

# ***CHAPITRE 3***

Performance des Systèmes  
linéaires asservis :

Analyse de la stabilité & Analyse  
de précision

# Contenu

---

## □ Introduction

- ◆ Éléments d'une structure d'asservissement

## □ Système en boucle fermée

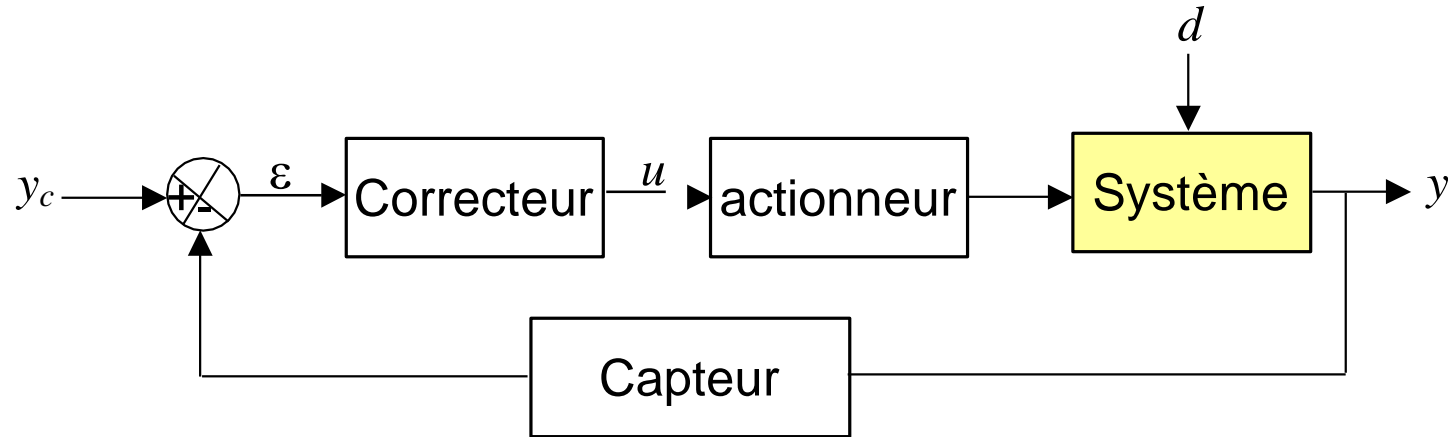
- ◆ Fonction de transfert en boucle ouverte – notion de chaîne directe
- ◆ Fonction de transfert en boucle fermée
- ◆ Propriétés des systèmes asservis

## □ Analyse de la stabilité d'un système asservi

- ◆ Critère de Routh

# Introduction (1)

## ❑ Schéma de principe d'un asservissement



❑  $y_c$  : consigne

❑  $\varepsilon = y_c - y$  : signal d'erreur (écart entre consigne et sortie du système)

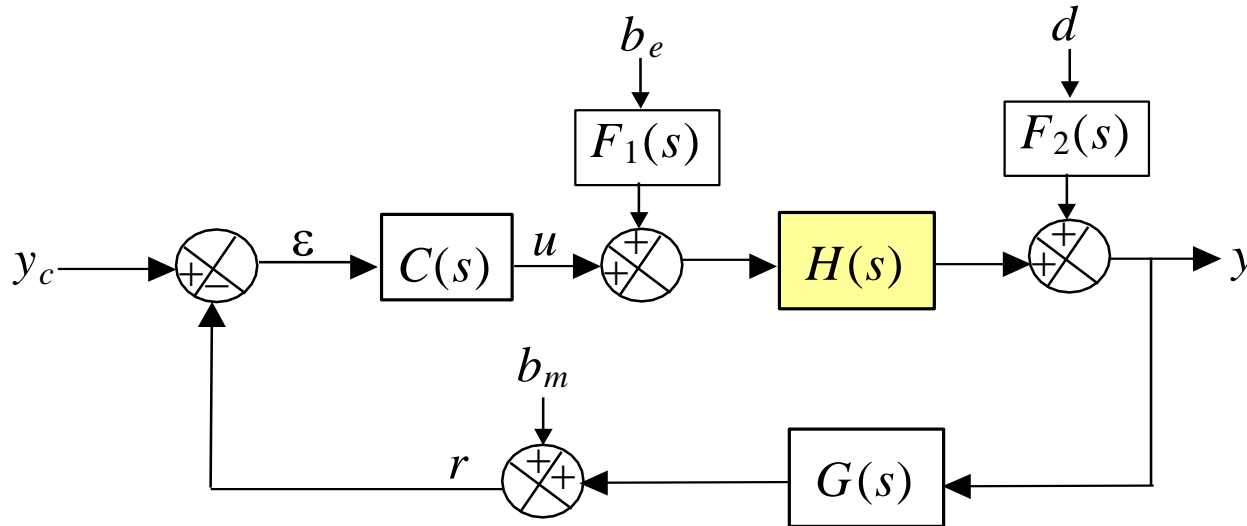
❑ Correcteur : élabore la loi de commande  $u$

❑ Actionneur : applique la commande au système. Joue en général le rôle d'amplificateur de puissance

❑  $y$  : sortie du système ou grandeur à asservir

# Introduction (2)

## Structure fonctionnelle d'un asservissement



- ❑  $C(s)$  : fonction de transfert du correcteur
- ❑  $H(s)$  : fonction de transfert du système
- ❑  $G(s)$  : fonction de transfert de la boucle de retour (capteur en général)
- ❑  $r$  : signal de retour
- ❑  $d$  : perturbation externe (mesurable ou non),  $b_m$  : bruit de mesure
- ❑  $b_e$  : bruit d'entrée (bruit de transmission de  $u$  aux actionneurs)

# Introduction (3)

---

## □ Types d'asservissement

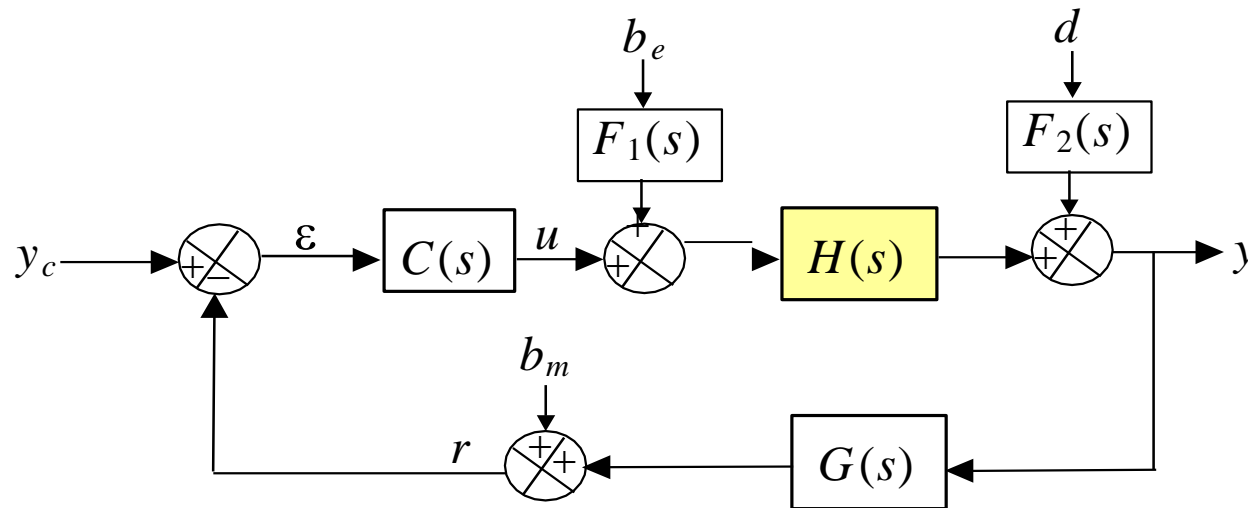
- ◆ Régulation : consigne  $y_c$  constante
- ◆ Poursuite de trajectoire : consigne  $y_c$  varie

## □ Objectifs de l'asservissement

- ◆ Stabilité du système asservi
- ◆ Précision : en régime permanent, la sortie doit suivre la consigne
- ◆ Rapidité : Le système asservi doit répondre le plus rapidement possible aux variations de la consigne
- ◆ Rejet des perturbations et des bruits
- ◆ Robustesse : le système en BF doit résister aux variations de paramètres, à l'imprécision du modèle  $H(s)$

Le travail de l'automaticien est de régler convenablement le correcteur pour répondre au mieux à ces exigences

# Analyse du système asservi (1)



## □ Définitions

### ◆ Fonction de transfert en boucle ouverte $H_{BO}(s)$

Supposons les perturbations et les bruits nuls. La fonction de transfert en boucle ouverte est la **transmittance entre le signal d'erreur  $\varepsilon$  et le signal de retour  $r$**

$$H_{BO}(s) = \frac{R(s)}{E(s)} = C(s)H(s)G(s)$$

# Analyse du système asservi (2)

## ◆ Chaîne directe

C'est la cascade de transmittance entre une entrée ( $y_c$  ou les perturbations  $d, b_m, b_e$ ) et la sortie  $y$

Entre  $y_c$  et  $y$  :  $C(s)H(s)$ ,

Entre  $d$  et  $y$  :  $F_2(s)$

Entre  $b_e$  et  $y$  :  $F_1(s)H(s)$ ,

Entre  $b_m$  et  $y$  :  $C(s)H(s)$

## ◆ Fonction de transfert en boucle fermée $H_{BF}(s)$

C'est la transmittance entre la consigne  $y_c$  et la sortie  $y$

$$H_{BF}(s) = \frac{Y(s)}{Y_c(s)} = \frac{C(s)H(s)}{1 + C(s)H(s)G(s)}$$

$$H_{BF}(s) = \frac{C(s)H(s)}{1 + H_{BO}(s)}$$

Si  $G(s)=1$ , on parle de retour unitaire

Dans ce cas particulier, on a :

$$H_{BF}(s) = \frac{H_{BO}(s)}{1 + H_{BO}(s)}$$

# Propriétés d'un système asservi

---

## □ Stabilité

Le système asservi doit fonctionner automatiquement. Il est indispensable qu'il soit stable. Autrement, le système évolue en s'éloignant de son point (ou trajectoire) d'équilibre, ce qui peut engendrer des saturations voire une dégradation du système

## □ Précision

En régime permanent, la sortie du système asservi doit suivre la référence sans erreur et rejeter rapidement les perturbations

## □ Performances dynamiques

Elles caractérisent le temps de réaction du système lorsque la consigne varie et la rapidité avec laquelle le système asservi "efface" les perturbations



# Stabilité des systèmes linéaires asservis (1)

---

## □ Notion de stabilité : définitions

- Un système est stable si et seulement si écarté de sa position d'équilibre (point ou trajectoire), il tend à y revenir.

Une faible perturbation des conditions initiales du système engendre une faible perturbation de sa trajectoire

## □ Théorème de stabilité

Un système linéaire continu à temps invariant est asymptotiquement stable si et seulement si les pôles de sa fonction de transfert sont à parties réelles strictement négatives

# Stabilité des systèmes linéaires asservis (3)

## □ Application du théorème de stabilité aux systèmes en BF

$$H_{BF}(s) = \frac{C(s)H(s)}{1 + H_{BO}(s)} \quad \text{avec} \quad H_{BO}(s) = C(s)H(s)G(s)$$

Le système asservi est stable asymptotiquement si et seulement si les pôles de  $H_{BF}(s)$  sont à parties réelles strictement négatives

Equation caractéristique du système asservi :  $1 + H_{BO}(s) = 0$

Le système asservi est stable ssi les racines de l'équation caractéristique sont à parties réelles strictement négatives.

Peut-on analyser la stabilité en BF à partir de  $H_{BO}(s)$  sans calculer explicitement la fonction de transfert en BF?

## □ Outils d'analyse de la stabilité en BF à partir de $H_{BO}(s)$

- ◆ Critère algébrique de Routh
- ◆ Critère graphique de Nyquist

# Analyse de la stabilité : critère de Routh (1)

---

## □ Intérêt du critère

Soit  $D(s)$  le dénominateur de la fonction de transfert d'un système

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \quad \text{avec} \quad D(s) = a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0$$

Le critère de Routh permet de déterminer si les racines de l'équation caractéristique  $D(s)=0$  du système sont à parties réelles positives ou non sans calculer explicitement ces racines

## □ Principe du critère de Routh

$$D(s) = a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0$$

### ◆ Condition nécessaire (CN) de stabilité

Une condition nécessaire de stabilité est que tous les coefficients  $a_i$  de  $D(s)$  soient strictement de même signe.

# Analyse de la stabilité : critère de Routh (2)

## Principe du critère de Routh

### Condition nécessaire et suffisante (CNS) de stabilité

Si la CN est vérifiée, il faut construire le tableau de Routh

Ligne 1	$a_n$	$a_{n-2}$	$a_{n-4}$	$a_{n-6}$	...
Ligne 2	$a_{n-1}$	$a_{n-3}$	$a_{n-5}$	$a_{n-7}$	...
Ligne 3	$a_{31}$	$a_{32}$	$a_{33}$	$a_{34}$	...
Ligne 4	$a_{41}$	$a_{42}$	$a_{43}$	$a_{44}$	...
⋮	...	...	...	...	...

$$a_{31} = - \frac{\begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}}{a_{n-1}}$$

$$a_{32} = - \frac{\begin{vmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{vmatrix}}{a_{n-1}}$$

$$a_{41} = - \frac{\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}}{a_{31}}$$

$$a_{42} = - \frac{\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-5} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}}{a_{31}}$$

Le tableau a au plus  $n+1$  lignes ( $n$  : ordre de  $D(s)$ )

# Analyse de la stabilité : critère de Routh (3)

## Enoncé du critère de Routh : CNS

Un système est asymptotiquement stable ssi tous les coefficients de la première colonne du tableau de Routh sont tous de même signe

## Remarques

- Le nombre de changements de signe dans la première colonne est égal au nombre de pôles à parties réelles positives
- Si dans la première colonne il existe un élément nul, le système admet au moins un pôle à partie réelle positive ou une paire de pôles conjugués imaginaires purs

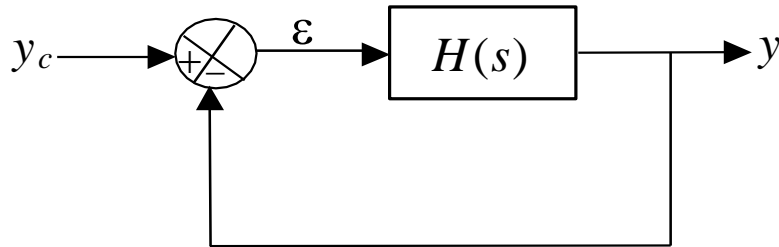
## □ Application du critère de Routh à un système en BF

$$\text{Soit } H_{BO}(s) = \frac{N_{BO}(s)}{D_{BO}(s)} \Rightarrow H_{BF}(s) = \frac{C(s)H(s)}{1 + H_{BO}(s)} = \frac{D_{BO}(s)C(s)H(s)}{D_{BO}(s) + N_{BO}(s)}$$

Appliquer le critère de Routh au dénominateur de la fonction de transfert en BF c'est-à-dire  $D_{BO}(s) + N_{BO}(s)$

# Analyse de la stabilité : critère de Routh (4)

## Exemple 1 : étude de la stabilité du système en BF



$$H(s) = \frac{10}{s(s^2 + s + 3)}$$

Boucle fermée à retour unitaire :  $H_{BF}(s) = \frac{H(s)}{1 + H(s)} = \frac{10}{s^3 + s^2 + 3s + 10}$

Tableau de Routh  $D_{BF}(s) = s^3 + s^2 + 3s + 10$

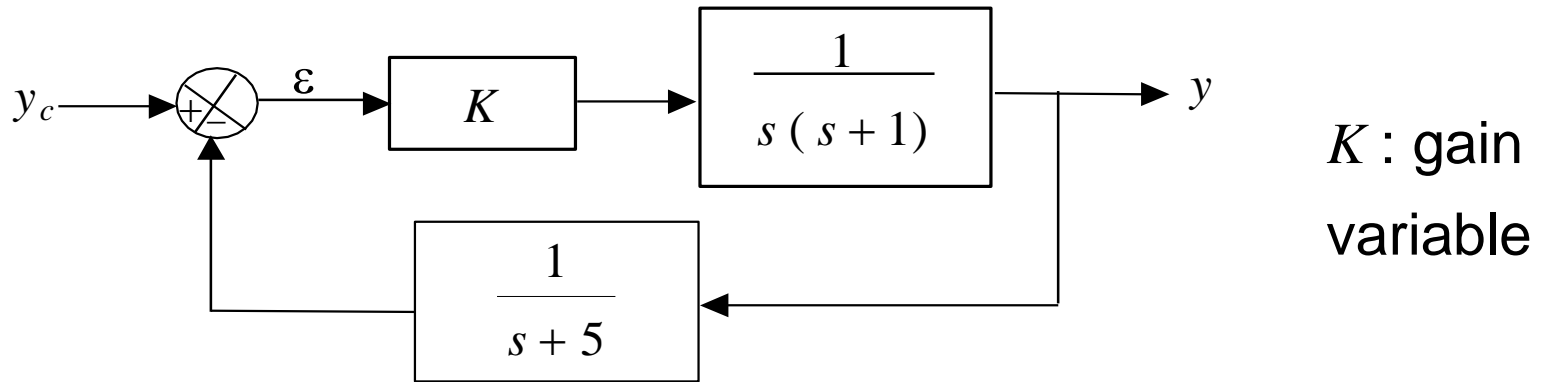
Ligne 1	1	3
Ligne 2	1	10
Ligne 3	-7	0
Ligne 4	10	0

Il y a un changement de signe dans la première colonne de ce tableau

Le système en boucle fermée à retour unitaire est instable

# Analyse de la stabilité : critère de Routh (5)

## Exemple 2 : étude de la stabilité du système en BF



$$H_{BO}(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+5)} \Rightarrow H_{BF}(s) = \frac{K(s+5)}{s^3 + 6s^2 + 5s + K}$$

Ligne 1	1	5
Ligne 2	6	$K$
Ligne 3	$\frac{30-K}{6}$	0
Ligne 4	$K$	0

D'après le critère de Routh, la condition de stabilité impose :

$$K > 0 \quad \text{et} \quad \frac{30-K}{6} > 0$$

$$\Rightarrow 0 < K < 30$$





# Précision et rapidité des systèmes asservis.

Nous supposerons dans l'étude qui suit que les systèmes asservis étudiés sont stables.

Les deux critères de performance étudiés sont:

La précision

La rapidité

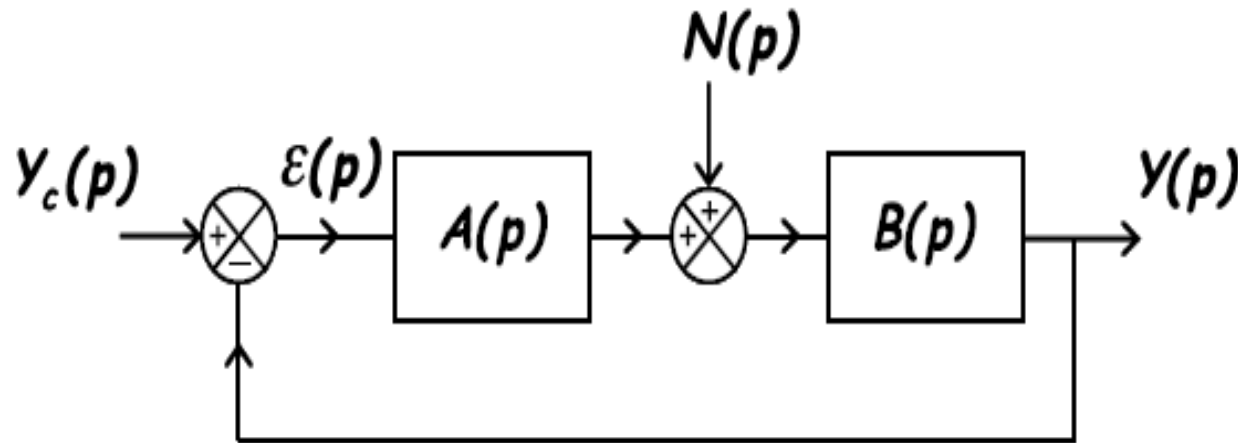
# Précision.

---

Estimer la précision d'un système asservi c'est mesurer ou prédire l'évolution temporelle de l'écart entre la consigne d'entrée et la sortie du système :

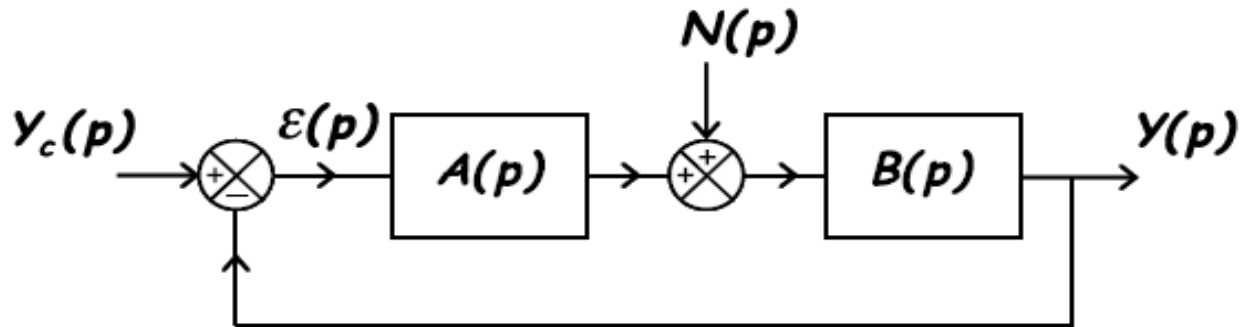
$$\varepsilon(t) = y_c(t) - y(t).$$

Le but étant de minimiser  $\varepsilon(t)$ .



# Précision.

Le système est susceptible d'évoluer sous l'effet d'une modification de la consigne  $y_c(t)$  ou de l'apparition de perturbations extérieures  $n(t)$ .



$$Y(p) = \underbrace{A(p).B(p)}_{\text{FTBO en l'absence de perturbation}} .\epsilon(p) + B(p).N(p)$$

$$Y(p) = T(p) [Y_c(p) - Y(p)] + B(p).N(p)$$

$$Y(p) [1 + T(p)] = T(p).Y_c(p) + B(p).N(p)$$

$$Y(p) = \underbrace{\frac{T(p)}{1 + T(p)}}_{\text{FTBF}} Y_c(p) + \frac{B(p)}{1 + T(p)} N(p)$$

# Précision.

---

L'étude de la précision se décompose en deux:

L'étude de la poursuite : évolution de l'erreur pour les variations de la consigne en l'absence de perturbations,

L'étude en régulation : évolution de l'erreur en présence de perturbations pour une consigne nulle.

# Précision.

---

## a – Précision statique en poursuite – Erreur en régime permanent.

L'erreur en régime permanent est :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon(t) = \varepsilon_s$$

d'après le théorème de la valeur finale

Avec 
$$\varepsilon_s = \lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p\varepsilon(p)$$

$$\varepsilon(p) = Y_c(p) - Y(p)$$

$$\varepsilon(p) = Y_c(p) - \frac{T(p)}{1+T(p)} Y_c(p)$$

$$\varepsilon(p) = \frac{Y_c(p)}{1+T(p)}$$

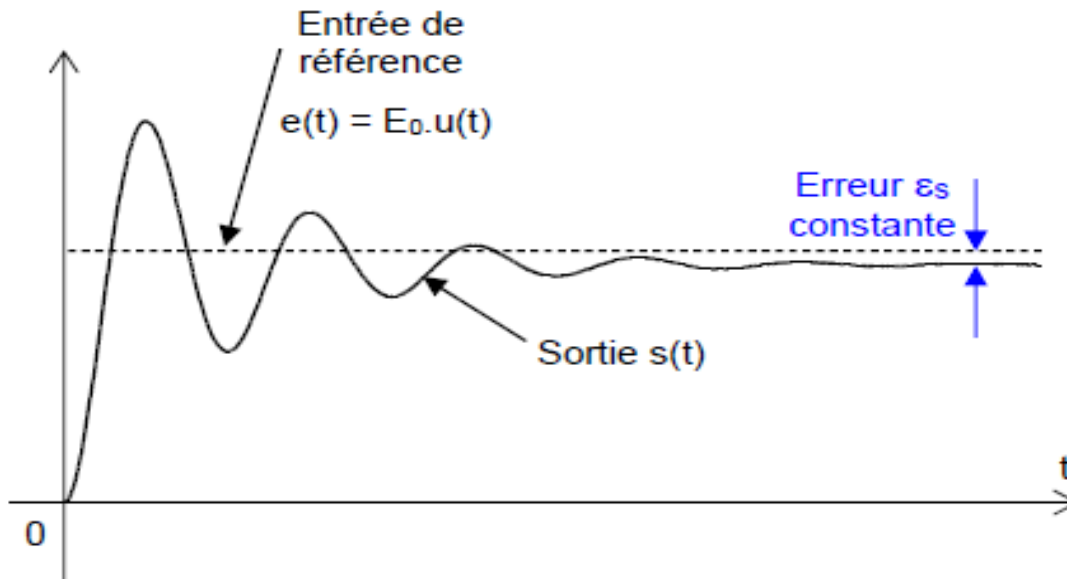
# Précision.

D'où

$$\varepsilon_s = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{pY_c(p)}{1+T(p)}$$

$T(p)$  est la FTBO,

i. Erreur statique pour une entrée échelon



# Précision.

---

Si l'entrée vaut :  $E(p) = \frac{E_0}{p}$

Donc

$$\varepsilon_s = \lim_{p \rightarrow 0} \left( p \cdot \frac{E(p)}{1 + \text{FTBO}(p)} \right) = \frac{E_0}{1 + \lim_{p \rightarrow 0} \text{FTBO}(p)}$$

$$\varepsilon_s = \frac{E_0}{1 + K_e}$$

Avec  $K_e = \lim_{p \rightarrow 0} \text{FTBO}(p) = \text{Constante d'erreur statique d'échelon}$

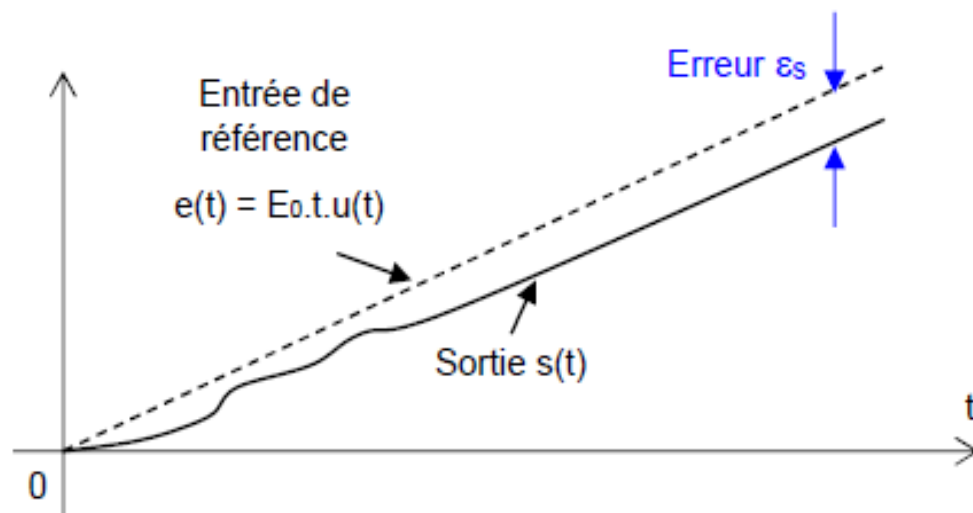
*ou gain statique en Boucle ouverte*

# Précision.

ii. Erreur statique ( ou erreur de traînage ) pour une entrée rampe

L'entrée vaut :

$$E(p) = \frac{E_0}{p^2}$$



$$\varepsilon_s = \lim_{p \rightarrow 0} \left( p \cdot \frac{E(p)}{1 + \text{FTBO}(p)} \right) = \lim_{p \rightarrow 0} \left( \frac{E_0}{p + p \cdot \text{FTBO}(p)} \right) = \frac{E_0}{\lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \text{FTBO}(p)}$$

$$\varepsilon_s = \frac{E_0}{K_v}$$

Avec  $K_v = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \text{FTBO}(p) = \text{Constante d'erreur statique de vitesse}$

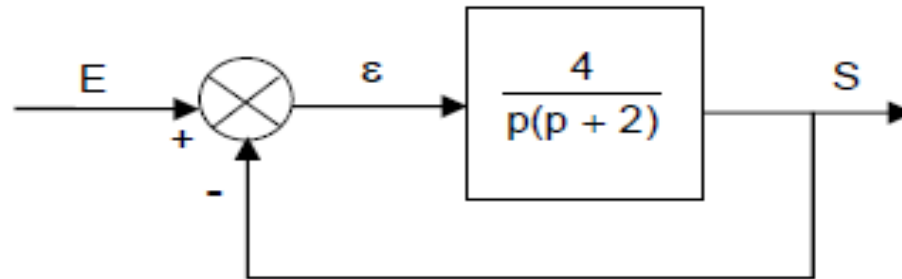


# Précision.

---

## *Exemple*

Soit le système asservi suivant.



Calculons ses différentes erreurs statiques pour différentes entrées canoniques (échelon unitaire et rampe)

# Précision.

---

## b – Précision statique en régulation (c'est-à-dire en présence de perturbations).

On a

$$\varepsilon(p) = \frac{1}{1+T(p)} Y_c(p) - \underbrace{\frac{B(p)}{1+T(p)} N(p)}_{\text{erreur en régulation}}$$

En considérant  $Y_c(p) = 0$  et en faisant abstraction du signe on écrira :

$$\varepsilon(p) = \frac{B(p)}{1+T(p)} N(p)$$

On considère une perturbation assimilable à un échelon unitaire

$$N(p) = 1/p.$$

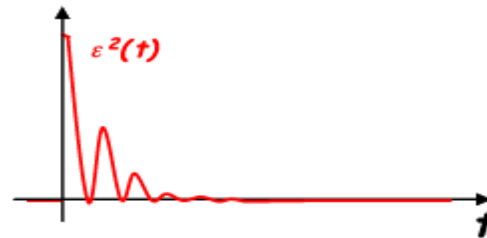
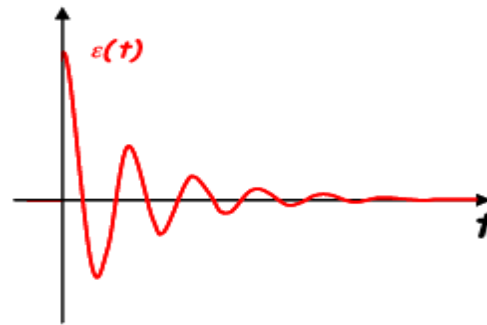
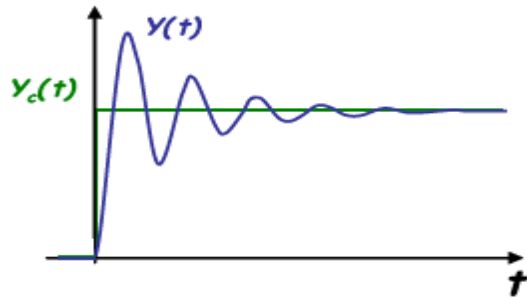
D'où, d'après le théorème de la valeur finale :

$$\varepsilon_s = \lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \frac{B(p)}{1+T(p)} \cdot \frac{1}{p} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{B(p)}{1+T(p)}$$

# Précision.

## c. Critères de performance.

on considère un système stable dont l'erreur statique en réponse à un échelon est nulle



La meilleure précision est obtenue pour  $I$  faible.

$$I = \int_0^{+\infty} \epsilon^2(t) dt$$

# Rapidité des systèmes

On cherche à obtenir des systèmes asservis une réponse rapide aux variations de la consigne et une aptitude à effacer rapidement les perturbations.

Le temps de réponse à 5% donne une bonne évaluation de la rapidité d'un système, il exprime le temps mis par le processus soumis à un échelon pour atteindre sa valeur de régime permanent à  $\pm 5\%$  près (et y rester).

