$ $Y_{A_2} = \frac{11}{10}ql$ $Y_{A_3} = \frac{2}{5}ql$

7. Formulaire de la poutre continue à 4 travées égales

Géométrie et chargement	Moment sur appui
	$M_1 = -0,080Pl$ $M_2 = -0,054Pl$
	$M_1 = -0,090Pl$ $M_2 = 0,095Pl$ $M_3 = -0,090Pl$
	$M_1 = -0,071ql^2$ $M_2 = 0,036ql^2$ $M_3 = -0,071ql^2$
	$M_1 = -0,054ql^2$ $M_2 = -0,036ql^2$
	$M_1 = -0,121ql^2$ $M_2 = -0,018ql^2$ $M_3 = -0,058ql^2$

8. Formulaire de la poutre continue à 5 travées égales

Géométrie et chargement	Moment sur appui
	$M_1 = -0,106Pl$ $M_2 = 0,048Pl$ $M_3 = -0,088Pl$ $M_2 = -0,072Pl$
	$M_1 = -0,140Pl$ $M_2 = -0,105Pl$ $M_3 = -0,105Pl$ $M_4 = -0,140Pl$
	$M_1 = -0,105ql^2$ $M_2 = -0,079ql^2$ $M_3 = -0,079ql^2$ $M_4 = -0,105ql^2$
	$M_1 = -0,053ql^2$ $M_2 = -0,039ql^2$ $M_3 = -0,039ql^2$ $M_4 = -0,053ql^2$

Merci de votre attention !