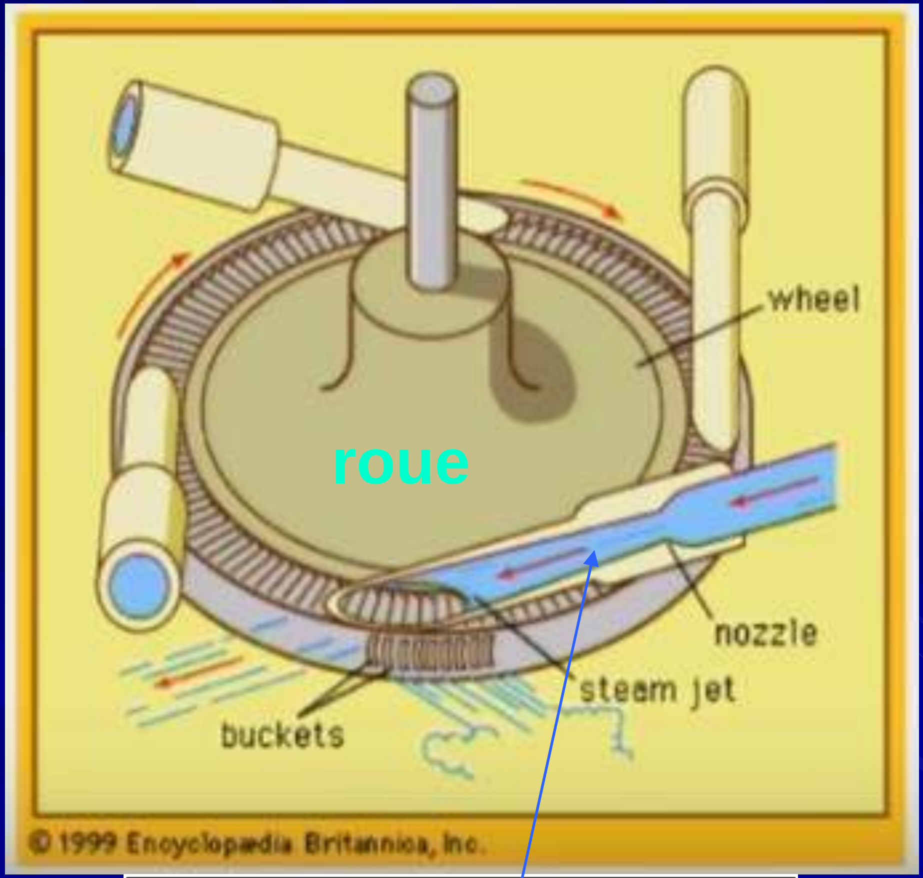
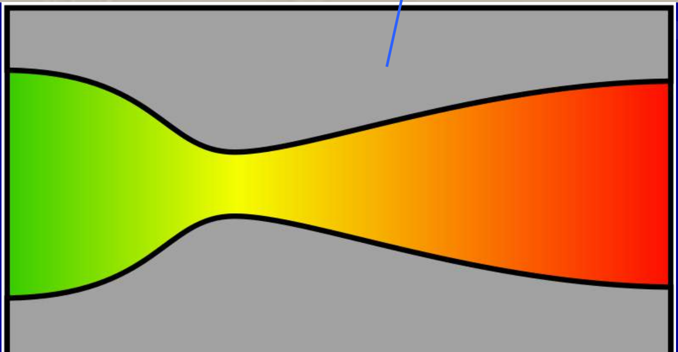
DYNAMIQUE DES GAZ

Expérience de Laval en 1893

- **Historique**:
- Dans cette expérience de Laval, de la vapeur a été envoyée sur une roue dotée de pâles.
- Cette vapeur est véhiculée par un **nozzle**
- **Constat**:
  - la roue tourne avec une vitesse très élevée (**30000 rpm**) et **sans** mécanisme mécanique





Expérience de Laval en 1893

- En **1947** le premier avion militaire a volé à une vitesse supérieure à celle du son (M=1,06): **briser le mur du son** (**V>360 m/s=1296 km/h**)

- Ceci est devenu possible grâce à **la force de poussée** (**thrust**) qui est importante grâce à **4 tuyères** convergent-divergent.

Bell XS-1

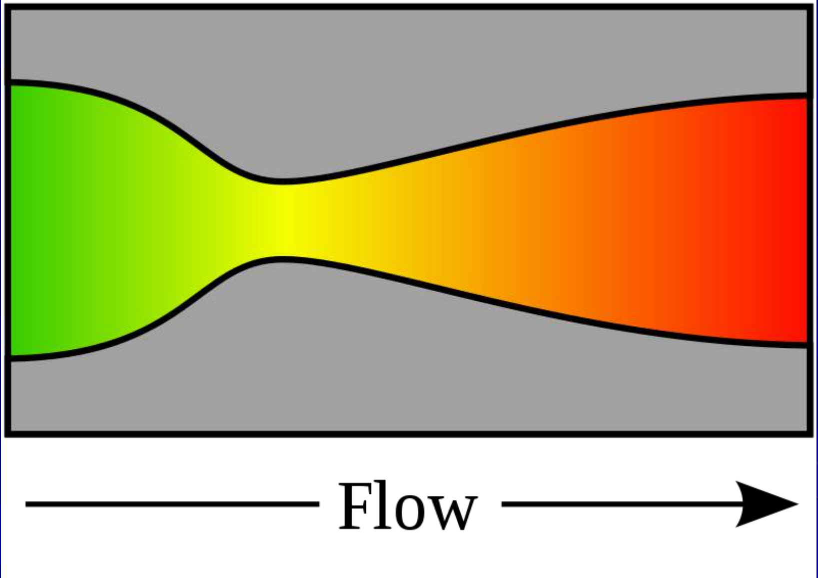
Voir la video1

Voir aussi

https://www.youtube.com/watch?v=bbwVqTAfIMs

Tuyère de Laval: Convergent-divergent Nozzle

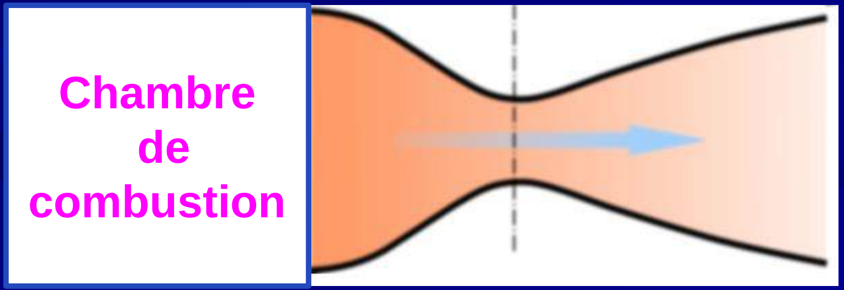
- Une **tuyère de Laval** est un tube dans lequel circule un gaz : son diamètre commence par se réduire (dans le sens de circulation du gaz) puis augmente à nouveau. Il comprend **trois parties** :

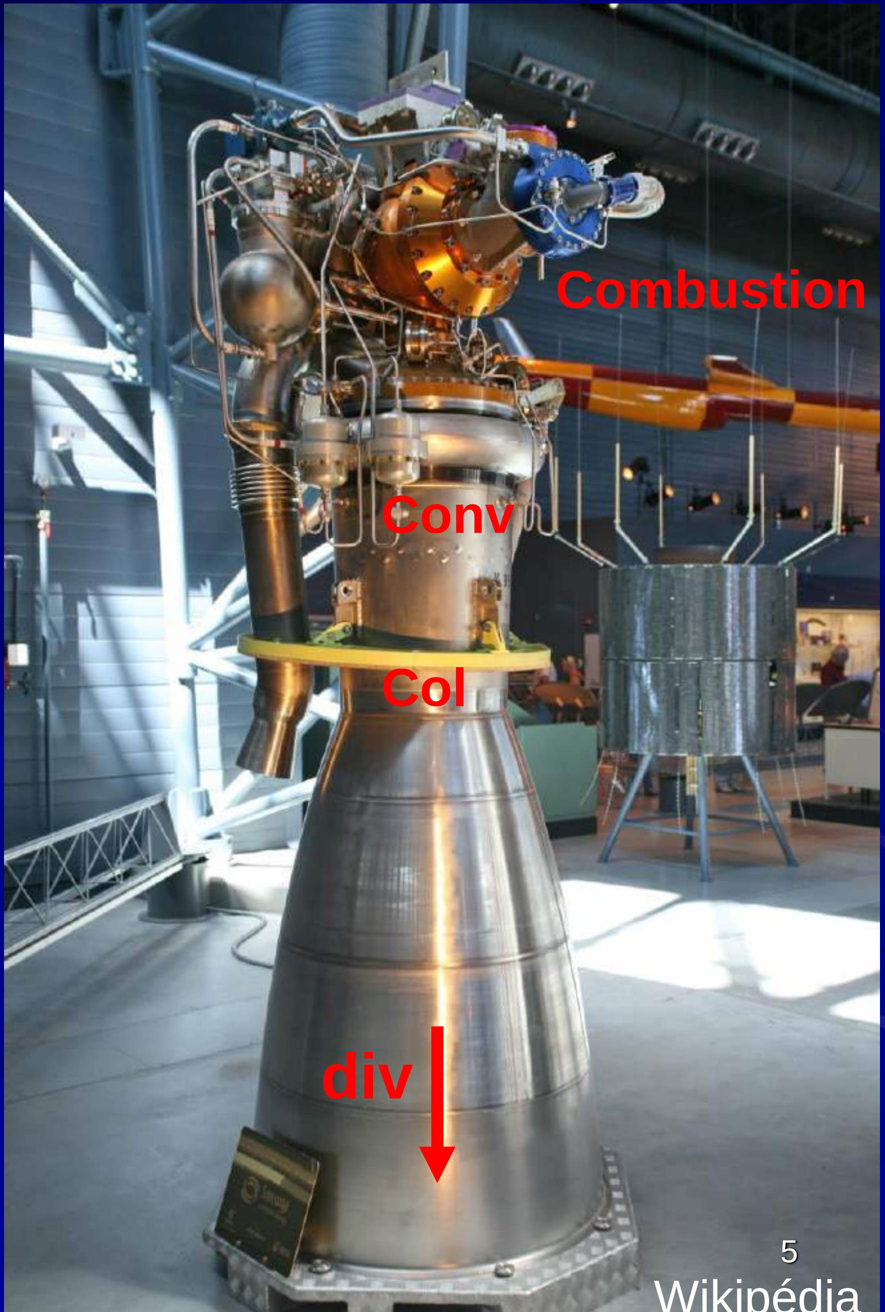


  - le **convergent** : c'est la partie de la tuyère qui va en se rétrécissant,
  - le **col** est la section de la tuyère où le diamètre est minimum,
  - le **divergent** dont le diamètre s'accroit à nouveau.

Expérience de Laval

- **Moteur-fusée Viking** : au-dessus du divergent de la tuyère, partie la plus volumineuse, on distingue l'étranglement du col et le convergent, qui se confond avec la chambre de combustion du moteur de forme cylindrique.

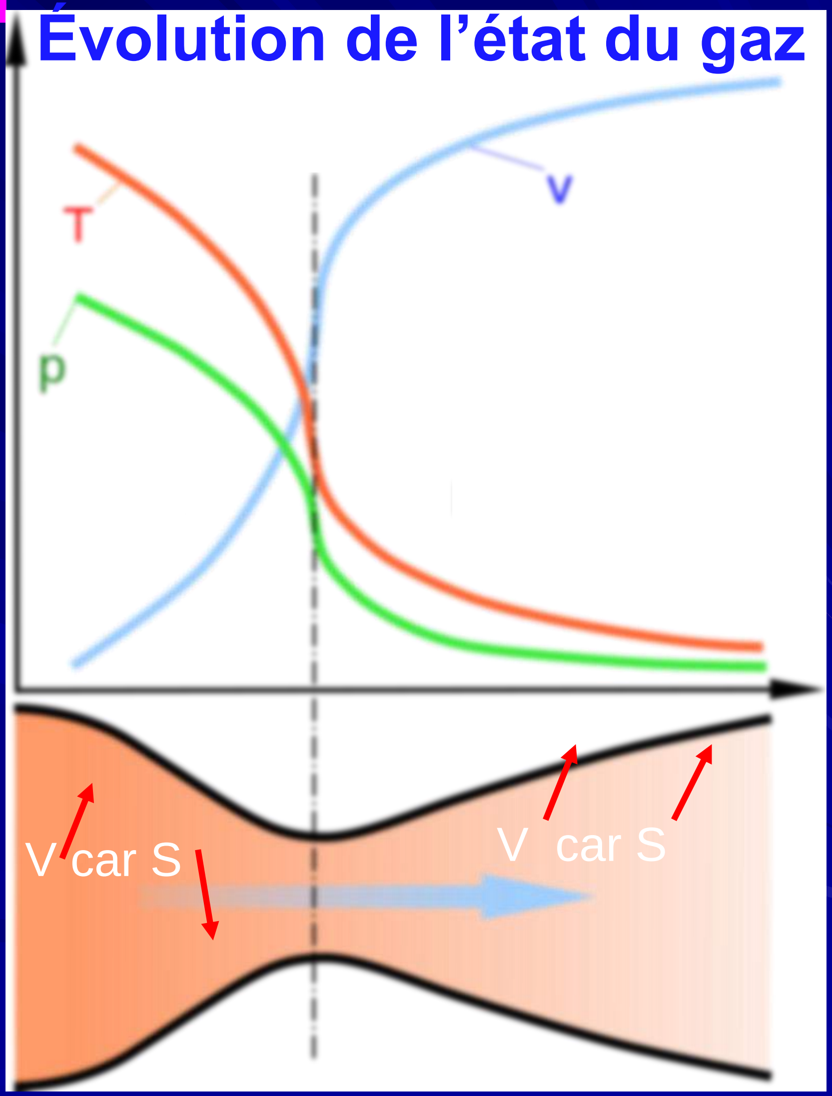




Wikipédia

Tuyère de Laval

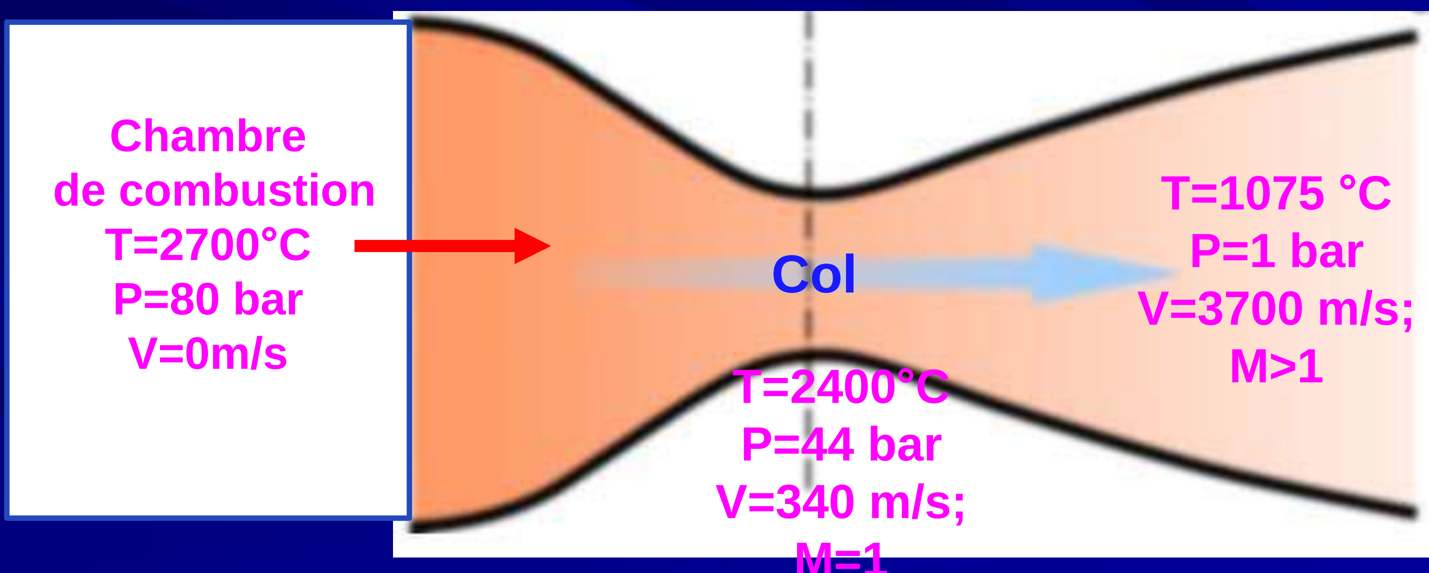
- La figure montrant **l'évolution** de la pression (**P**), de la vitesse (**V**) et de la température (**T**) tout au long des sections d'une *tuyère de Laval*.
- La température et la pression chutent au fur et à mesure de la progression du gaz, tandis que sa vitesse augmente jusqu'à dépasser celle du son au niveau du col.



Exemple de valeurs

Exemple de paramètres de fonctionnement d'une tuyère *adaptée*

Section de la tuyère	Pression	Température	Vitesse d'écoulement du gaz
Entrée du convergent	80 bars	2 700 °C	~ 0
Col de la tuyère	44 bars	2 400 °C	Mach 1
Sortie du divergent	1 bar	1 075 °C	3700 m/s



Compressibilité d'un fluide

- **Fluide compressible:**
  - un fluide est **dit compressible** si sa densité (volume) change de manière significative avec la pression
- **Question**: un fluide est-il toujours compressible?
- Pour répondre à cette question, on définit deux concepts:
  - La **compressibilité**;
  - Le nombre de **Mach**.

Compressibilité d'un fluide

- **Variation de volume v:**
- On sait que **l'état** d'un gaz est définie par les **variables d'état** (indépendant):
- ***T:*** *la température du gaz;*
- ***P:*** la pression du gaz;
- ***v:*** le volume massique spécifique du fluide (**m3/kg**);

$$v = \frac{1}{\rho}$$

- **ρ:** la densité du gaz.

Compressibilité d'un fluide

- **Variation de volume v:**
- On peut écrire alors:
  - T(p,v); P(T,v) et v(P,T)
- D'où

$$dv = \left(\frac{\partial v}{\partial P}\right)_T dP + \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_P dT$$

- Ceci montre que le **volume change** lorsqu'il y'a un changement de température ΔT ou de pression ΔP

Compressibilité d'un fluide

- **Variation de volume v:**

$$dv = \left(\frac{\partial v}{\partial P}\right)_T dP + \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_P dT$$

Réduction de volume avec augmentation de la pression: **compressibilité** du gaz

augmentation de volume (réduction de densité) avec augmentation de la température: **expansion thermique** du gaz

Compressibilité d'un fluide

- **Compressibilité**:

On définit alors la **compressibilité** par:

- $$\tau = -\frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial P} = -\frac{\partial v/v}{\partial P} =$$ variation relative du volume/variation de pression

- **Conclusion**:
- La compressibilité est donc la variation du volume massique Δv par variation de la pression Δp
- **Question:** Quelle est l'unité de la compressibilité?

–m²/N

Compressibilité d'un fluide

- **Compressibilité**: en terme de **densité** ρ

$$\frac{\partial v}{\partial P} = \frac{\partial}{\partial P}\left(\frac{1}{\rho}\right) = -\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial \rho}{\partial P}$$

- Donc

$$\tau = -\frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial P} = -\rho\left(-\frac{1}{\rho^2}\right)\frac{\partial \rho}{\partial P} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial P} = \frac{\partial \rho / \rho}{\partial P}$$

$$\tau = \frac{\partial \rho / \rho}{\partial P}$$

Donc la **compressibilité** mesure aussi la variation relative de la **densité** avec la **pression**

- On peut aussi écrire:

$$d\rho = \tau \rho dP$$

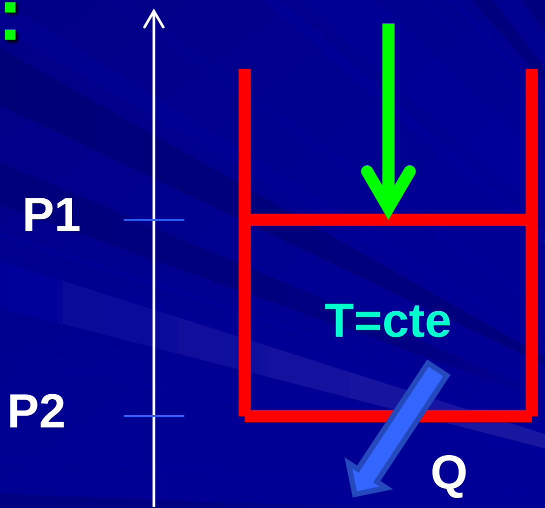
Ou encore

$$\frac{d\rho}{\rho} = \tau dP$$

Compressibilité d'un fluide

- **Compressibilité**: le terme $\frac{\partial v}{\partial P}$ qui intervient dans la définition de la compressibilité **dépend** du **processus de compression:**
  - Cas de compression **isotherme:**

$$\tau_T = -\frac{1}{v}\left(\frac{\partial v}{\partial P}\right)_T$$



$$(\Delta v)_1 = v_2 - v_1$$

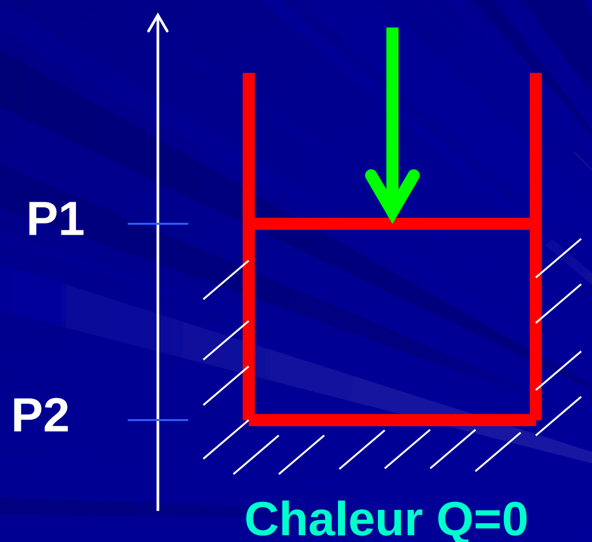
Compressibilité d'un fluide

- **Compressibilité**

  – Cas de compression **isentropique:**

$$\tau_s = -\frac{1}{v}\left(\frac{\partial v}{\partial P}\right)_s$$

$$\left(\Delta v\right)_2 \neq \left(\Delta v\right)_1$$



$$\left(\Delta v\right)_2 = v_2 - v_1$$

Compressibilité d’un fluide

- **Conclusion:**
- Si le changement de volume due au changement de pression
  - est **important**,
  - alors la **compressibilité** du **fluide est significative**
- Si la pression reste constant le changement de volume n’est pas due à la pression et donc la compressibilité du fluide **peut être négligée.**

$$dv = \left(\frac{\partial v}{\partial P}\right)_T dP + \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_P dT$$

Compressibilité d'un fluide

- **Exemple de compressibilité :**

$$\left(\tau_T\right)_{eau} = 5.0\,10^{-10}\; m^2 / N$$

Pour **l'eau** dans les conditions normales

$$\left(\tau_T\right)_{air} = 5.0\,10^{-5}\; m^2 / N$$

Pour **l'air** dans les conditions normales

- **Remarque**

- $\left(\tau_T\right)_{eau}$ est très **faible**: l'eau est **incompressible**

- $\left(\tau_T\right)_{air}$ est **importante**: l'air est très **compressible**

Compressibilité d’un fluide

- **Remarque**
- **L’air** est **compressible.**
- Mais est-ce que tout le temps?

- **Réponse:**
  – Selon **le premier critère** de compressibilité: **oui**

  – Selon **le deuxième critère** de compressibilité (Mach): **Non**

- C’est quoi alors ce **nombre de Mach?**

Compressibilité d’un fluide

- **Nombre de Mach (Autrichien Ernst Mach)?**
- C’est un nombre sans dimension, noté *M*:

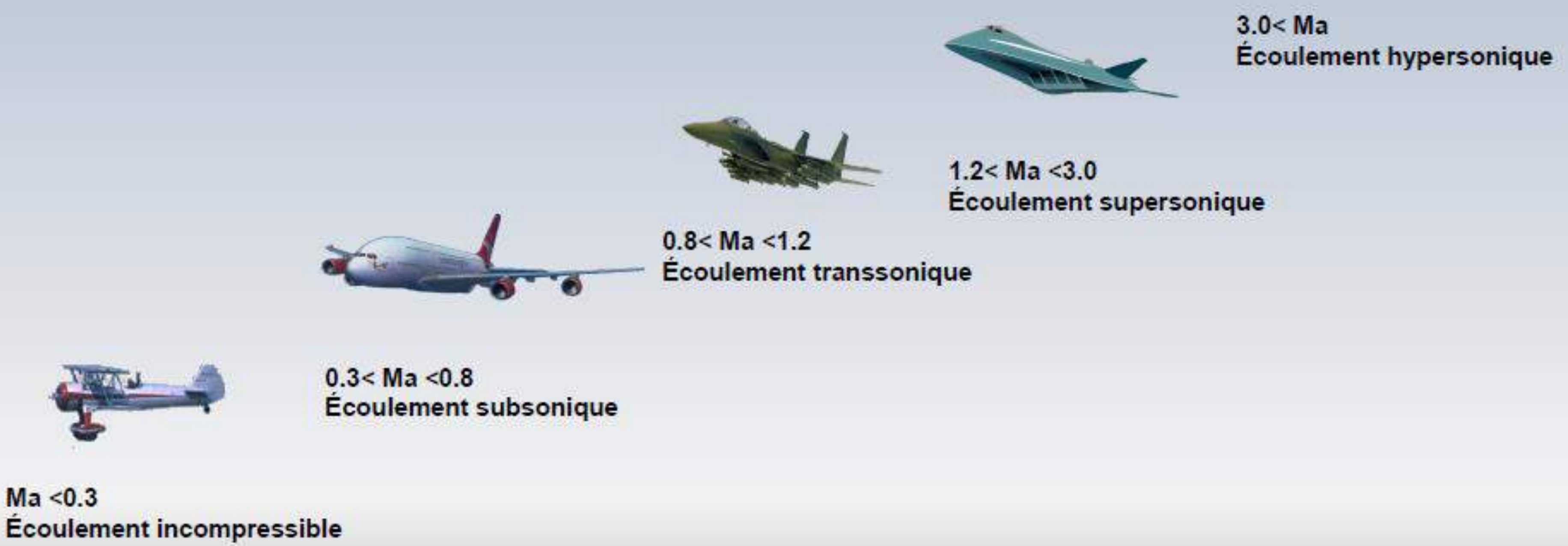
$$M = \frac{u}{a}$$

u: la vitesse locale d'un **fluide**

à la vitesse du **son** dans ce même fluide.

- **M<1**: écoulement **subsonique**
- **M=1**: écoulement **sonique**
- **M>1**: écoulement supersonique
- **M** ne correspond pas à une vitesse fixe, il dépend des **conditions locales**.

$$\text{Nombre de Mach} = \frac{\text{vitesse de l'objet (de l'écoulement)}}{\text{vitesse du son}}$$



Compressibilité d'un fluide

- **Remarque** $M >>$
- Un **M important** engendre l'apparition d'un phénomène physique: **d'onde de choc.**

Compressibilité d'un fluide

- **Vitesse du son (célérité du son)?**
- C' est la vitesse de propagation des **ondes sonores** dans les milieux:
  - **Gazeux** (air);
  - **liquides;**
  - ou **solides**

Notée **a** telle que:

$$a^2 = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_s$$

Compressibilité d’un fluide

- **Vitesse du son (célérité du son)?**

- **Exemples**:
  - Dans l'air à **15 °C**: environ: **340 m/s;**
  - Dans **l'eau**: à environ: **1 500 m/s.**

- **Exercice**
- Montrer que $$a = \sqrt{\gamma R T}$$ avec $$\gamma = \frac{c_p}{c_v}$$

Coefficient d’adiabacité

Avec ***R=Ru/Masse mol***

Compressibilité d'un fluide

- **Vitesse du son (célérité du son)?**

$$a^2 = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_s = \frac{\partial P}{\partial \rho}$$

- **si isentropique**

$$Pv^\gamma = \frac{P}{\rho^\gamma} = cte$$

$$a^2 = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_s = \frac{\partial}{\partial \rho}(cte\,\rho^\gamma) = \gamma\, cte\, \rho^{\gamma-1} = \gamma\, \frac{cte\,\rho^\gamma}{\rho} = \gamma\, \frac{P}{\rho}$$

$$a^2 = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_s = \gamma\, \frac{P}{\rho} = \gamma P v = \gamma R T$$

donc

$$a = \sqrt{\gamma R T}$$

Compressibilité d'un fluide

- **Conclusion**
- La vitesse **a** du son dans un gaz: $a = \sqrt{\gamma RT}$

  - **augmente** avec la température **T** du gaz

  - Dépend de la nature du gaz (gamma).

Compressibilité d'un fluide

- **Exercice:**
- **Montrer aussi** que: $$a = \sqrt{\frac{v}{\tau_s}}$$
- **Réponse:**

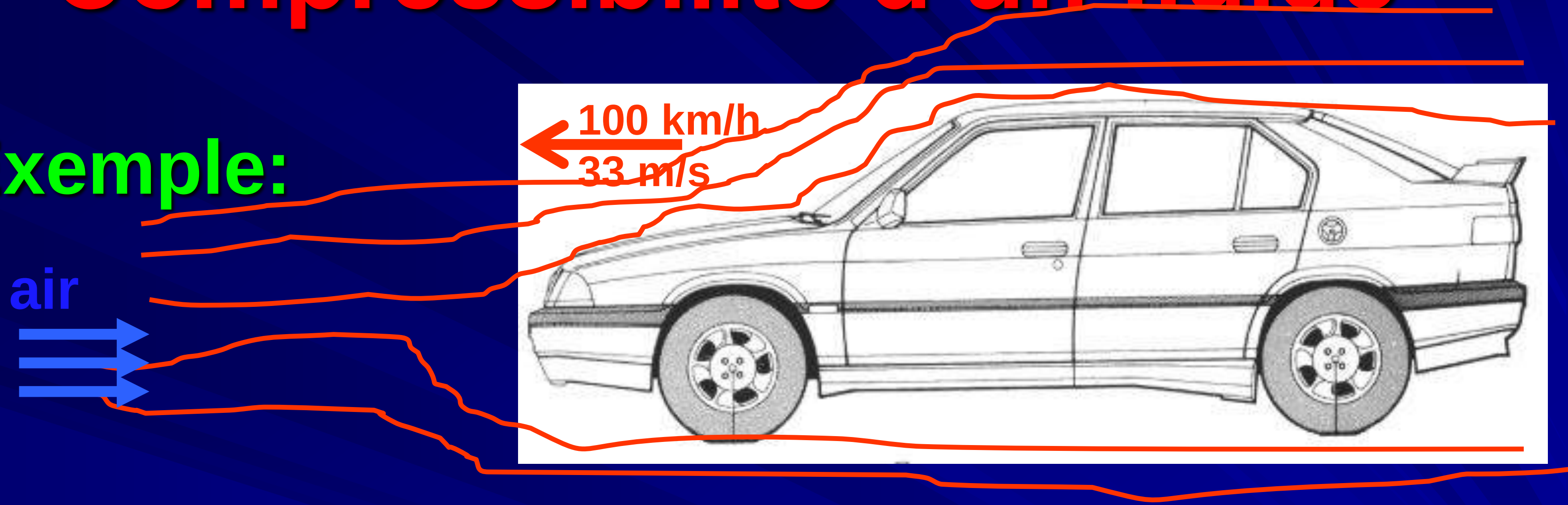
$$\tau_s = -\frac{1}{v}\left(\frac{\partial v}{\partial P}\right)_s = -\rho\left(\frac{\partial}{\partial P}\frac{1}{\rho}\right)_s = -\rho\left(\frac{-1}{\rho^2}\right)\left(\frac{\partial \rho}{\partial P}\right)_s = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial P}\right)_s$$

- Ou encore $$\tau_s = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial P}\right)_s = \frac{v}{a^2}$$
- D'où: $$a = \sqrt{\frac{v}{\tau_s}}$$

Donc la compressibilité dépend de la vitesse du son: si le milieu a une grande compressibilité, le régime supersonique est très vite atteint

Compressibilité d'un fluide

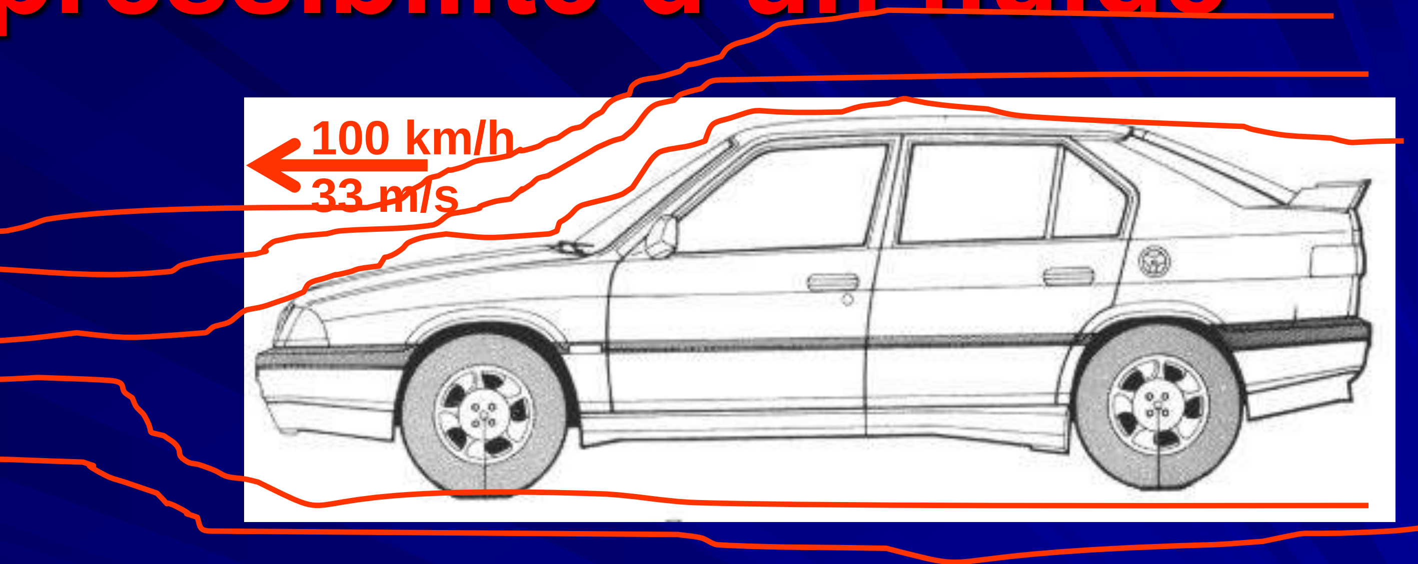
- **Exemple:**



- Soit une voiture qui roule à 100 km/h.
- L'air s'écoule dans le sens inverse du déplacement de la voiture. La vitesse du son est de 330 m/s
- **Question**:
- La compressibilité est-elle significative dans cet écoulement?

Compressibilité d'un fluide

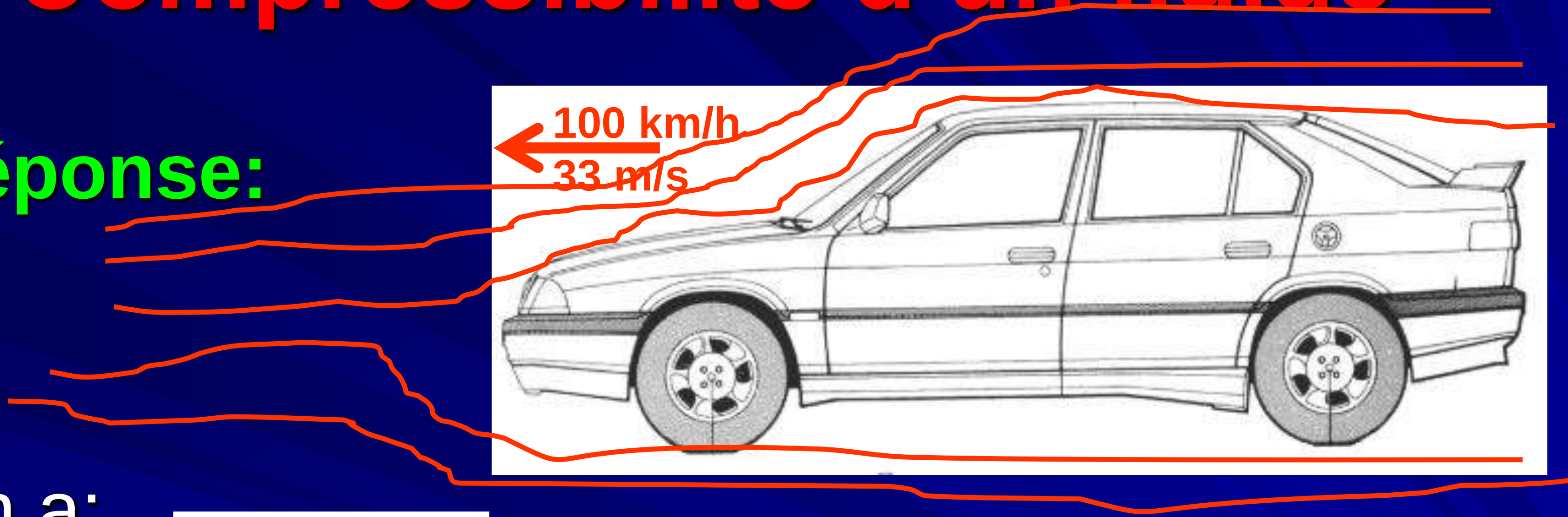
- **Réponse:**



- Pour répondre à cette question, on:
  - on estime alors le **changement** relative de la **densité** due au changement de la pression;
  - on calcule le nombre de **Mach**

Compressibilité d'un fluide

- **Réponse:**



- On a:

$$\Delta P = \rho u^2$$

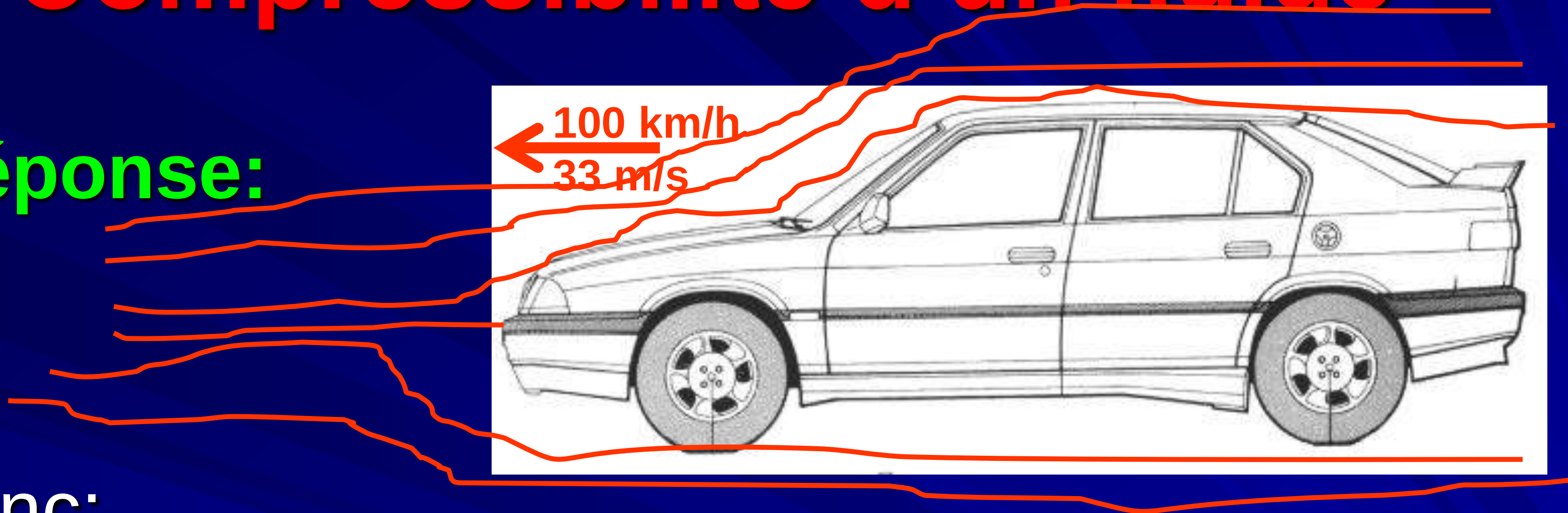
$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = \frac{1}{\rho}\frac{\Delta\rho}{\Delta P}\Delta P = \frac{1}{\rho}\frac{\Delta\rho}{\Delta P}\rho u^2 = \frac{\Delta\rho}{\Delta P}u^2$$

- Or la vitesse du son est:

$$a^2 = \left(\frac{\Delta P}{\Delta\rho}\right)_s$$

Compressibilité d'un fluide

- **Réponse:**



- donc:

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = \frac{\Delta\rho}{\Delta P} u^2$$

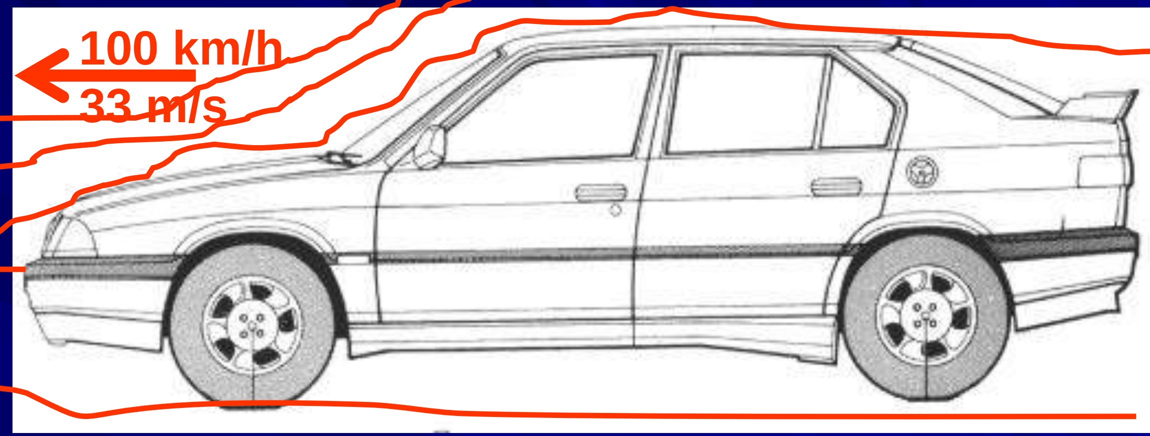
$$a^2 = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_s$$

Donc

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = \frac{u^2}{a^2} = \left(\frac{u}{a}\right)^2 = M^2$$

Compressibilité d'un fluide

- **Réponse:**



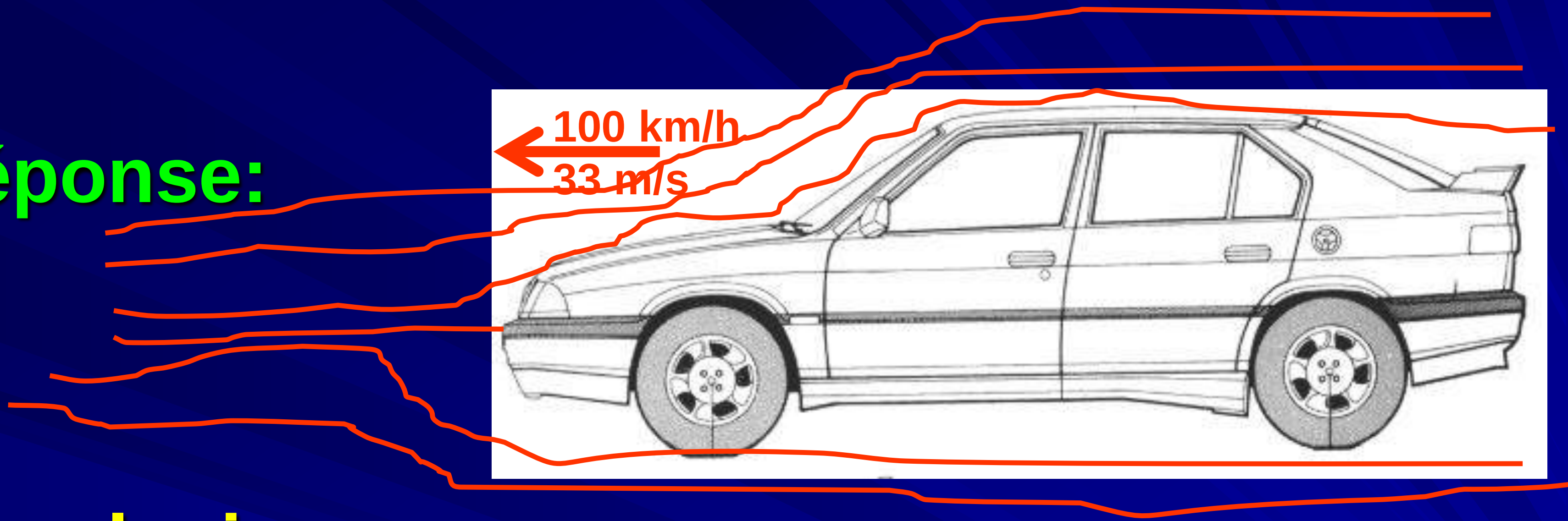
- Application numérique

$$M = \frac{u}{a} = \frac{33}{330} = 0,1$$

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = M^2 = (0,1)^2 = 1\%$$

Compressibilité d'un fluide

- **Réponse:**



- **Conclusion**:
  - Le changement de densité est très faible;
  - Faible Mach de nombre

L'air peut être considéré comme **incompressible** dans cet exemple.

Compressibilité d'un fluide

- **En règle générale:**
  - Si $\frac{\Delta\rho}{\rho} < 10\%$: l'effet de la compressibilité peut être **négligeable**

$$M^2 = \frac{\Delta\rho}{\rho} < 10\% \Rightarrow M^2 < 0{,}1 \Rightarrow M < 0{,}3$$

  - Si $M < 0{,}3$: la compressibilité peut être **négligée**

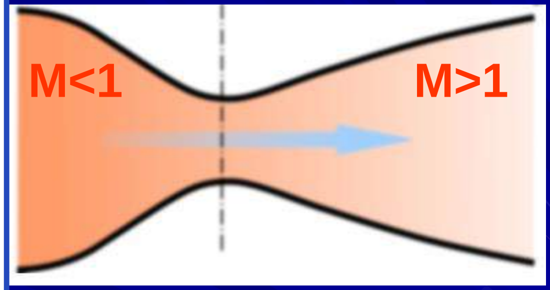
Compressibilité d'un fluide

- **Exercice1**:
- Soit un volume gaz de 10 m3 initialement à la pression de 20atm et température de 300K.
- Ce gaz est chauffé à 600K et envoyé dans un tunnel où il passe d'une vitesse subsonique à une vitesse supersonique à cause de changement dans les propriétés.
- **Calculer** la variation de l'entropie du gaz : **ΔS12?**
- **Données:**

$$R_{air} = 0{,}287\, kJ / kgK$$
$$\gamma = 1{,}4$$

V1=10 m3
T1=300 K
P1=20atm
①

V2=10 m3
T2=600 K
P2?
②



L'air passe du subsonique au supersonique

Compressibilité d'un fluide

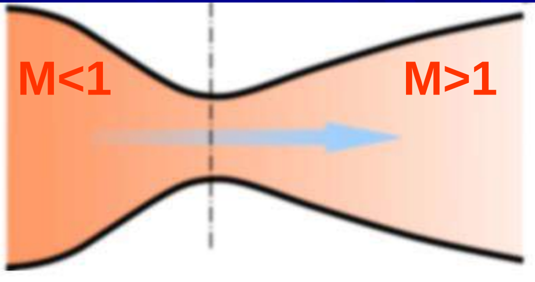
- **Réponse**:
- Équation d'état; $Pv = RT$ ou $\frac{P}{T} = \frac{R}{v}$
- Chambre à volume constant Donc $\frac{P}{T} = \frac{R}{v} = const$
- D'où:

$$\frac{P_2}{T_2} = \frac{P_1}{T_1} = \frac{R}{v} = const$$

- Ou encore

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{T_2}{T_1} = \frac{600}{300} = 2$$

V2=10 m3
T2=600°C
P2=40atm
②



L'air passe du subsonique au supersonique

P2?

- Thermo:

$$\Delta s_{12} = c_p \ln(\frac{T_2}{T_1}) - R_g \ln(\frac{P_2}{P_1})$$

avec $c_p = \frac{R_{air}\gamma}{\gamma - 1} = 1{,}0045\, kJ / kgK$

Compressibilité d'un fluide

- **Exercice1**:
- D'où l'entropie **massique**

$$\Delta s_{12} = 1{,}0045\ln(2) - 0{,}287\ln(2) = 500\, kJ/kgK$$

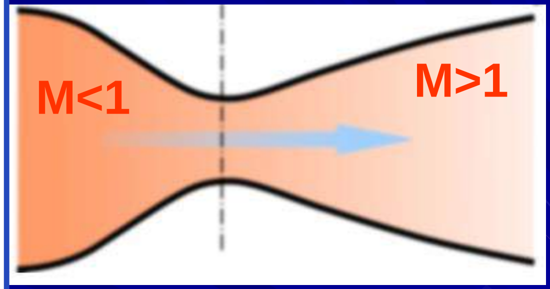
Et

$$\Delta S_{12} = m\,\Delta s_{12}$$

m ?

- Pour la **masse totale**?

V2=10 m3
T2=600°C
P2=40atm
2



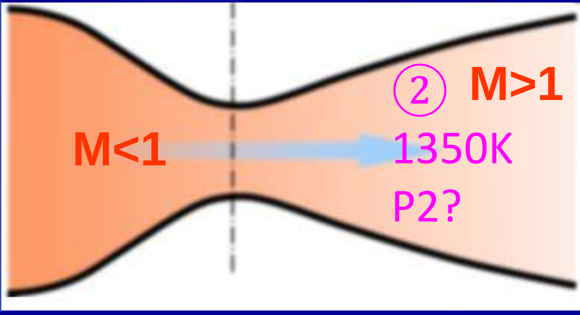
$$m = \rho V = \frac{P_1}{RT_1}V = \frac{20.10^5}{287.300}10 = 232{,}229\, kg$$

- Donc pour tout le gaz: $\Delta S_{12} = 232{,}229 * 500 = 1{,}161.10^5\, kJ/K$

Compressibilité d'un fluide

- **Exercice2**: écoulement isentropique dans une **tuyère convergente-divergente**.
- On prépare une masse gazeuse dans une chambre de combustion dans les conditions ① puis envoyée à une vitesse subsonique dans le tunnel d'où il sort aux conditions ② avec une vitesse supersonique.
- On cherche à déterminer la pression P2 en ②.
- **Données:**
  - **cp=4157 J/kg K**
  - **Masse molaire: 12 g/mol**

T1=2500°C
P1=15 bar
①



Compressibilité d'un fluide

- **Réponse** :
- écoulement isentropique dans un tunnel: 1-2:

Isentropique:

$$\frac{P_2}{P_1} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\gamma/(\gamma-1)}$$

- On calcule d'abord: **Rg** et **gamma**

$$R_g = \frac{R_u}{Mol} = \frac{8314}{12} = 692{,}8\,J/kgK$$

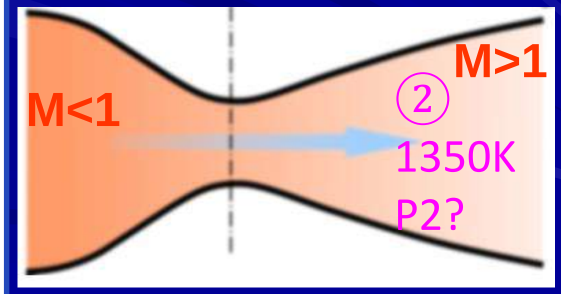
$$\gamma = \frac{c_p}{c_v} = \frac{c_p}{-R + c_p} = \frac{4157}{4157 - 692{,}8} = 1{,}2$$

Chambre combustion

T1=2500°C

P1=15 bar

1



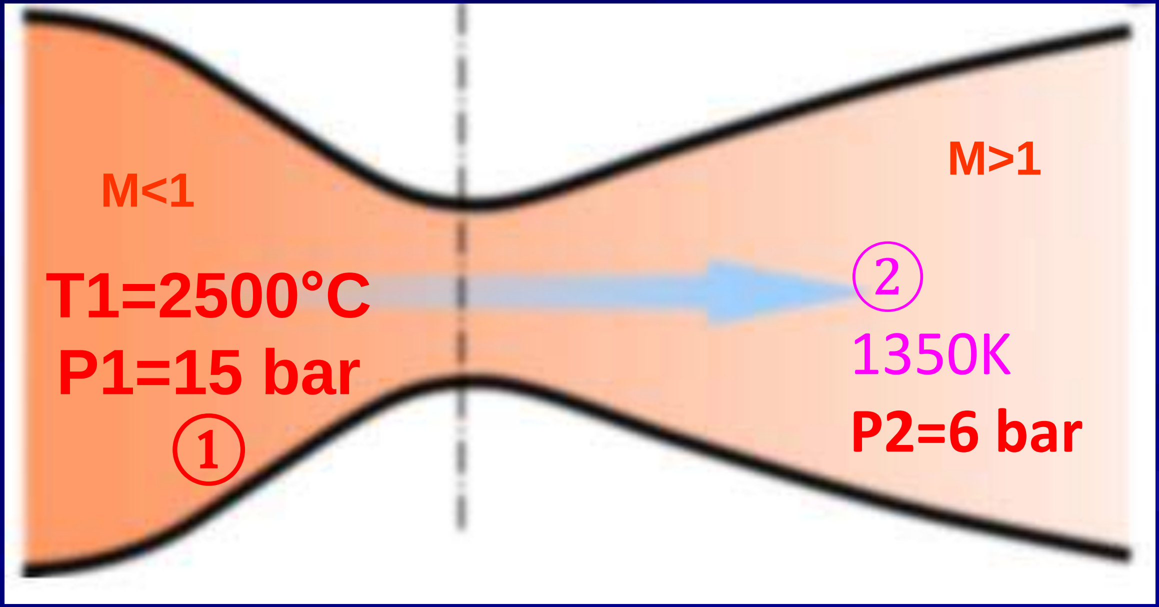
- D'où :

$$\frac{P_2}{15} = \left(\frac{1350}{2500}\right)^{1,2/(1,2-1)} \approx 0{,}4\,atm$$

P2=6 bar

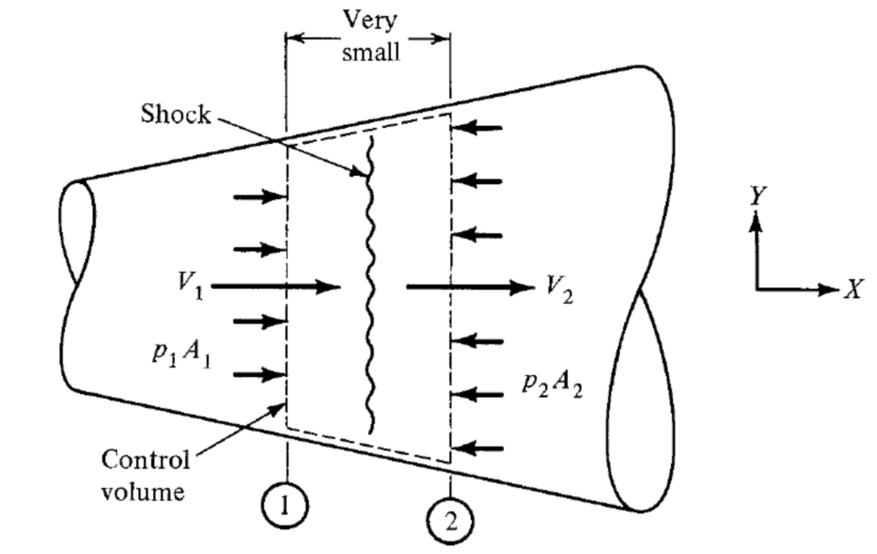
Compressibilité d'un fluide

- **Exercice2**:
- **Conclusion**



Onde de choc normale

- De petites **perturbations** de la pression, fréquemment rencontrées peuvent apporter **des modifications importantes** aux **propriétés** physiques du **fluide**, l'épaisseur de ces perturbations est extrêmement faible et apparaissent donc comme des **discontinuités dans l'écoulement** et sont appelées **ondes de choc**.



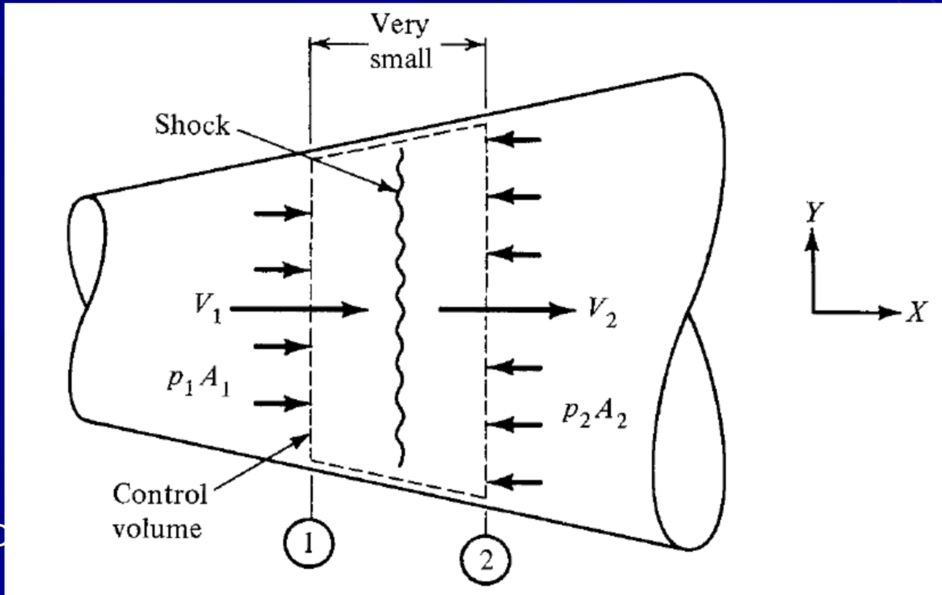
Onde de choc normale

- Les **épaisseurs** typiques de la zone de perturbation sont de l'ordre de **10^{-6} m = discontinuités dans l'écoulement**

- **Question**:

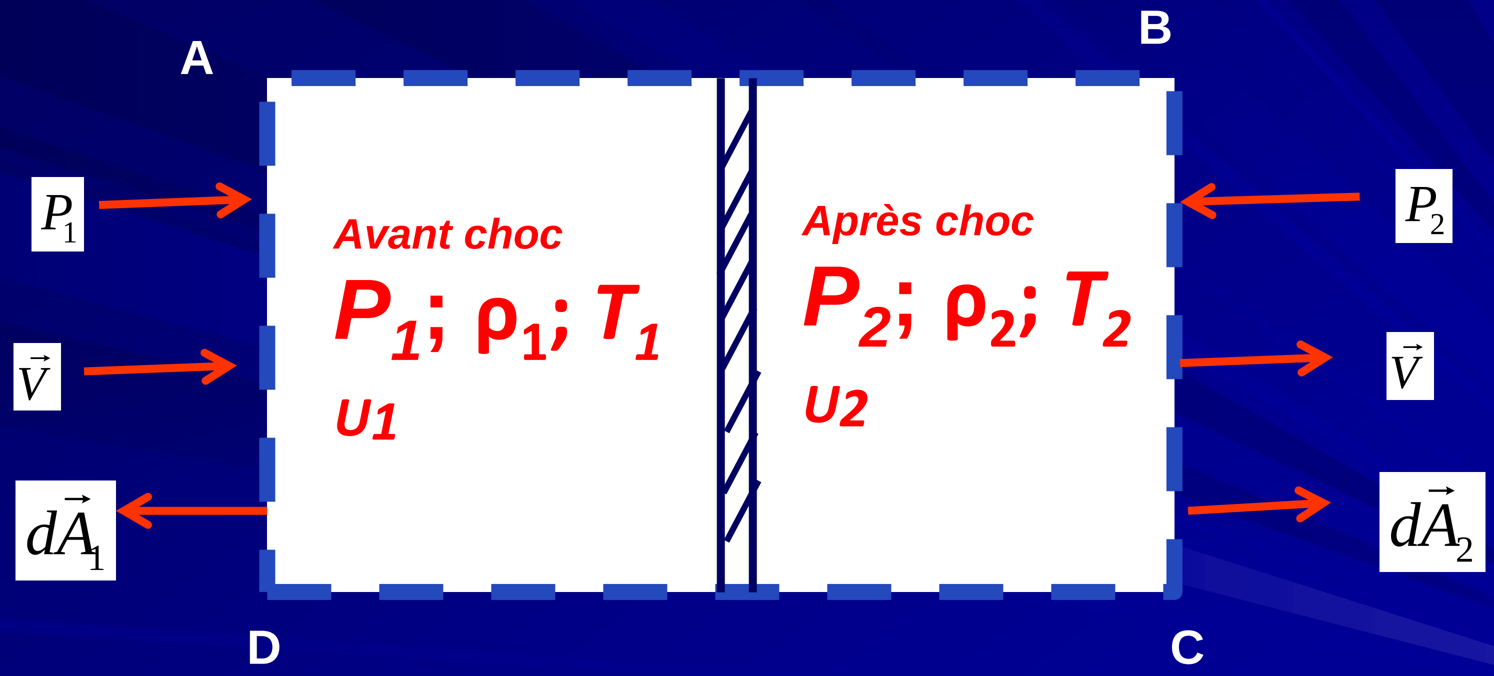
Quelles sont les **équations**

qui gouvernent ce phénomène?



Choc normale

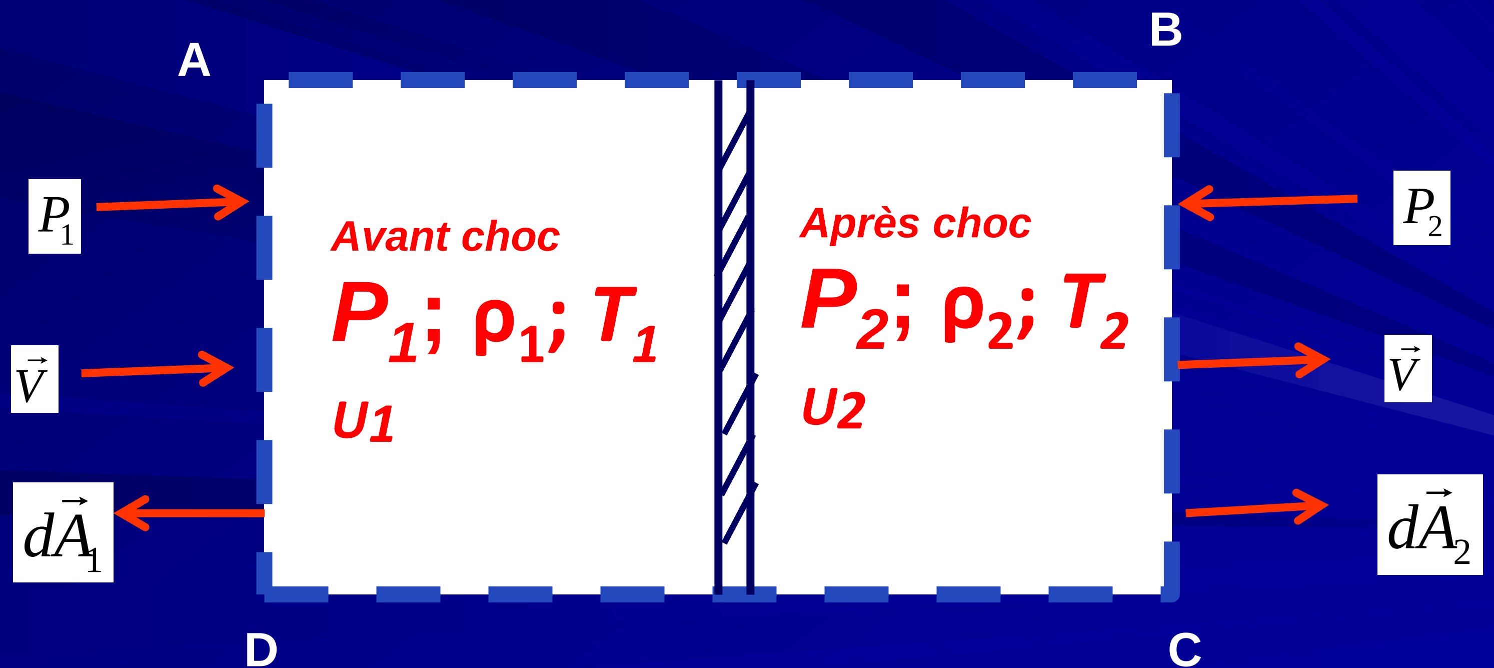
- Soit une onde de choc qui sépare deux régions d'un gaz donné.
- Et on considère un volume de contrôle **ABCD**



Choc normale

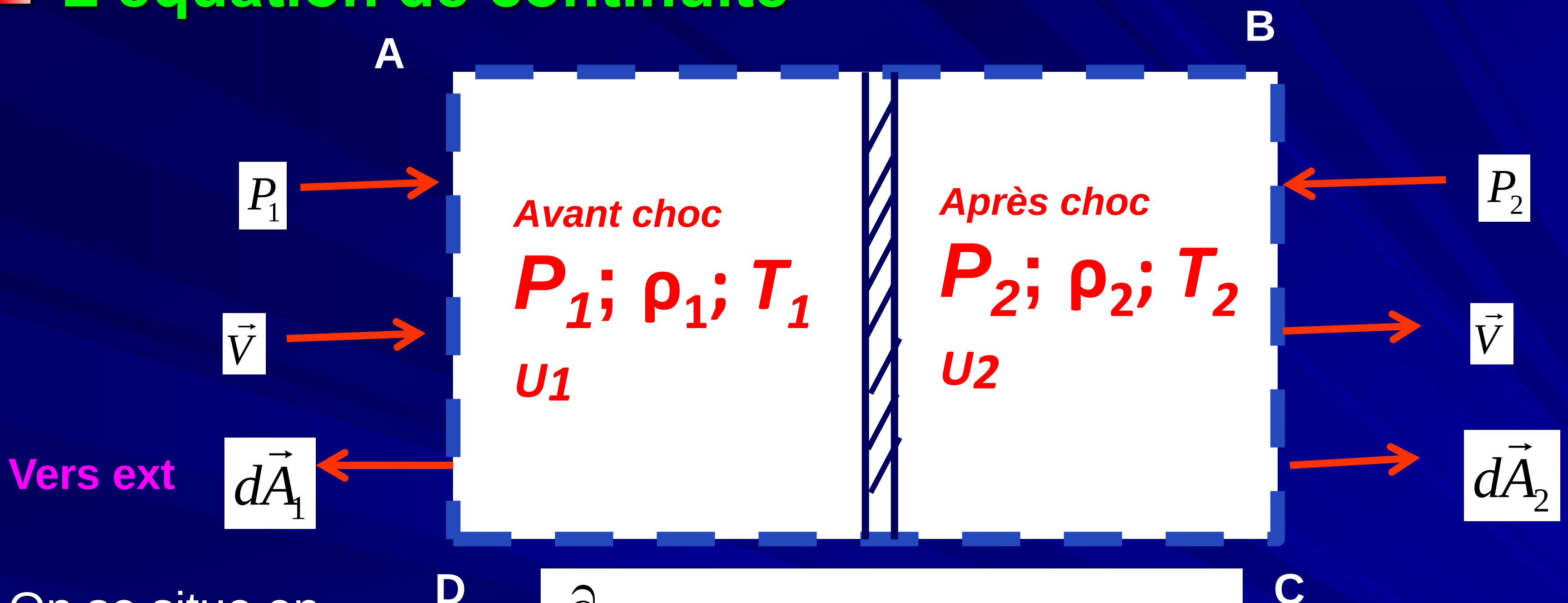
- **L'équation de continuité**
- L'équation de continuité sous forme intégrale est:

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\iiint \rho\, dv}_{\text{accumulation}} + \iint_{surface} \rho \vec{V}\, d\vec{A} = 0$$



Choc normale

- **L'équation de continuité**



On se situe en **régime permanent**

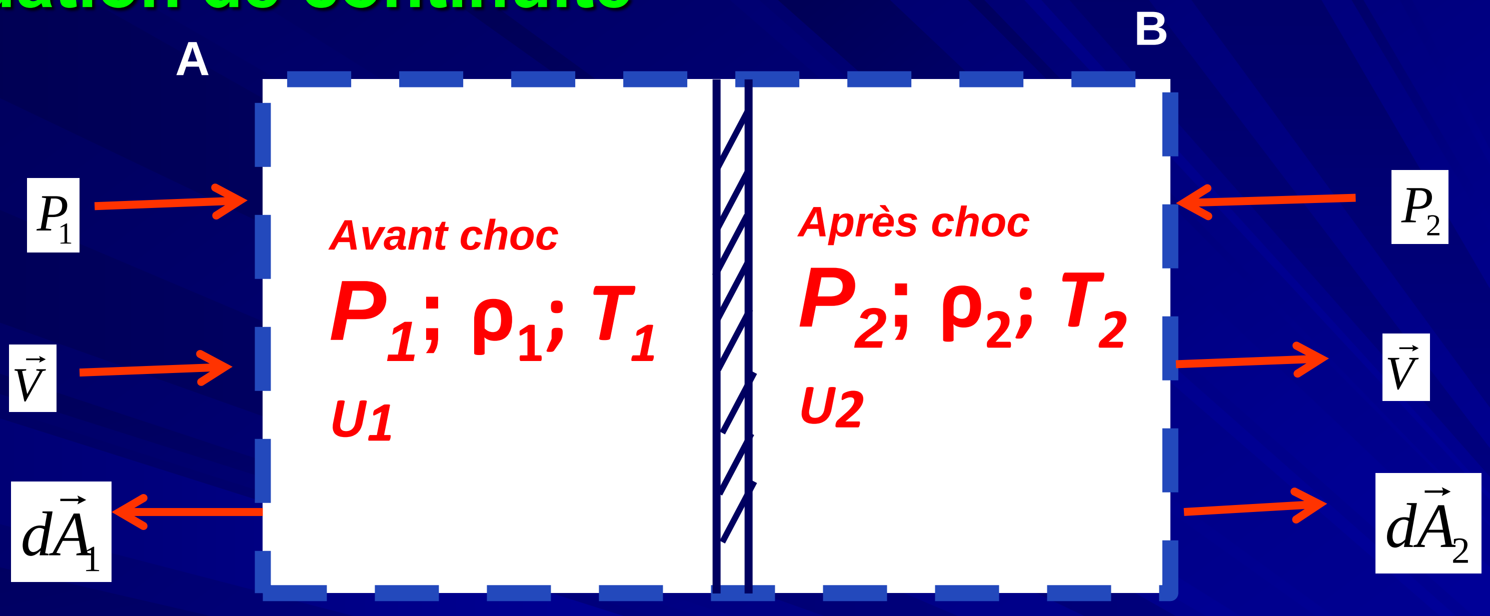
$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\iiint \rho\, dv}_{\substack{=0 \\ rég.per}} + \iint_{surface} \rho \vec{V}\, d\vec{A} = 0$$

=0

Au niveau de La **face AD:**

Choc normale

- **L'équation de continuité**



On se situe en **régime permanent**

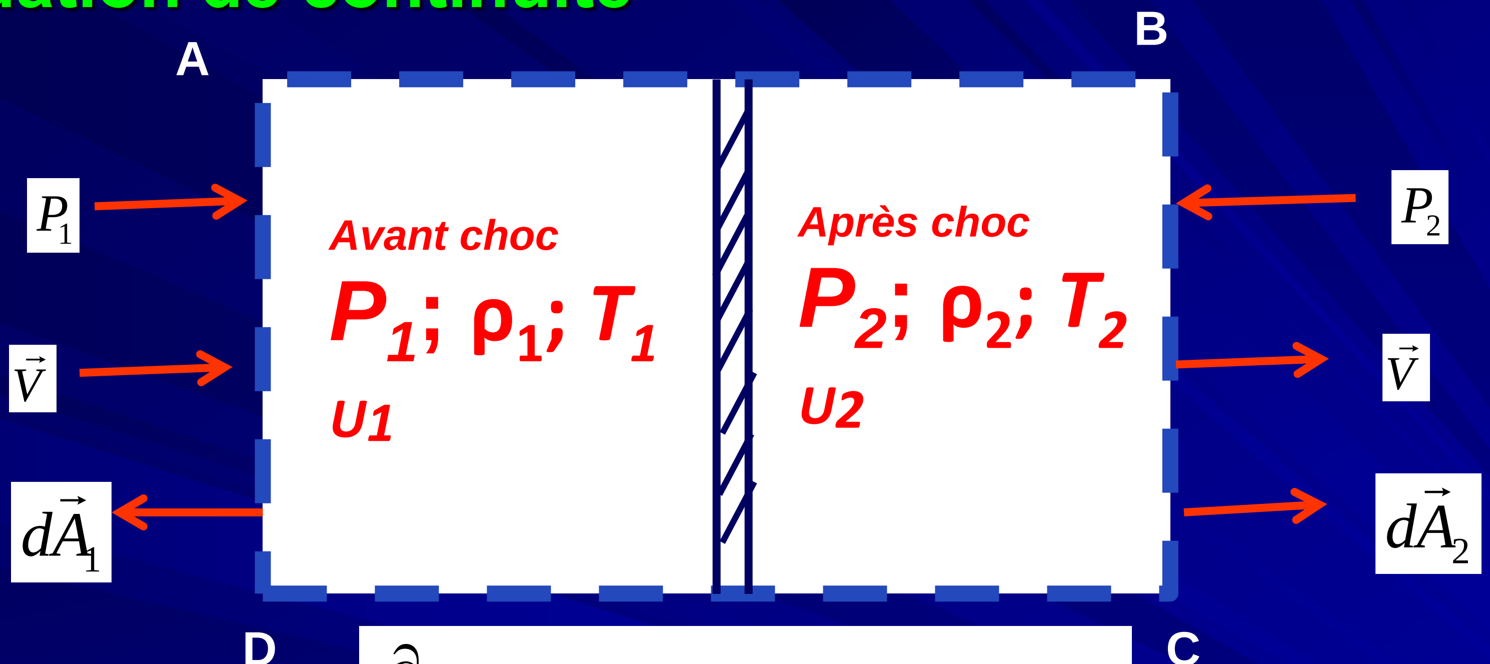
$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\iiint \rho\, dv}_{\substack{=0 \\ rég.per}} + \iint_{surface} \rho \vec{V}\, d\vec{A} = 0$$

=0

La face BC:

Choc normale

- **L'équation de continuité**

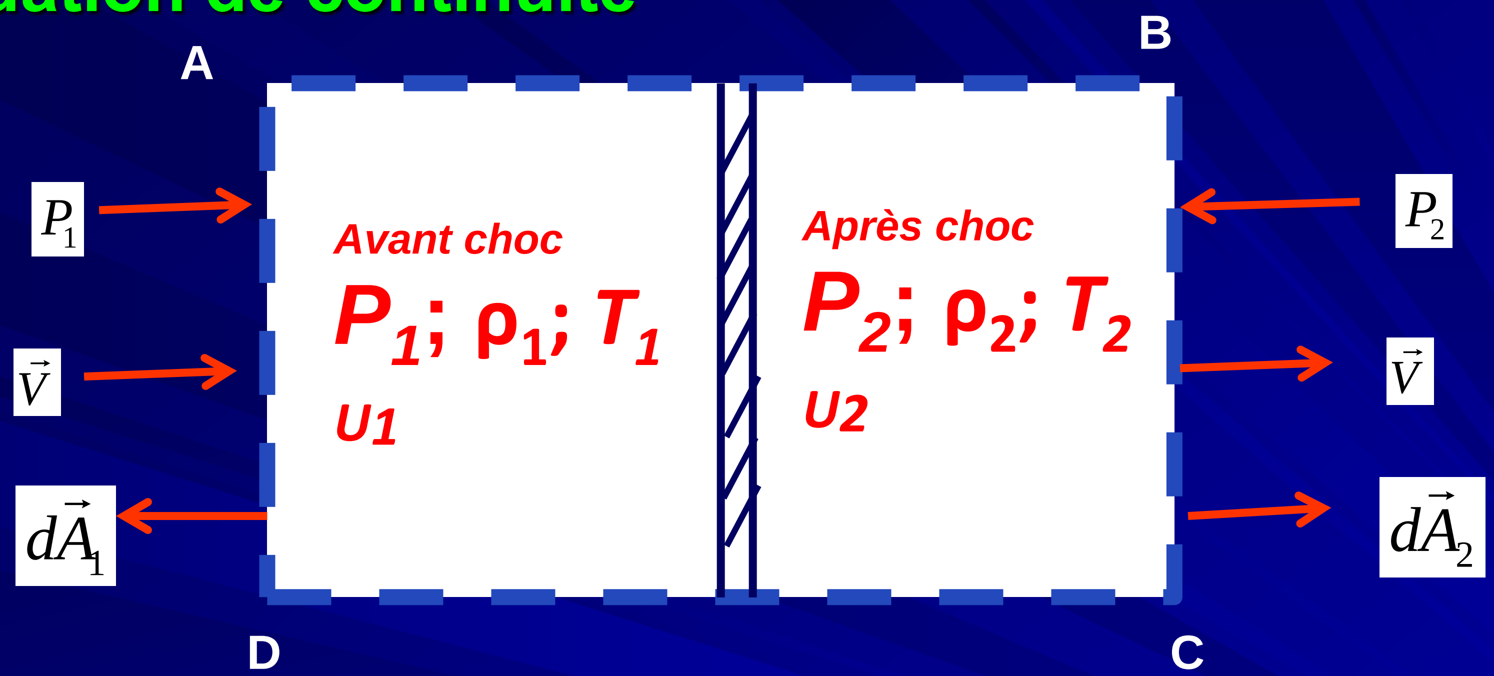


$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\iiint_{rég.per} \rho\, dv}_{=0} + \iint_{surface} \rho \vec{V}\, d\vec{A} = 0$$

- **Les faces AB et DC:** $\vec{V} = 0 \quad \Rightarrow$ **rien à calculer**

Choc normale

- **L'équation de continuité**



- **D'où:**

$$-\rho_1 u_1 dA_1 + \rho_2 u_2 dA_2 = 0$$

- **Or**

$$dA_1 = dA_2$$

Donc

$$\rho_2 u_2 = \rho_1 u_1 \qquad \textbf{(1)}$$

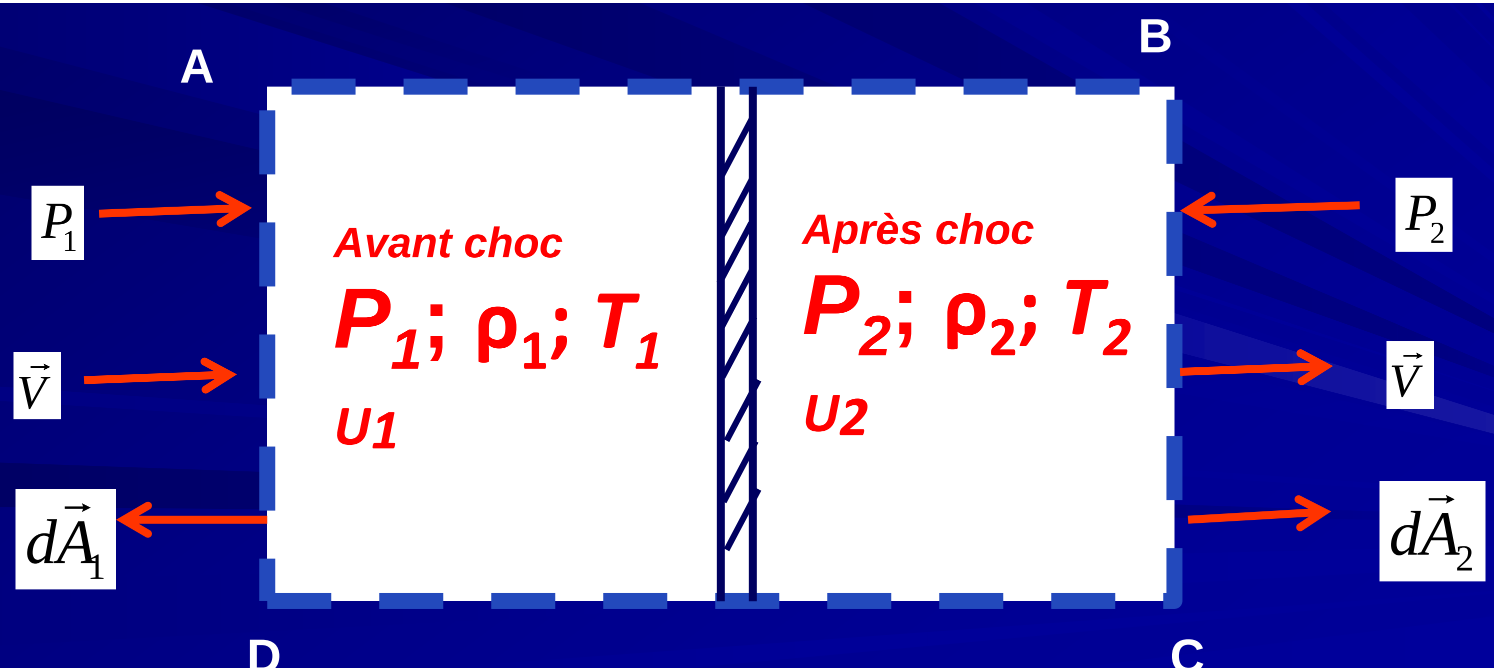
Avant choc

Après choc

Choc normale

- **L'équation de momentum (qté de mvt)**
- L'équation de **quantité de mouvement** sous forme intégrale est:

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_{volum}\rho\vec{V}\,dv+\iint_{surf}\left(\rho\vec{V}\,d\vec{A}\right)\vec{V}=\iiint_{volum}\rho\vec{F}\,dv-\iint_{surf}P\,d\vec{A}$$



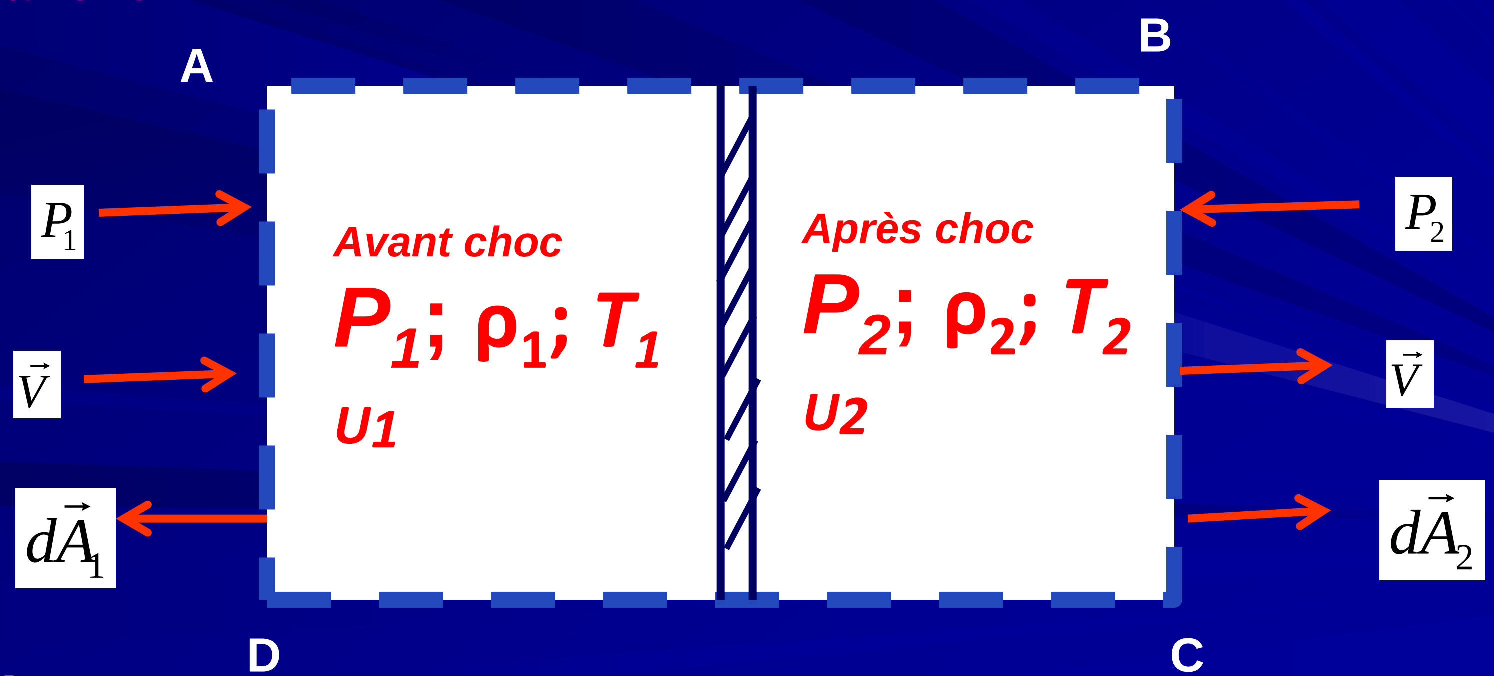
Choc normale

- **L'équation de momentum (qté de mvt)**

$$\underbrace{\cancel{\frac{\partial}{\partial t}\iiint \rho\vec{V}\,dv}}_{\substack{=0\\ rég.perm}} + \iint_{surf}\left(\rho\vec{V}\,d\vec{A}\right)\vec{V} = \underbrace{\cancel{\iiint \rho\vec{F}\,dv}}_{\substack{=0\\ pas\,de\,Fext}} - \iint_{surf} P\,d\vec{A}$$

=0 régime permanent

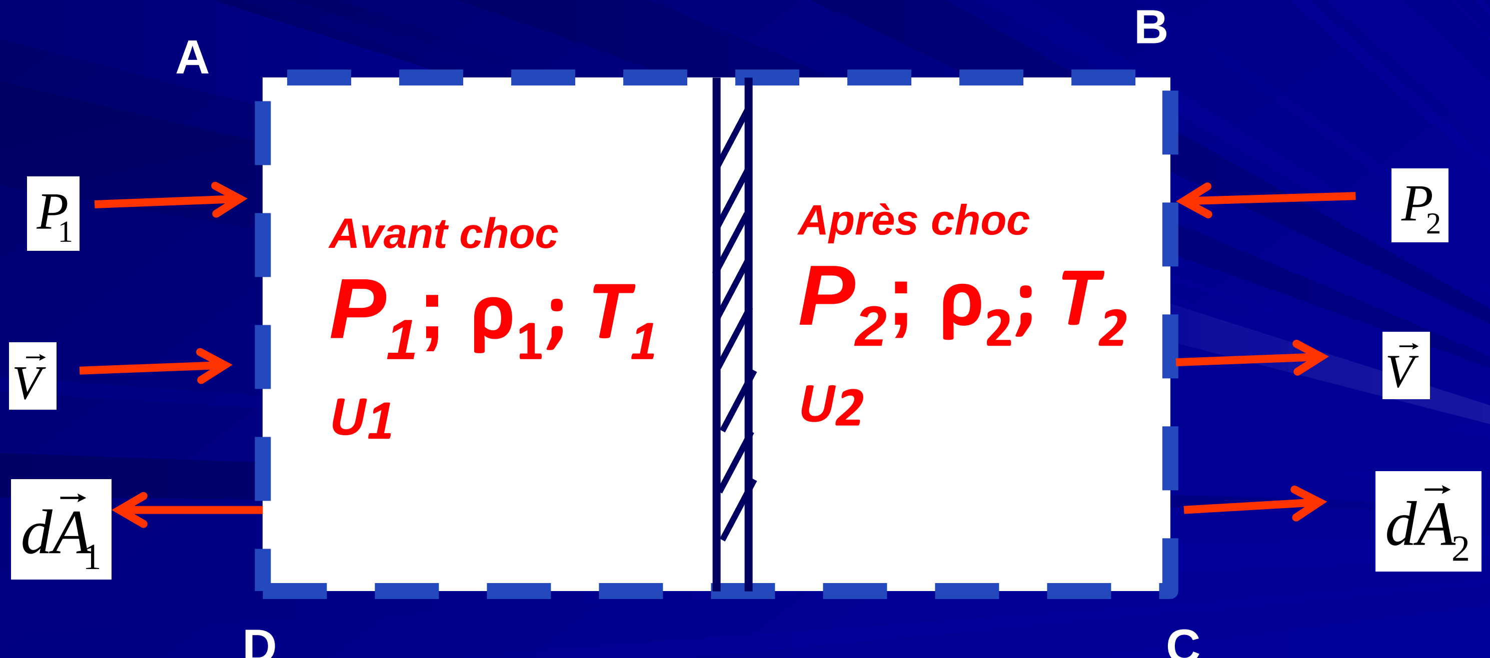
=0 pas de force ext



Choc normale

- **L'équation de momentum (qté de mvt)**
- D'où l'équation de qté de mvt devient après simplification:

$$\underbrace{\iint_{surf} (\rho \vec{V} d\vec{A})\vec{V}}_{a} = \underbrace{-\iint_{surf} P\, d\vec{A}}_{b}$$

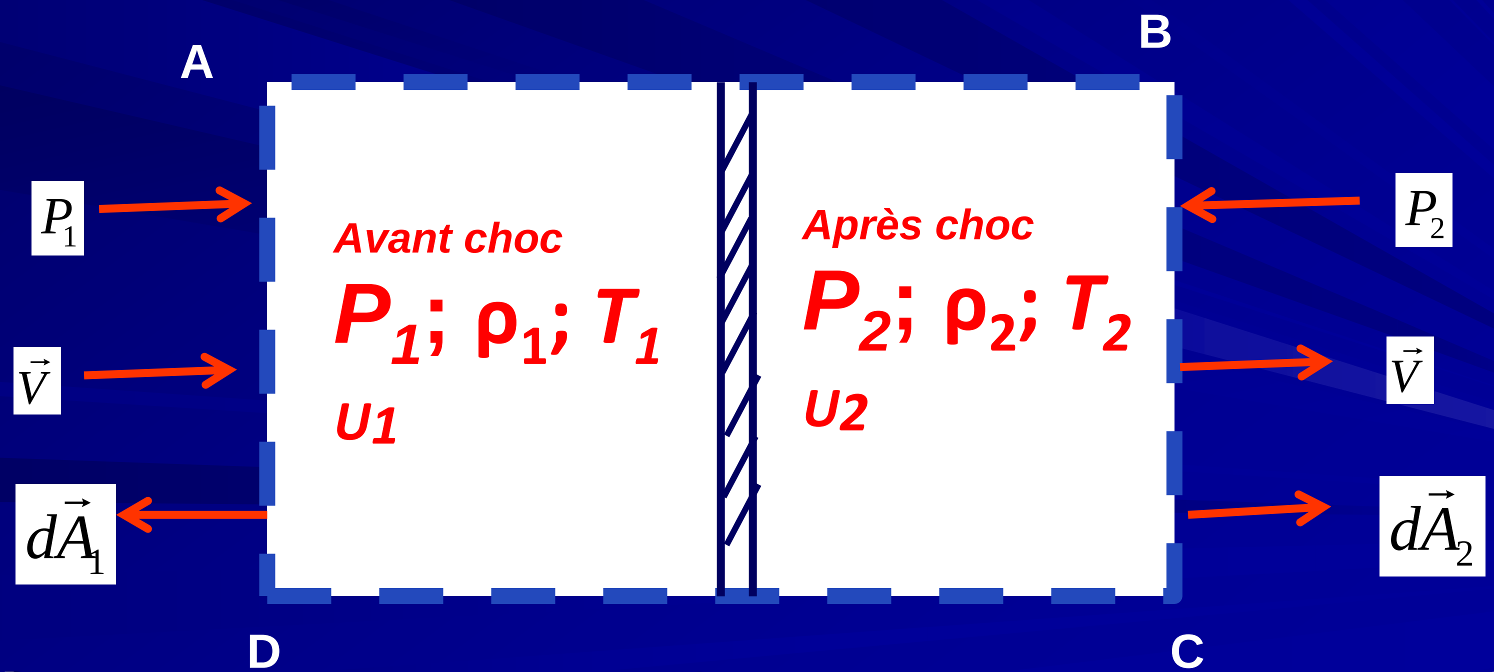


Choc normale

- L'équation de momentum (qté de mvt)
- Surface AD

a $$(\rho_1 \vec{u}_1 d\vec{A}_1)\vec{u}_1 = -\rho_1 u_1 dA_1 u_1 \vec{i}$$

b $$-P\, d\vec{A}_1 = -P(-dA_1 \vec{i}) = P dA_1 \vec{i}$$

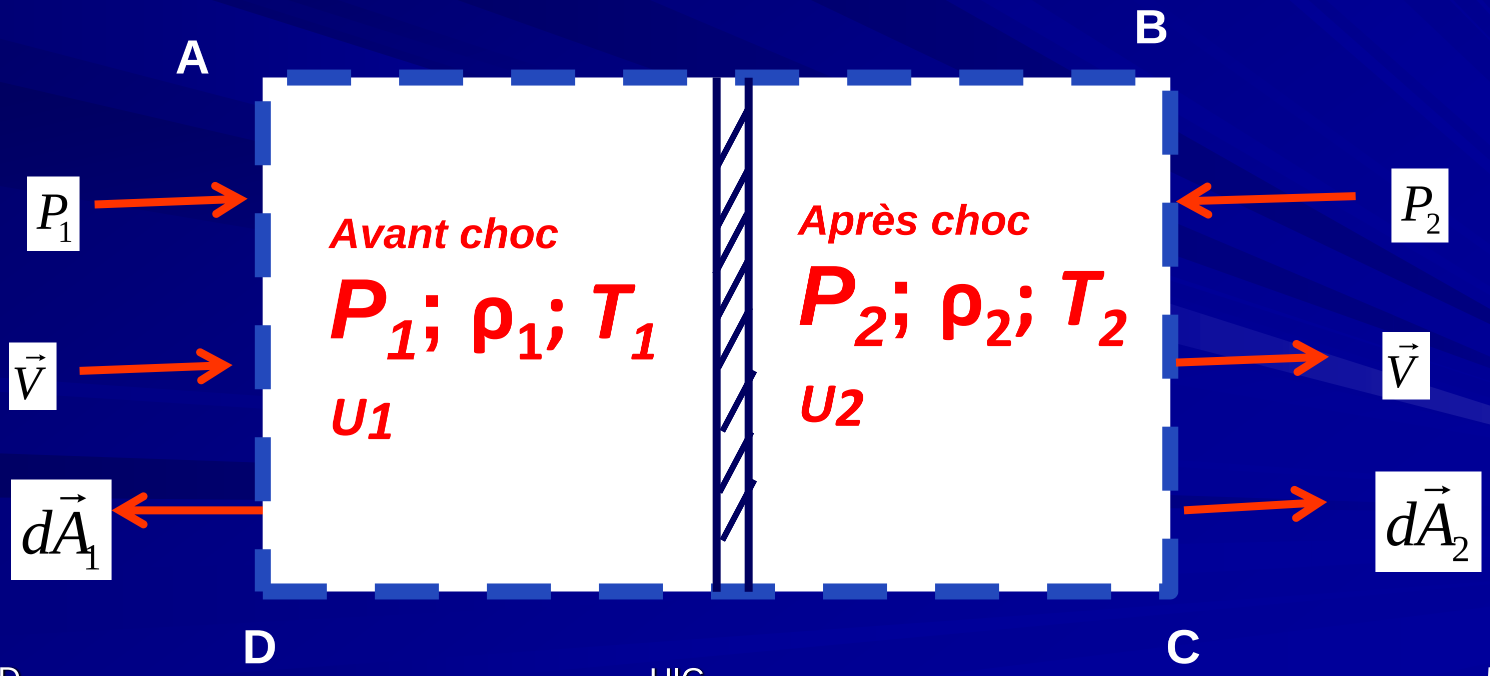


Choc normale

- **L'équation de momentum (qté de mvt)**
- **Surface BC**

a $$(\rho_2 \vec{u}_2 d\vec{A}_2)\vec{u}_2 = \rho_2 u_2 dA_2 u_2 \vec{i}$$

b $$-P\, d\vec{A}_2 = -P(dA_2 \vec{i}) = -PdA_2$$



Choc normale

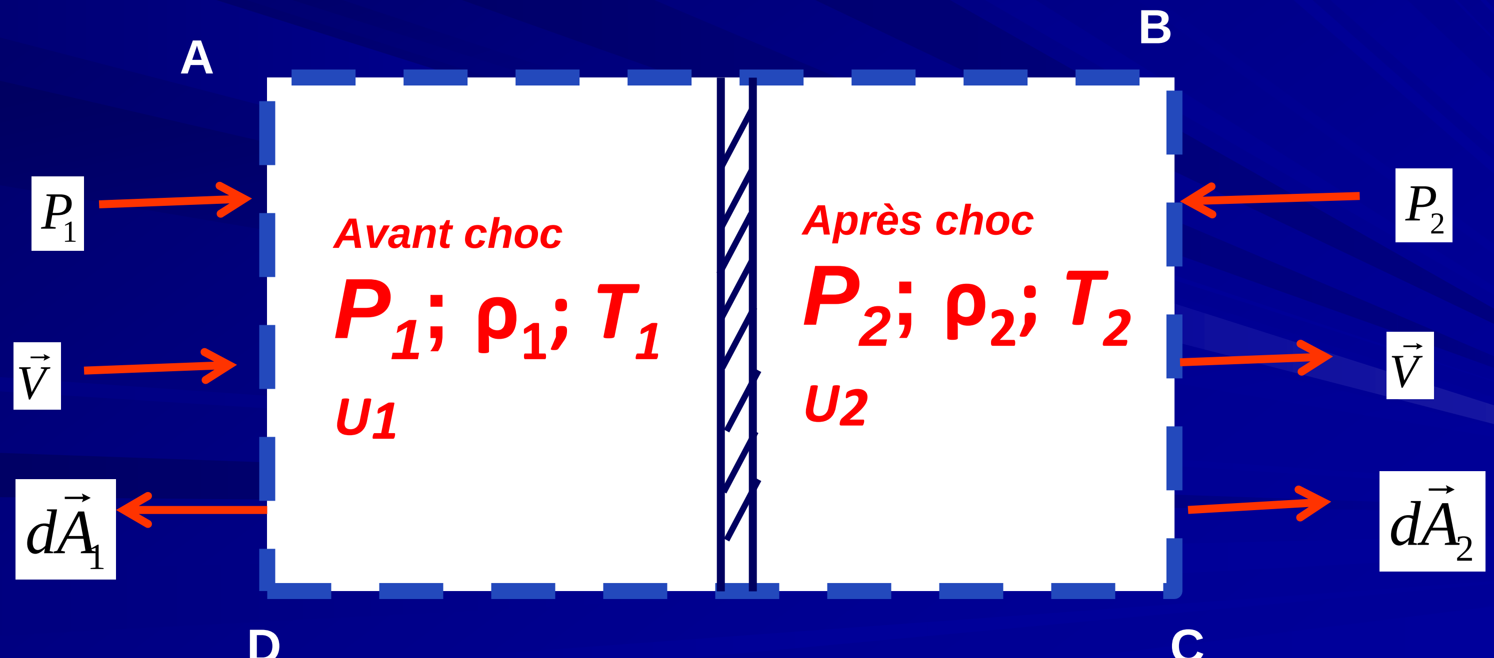
- **L'équation de momentum (qté de mvt)**
- D'où

$$\rho_2 u_2^2\, dA_2 - \rho_1 u_1^2\, dA_1 = P_1 dA_1 - P_2 dA_2$$

$$dA_2 = dA_1 = dA$$

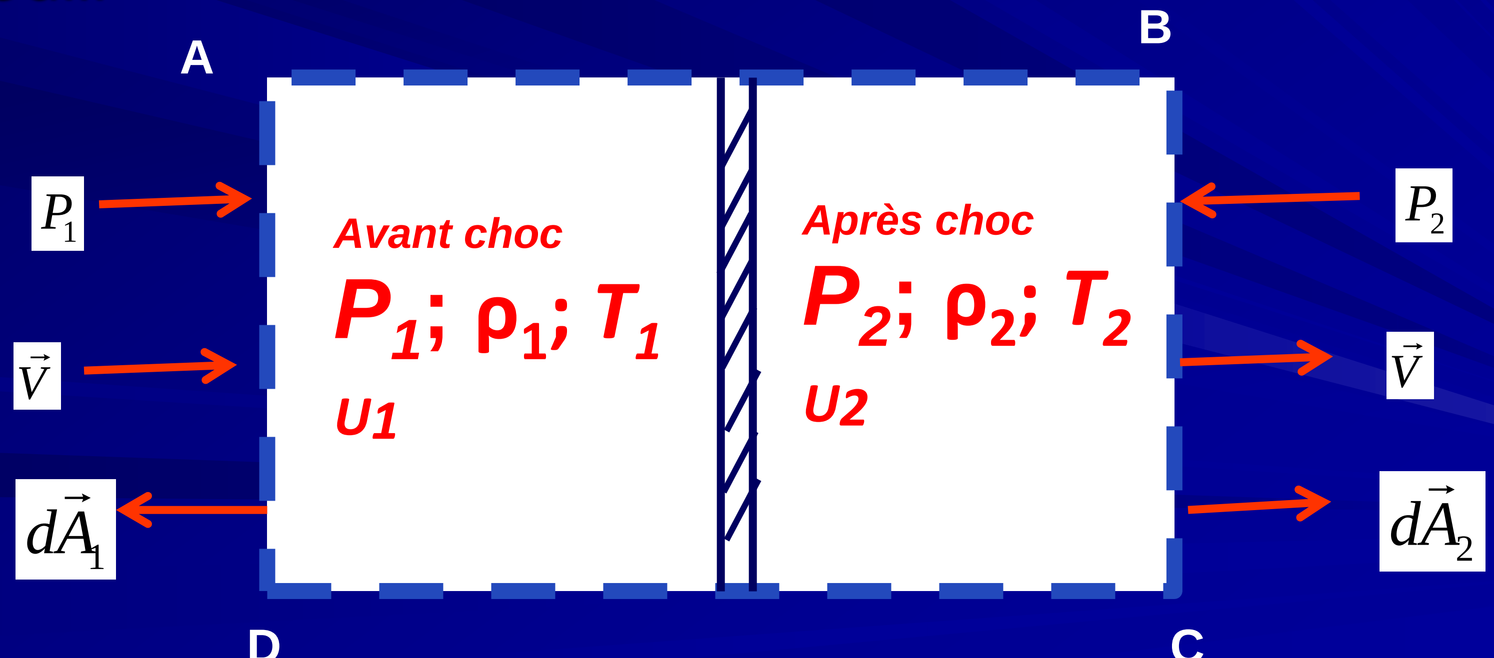
D'où

$$P_1 + \rho_1 u_1^2 = P_2 + \rho_2 u_2^2$$



Choc normale

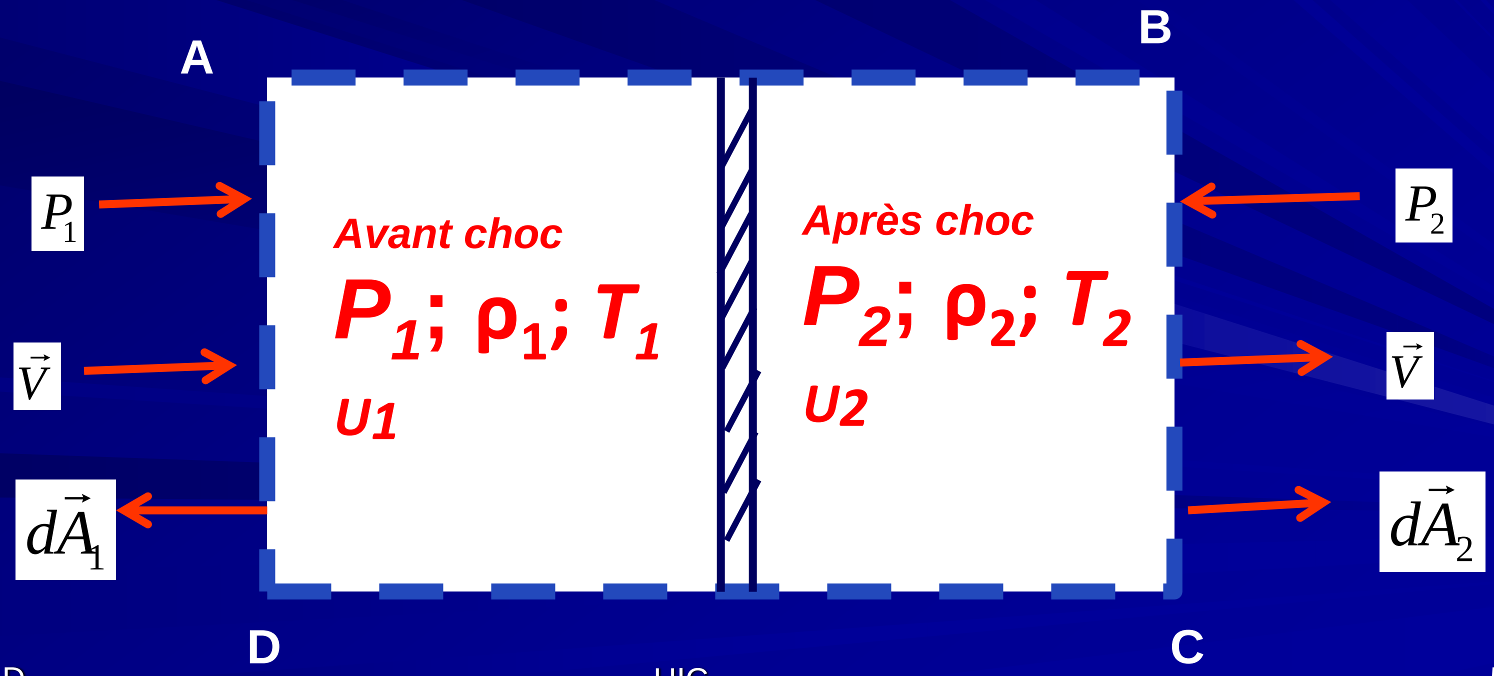
- L'équation de momentum (qté de mvt)
- Remarque:
- **Attention:** L'équation $P_1 + \rho_1 u_1^2 = P_2 + \rho_2 u_2^2$ de quantité de mouvement n'a rien avoir avec la relation de Bernoulli



Choc normale

L'équation d'énergie

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_{volum}\rho\left(e+\frac{V^2}{2}\right)dv+\iint_{surf}\rho\left(e+\frac{V^2}{2}\right)\vec{V}.d\vec{A}=\iiint_{volum}\dot{q}\rho\,dv-\iint_{surf}P\vec{V}d\vec{A}+\iiint_{volum}\rho(\vec{F}.\vec{V})dv$$



Choc normale

- **L'équation d'énergie**
  - Régime permanant
  - Pas de forces extérieures:

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\iiint \rho\left(e+\frac{V^2}{2}\right)dv}_{\substack{=0 \\ rég\ perm}} + \iint_{surf}\rho\left(e+\frac{V^2}{2}\right)\vec{V}.d\vec{A} = \iiint_{volum}\dot{q}\rho\, dv - \iint_{surf} P\vec{V}d\vec{A} + \underbrace{\iiint \rho(\vec{F}.\vec{V})dv}_{\substack{=0 \\ pas\ Fext}}$$

=0 **Q** **=0**

- **q**: le flux de chaleur par unité de masse
- **Q**: flux de chaleur total

Choc normale

- **L'équation d'énergie**

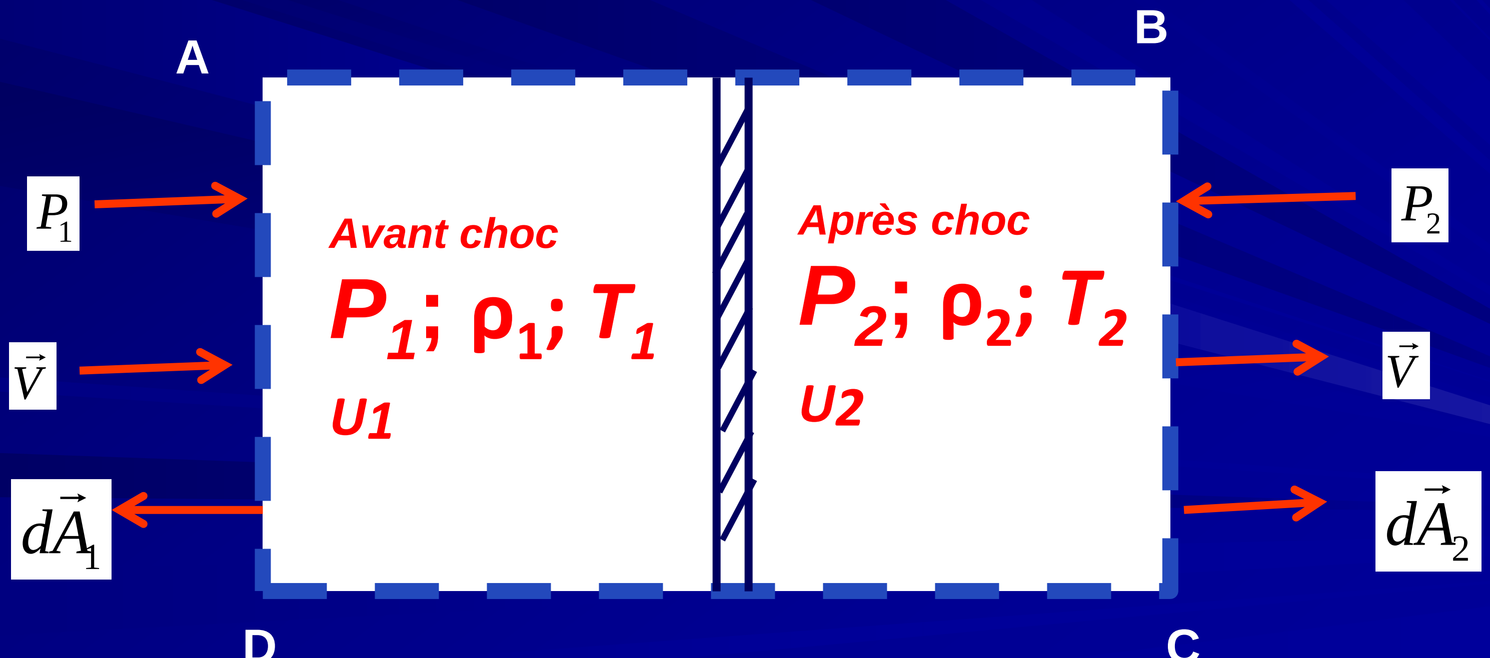
  – D'où l'équation d'énergie **se réduit à**:

$$\iint_{surf} \rho\left(e+\frac{V^2}{2}\right)\vec{V}.\,d\vec{A} = \iiint_{volum} \dot{q}\rho\, dv - \iint_{surf} P\vec{V}d\vec{A}$$

Choc normale

- **L'équation d'énergie**
  - Le même raisonnement que pour l'équation de continuité et de qté de mvt, **on obtient**:

$$\frac{\dot{Q}}{A} + P_1 u_1 + \rho_1 (e_1 + \frac{u_1^2}{2}) u_1 = P_2 u_2 + \rho_2 (e_2 + \frac{u_2^2}{2}) u_2$$



Choc normale

- **L'équation d'énergie**
  - Si
    - on **divise** l'équation précédente par $\rho_1 u_1$
    - en prenant en compte que(continuité) $\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2$

On obtient :

$$\frac{\dot{Q}}{A\rho_1 u_1} + \frac{P_1}{\rho_1} + (e_1 + \frac{u_1^2}{2}) = \frac{P_2}{\rho_2} + (e_2 + \frac{u_2^2}{2})$$

- Or, l'enthalpie: $h = e + Pv = e + \dfrac{P}{\rho}$
- on pose:

$$\dot{q} = \frac{\dot{Q}}{A\rho_1 u_1}$$

D'où

$$\dot{q} + h_1 + \frac{u_1^2}{2} = h_2 + \frac{u_2^2}{2}$$

Choc normale

- **Conclusion:** On obtient **les 3 équations** qui relient les propriétés du gaz **avant** et **après** le **choc**:
  - Équation de **continuité**:

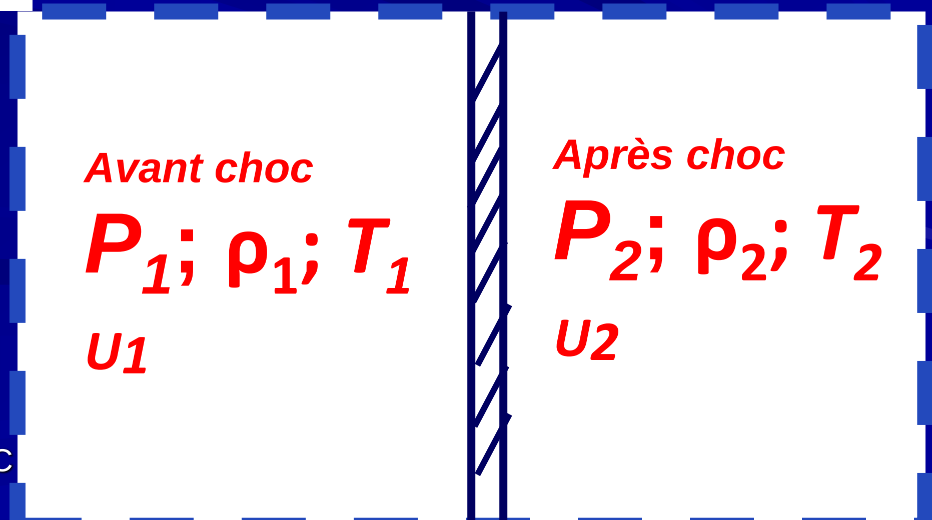
$$\rho_2 u_2 = \rho_1 u_1$$

  - Équation de **qté de mvt:**

$$P_1 + \rho_1 u_1^2 = P_2 + \rho_2 u_2^2$$

  - Équation **d'énergie**:

$$\dot{q} + h_1 + \frac{u_1^2}{2} = h_2 + \frac{u_2^2}{2}$$

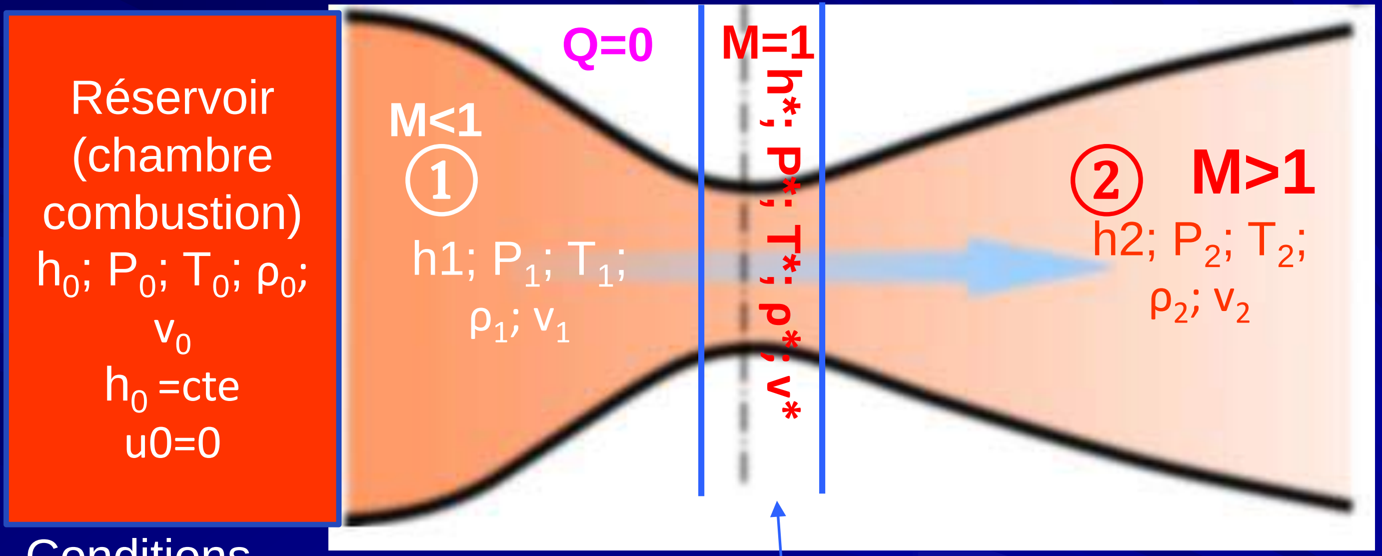


Application des équations de bilan pour une tuyère Laval (nozzle)

- On peut utiliser les équations établies précédemment pour une onde de choc normal dans la configuration géométrique d'un **tube de Laval.**

Application des équations de bilan pour une tuyère Laval (nozzle)

Dans le réservoir ou la chambre de combustion l'écoulement est **stagnant**



Conditions **réservoir**

La zone où M=1, est dit Throat=gorge on note les variable avec *

Application des équations de bilan pour une tuyère Laval (nozzle)

- On rappelle **l'équation d'énergie** établie pour une onde de choc normale:

$$\dot{q} + h_1 + \frac{u_1^2}{2} = h_2 + \frac{u_2^2}{2}$$

Écoulement isentropique : q=0

$$h_1 + \frac{u_1^2}{2} = h_2 + \frac{u_2^2}{2}$$

$$ou\ encore:$$

$$h + \frac{u^2}{2} = const$$

- **Remarques**:
- On note les variables du **réservoir** par **l'indice '0'** et **u0=0 → h0=cte : **l'enthalpie est constante dans le réservoir
- **La vitesse du son dans le réservoir est:**

$$a_0 = \sqrt{\gamma R T_0}$$

Application des équations de bilan pour une tuyère Laval (nozzle)

- On cherche à trouver une relation entre l'état ① et l'état ② (propriétés du fluide **avant** et **après** le **choc**).
- On a **l'éq. Énergie**

$$h_1 + \frac{u_1^2}{2} = h_2 + \frac{u_2^2}{2} \xrightarrow{h=c_pT} \boxed{c_pT_1 + \frac{u_1^2}{2} = c_pT_2 + \frac{u_2^2}{2}} \quad \textbf{(a)}$$

Gaz parfaitement calorifique

- Or

$$c_p = \frac{R\gamma}{\gamma - 1} \xrightarrow{\text{(a)}} \frac{\gamma R}{\gamma - 1}T_1 + \frac{u_1^2}{2} = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}T_2 + \frac{u_2^2}{2}$$

Application des équations de bilan pour une tuyère Laval (nozzle)

- Qu'on **peut écrire** aussi en utilisant l'équation d'état:

$$\frac{\gamma}{\gamma-1}\left(\frac{P_1}{\rho_1}\right)+\frac{u_1^2}{2}=\frac{\gamma}{\gamma-1}\left(\frac{P_2}{\rho_2}\right)+\frac{u_2^2}{2} \quad \text{(c)}$$

Relation entre P, ρ et u avant (région 1) et après (région 2) l'onde de choc

- En introduisant la **vitesse du son**: $a=\sqrt{\gamma RT}=\sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}}$
- On alors:

$$\frac{a_1^2}{\gamma-1}+\frac{u_1^2}{2}=\frac{a_2^2}{\gamma-1}+\frac{u_2^2}{2}$$

(b) Équation d'énergie

Application des équations de bilan pour une tuyère Laval (nozzle)

- Si maintenant on considère deux points: un point dans le réservoir et un point quelconque:

$$h+\frac{u^2}{2}=const \Rightarrow c_pT+\frac{u^2}{2}=c_pT_0+\frac{u_0^2}{2}$$

Pt quelconque **Pt réservoir**

Réservoir: u0=0

$$c_pT+\frac{u^2}{2}=c_pT_0 \Rightarrow \frac{T_0}{T}=1+\frac{u^2}{2c_pT}$$

- Ou encore:

$$\frac{T_0}{T}=1+\frac{u^2}{2\frac{\gamma R}{\gamma-1}T}=1+\frac{u^2}{\frac{2a^2}{\gamma-1}}=1+\frac{\gamma-1}{2}\left(\frac{u}{a}\right)^2$$

- Soit alors:

$$\boxed{\frac{T_0}{T}=1+\frac{\gamma-1}{2}M^2} \quad \text{(i)}$$

M: Mach n'importe où