Cours Automatique linéaire

CHAPITRE 2

Réponse temporelle des systèmes dynamiques continus LTI

Introduction

Système continu LTI

$$u(t) \longrightarrow \boxed{H(s)} \longrightarrow y(t)$$

$H(s)$: fonction de transfert

Quelle est la forme de la sortie $y(t)$ du modèle en réponse aux signaux usuels :

- impulsion de Dirac $u(t)=\delta(t)$
- signal échelon $u(t)=\Gamma(t)$
- signal rampe $u(t)=v(t)$

Décomposition en éléments simples

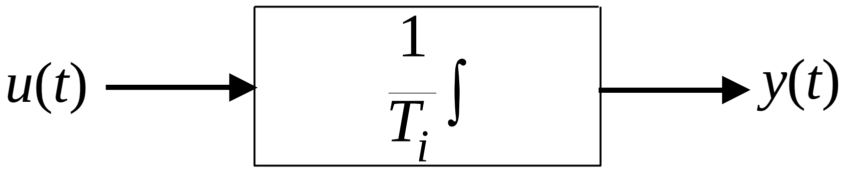
$$H(s) = \sum_i H_i(s)$$

$H_i(s)$: fonction de transfert de systèmes de base ou systèmes fondamentaux (1^{er} ordre, 2^{e} ordre)

Intégrateur (1)

- Système régi par l'équation différentielle

$$T_i \dot{y}(t) = u(t) \quad \Rightarrow \quad y(t) = \frac{1}{T_i}\int_0^t u(\tau)\,d\tau \qquad \text{(CI nulle)}$$



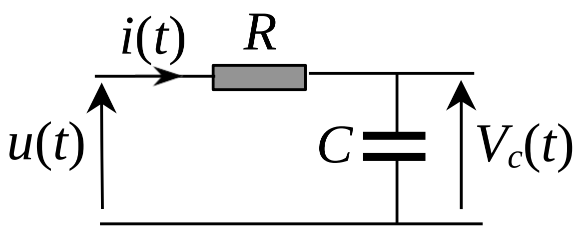
- Fonction de transfert

$$H(s) = \frac{1}{T_i\, s}$$

T_i : constante d'intégration

Pôle : $\lambda=0$

- Exemple



Relation entre le courant $i(t)$ et $V_c(t)$

$$y(t) = V_c(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)\,d\tau$$

Intégrateur (2)

Réponse aux signaux usuels

- **Réponse impulsionnelle**

$$u(t) = \delta(t) \quad \Rightarrow \quad h(t) = \frac{\Gamma(t)}{T_i}$$

La réponse impulsionnelle d'un intégrateur est un échelon d'amplitude $1/T_i$

- **Réponse indicielle**

$$u(t) = \Gamma(t) \quad \Rightarrow \quad y(t) = \frac{1}{T_i} v(t)$$

La réponse indicielle d'un intégrateur est une rampe de pente $1/T_i$

- **Réponse à une rampe**

$$u(t) = v(t) \quad \Rightarrow \quad y(t) = ?$$

Système du 1er ordre

- Système régi par l'équation différentielle

$$T\dot{y}(t)+y(t)=Ku(t)$$

- Fonction de transfert

$$T\dot{y}(t)+y(t)=Ku(t) \quad \Rightarrow \quad sT\,Y(s)+Y(s)=KU(s)$$

$$\boxed{H(s)=\frac{K}{1+T\,s}}$$

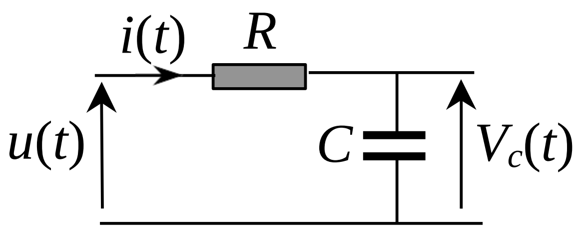
T : constante de temps

K : gain statique

Pôle : $\lambda=-\dfrac{1}{T}$

Condition de stabilité : $T>0$

- Exemple



$$RC\,\dot{y}(t)+y(t)=u(t) \quad \text{avec} \quad y(t)=V_c(t)$$

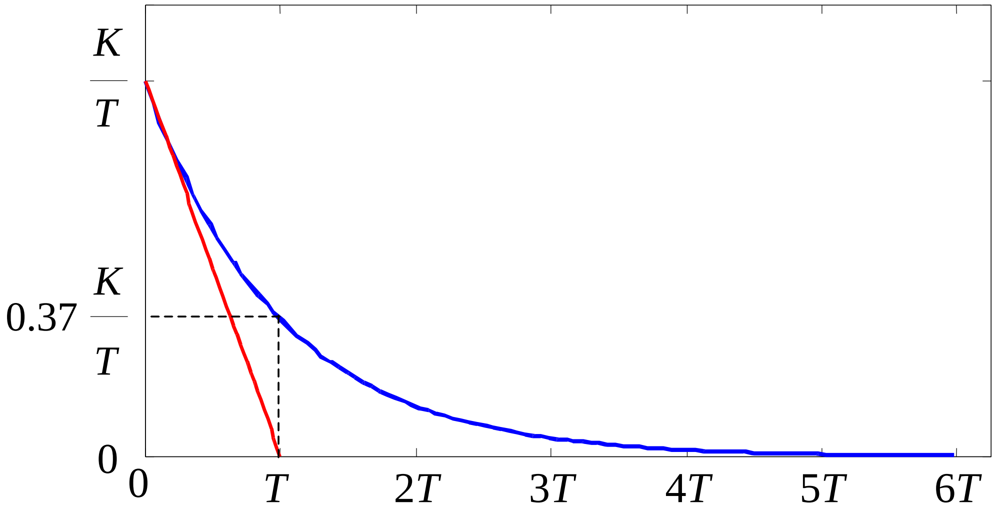
$$H(s)=\frac{1}{1+Ts} \quad \text{avec} \quad T=RC$$

Système du 1er ordre

Réponse impulsionnelle

- Entrée : $u(t) = \delta(t)$
- Réponse du système : $h(t) = \dfrac{K}{T} e^{-\frac{t}{T}}$
- Tangente à l'origine : $x(t) = -\dfrac{K}{T^2} t + \dfrac{K}{T}$ (Pente $= -\dfrac{K}{T^2}$)

La tangente à l'origine coupe l'axe des temps en $t = T$



0	T	$2T$	$3T$
$h_0 = \dfrac{K}{T}$	$0.37\ h_0$	$0.13\ h_0$	$0.05\ h_0$

Système du 1er ordre

Réponse indicielle

- Entrée : signal échelon $u(t) = \Gamma(t)$

- Réponse du système

$u(t) = \Gamma(t) \;\Rightarrow\; U(s) = \dfrac{1}{s}$. On en déduit $Y(s) = \dfrac{K}{s(1+Ts)}$

$$\boxed{y(t) = K\left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right) = K\left(1 - e^{\lambda t}\right)}$$

- Valeur de la sortie en régime permanent

$$y_\infty = \lim_{t\to\infty} y(t) = K$$

- Tangente à l'origine

$$x(t) = \frac{K}{T}t \quad \left(\text{Pente} = \frac{K}{T}\right)$$

La tangente à l'origine coupe l'asymptote horizontale $y = K$ en $t = T$

Système du 1er ordre

Réponse indicielle (fin)

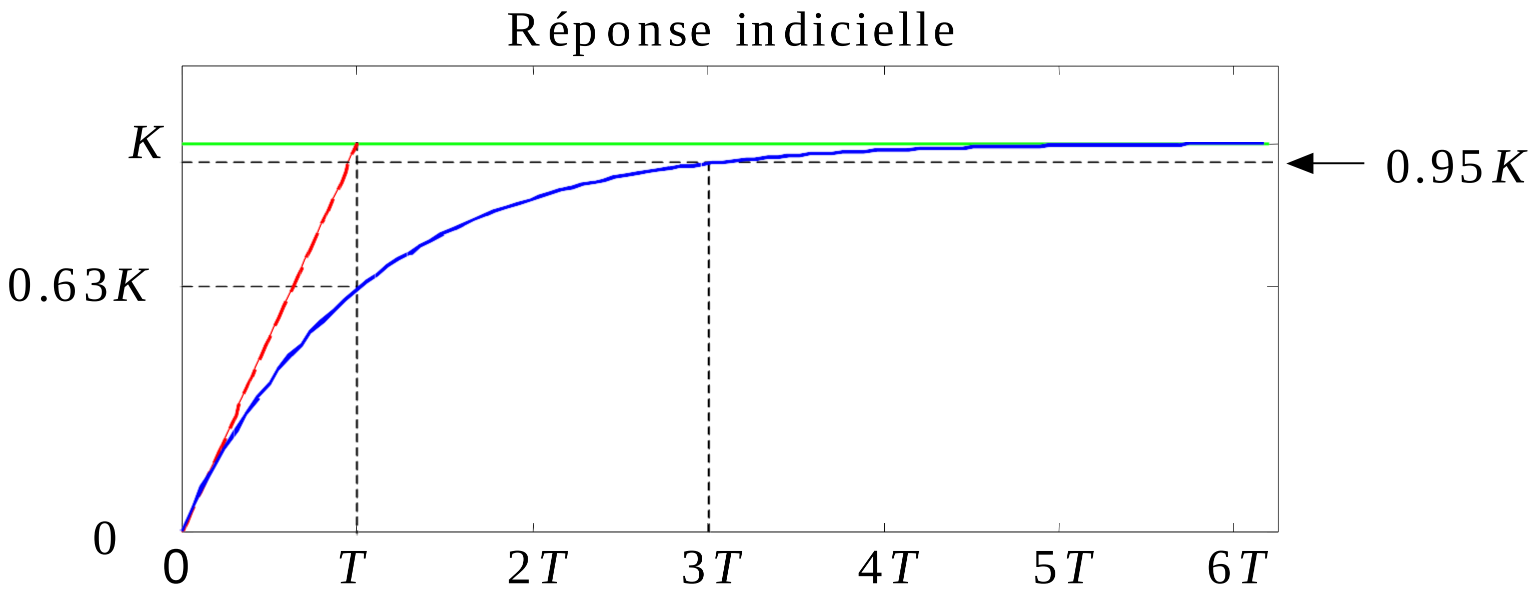


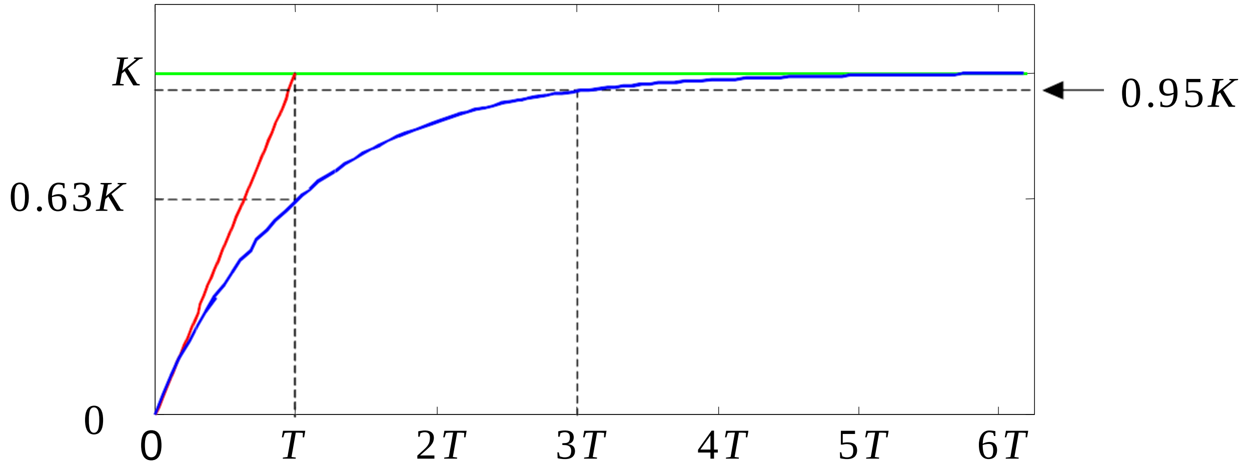
Tableau récapitulatif de l'évolution de la sortie

t	T	$2T$	$3T$	$5T$	∞
$\frac{y(t)}{y_\infty}$ (%)	63%	87%	95%	99,4%	100%

y_∞ : valeur de la sortie en régime permanent

Système du 1^er ordre

Rapidité du système



- Temps de réponse t_r du système

  t_r = temps au bout duquel la réponse indicielle atteint $0.95y_\infty$

$$\boxed{t_r \approx 3T}$$

- Temps de montée t_m

  t_m = temps au bout duquel la réponse passe de $0.1y_\infty$ à $0.9y_\infty$

$$\boxed{t_m \approx 2{,}2T}$$

Système du 1er ordre

❑ Réponse à une rampe

- Entrée : signal rampe $u(t) = v(t)$

- Réponse du système

$$u(t) = v(t) \quad \Rightarrow \quad U(s) = \frac{1}{s^2}$$

. On en déduit $Y(s) = \dfrac{K}{s^2(1+Ts)}$

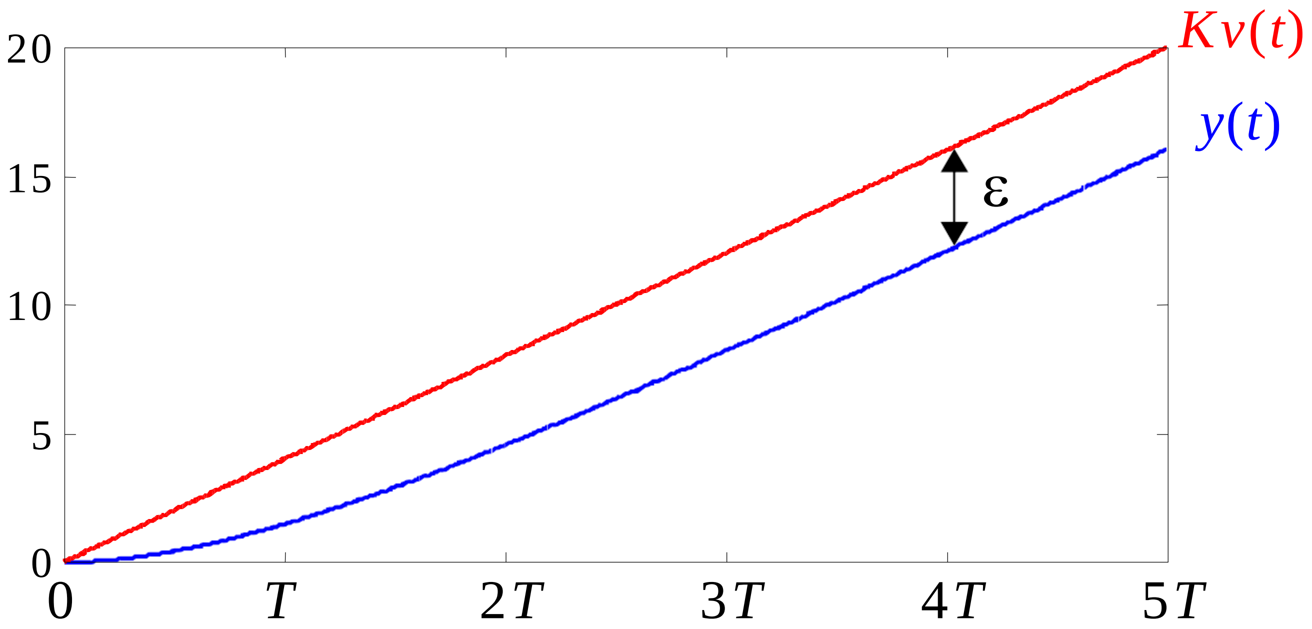
$$\boxed{y(t) = K(t-T) + KTe^{-\frac{t}{T}}}$$

- Remarques

  - La réponse est la somme de deux termes : une fonction exponentielle décroissante et une rampe retardée, de retard T

Système du 1er ordre

❑ Réponse à une rampe (fin)



- La sortie suit asymptotiquement la rampe $Kv(t)$ avec un retard T

- L'écart en régime permanent $\varepsilon = Kv(t) - y(t)$ est appelé erreur de traînage

Erreur de traînage : $= KT$

Système du 2e ordre

- Système régi par l'équation différentielle

$$a_2\ddot{y}(t)+a_1\dot{y}(t)+a_0y(t)=b_0u(t)$$

- Fonction de transfert

$$a_2\ddot{y}(t)+a_1\dot{y}(t)+a_0y(t)=b_0u(t) \Rightarrow \left(a_2s^2+a_1s+a_0\right)Y(s)=b_0U(s)$$

$$\boxed{H(s)=\frac{b_0}{a_2s^2+a_1s+a_0}}$$

- Autre écriture de la fonction de transfert

$$\boxed{H(s)=\frac{K}{\frac{s^2}{\omega_n^2}+\frac{2\xi}{\omega_n}s+1}} \quad \text{ou} \quad \boxed{H(s)=\frac{K\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}}$$

ξ : facteur d'amortissement, K : gain

ω_n : pulsation naturelle non amortie du système avec $\omega_n>0$

Système du 2e ordre

Pôles du système

$$H(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

Les pôles sont les racines du polynôme $s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2$

- Etude du discriminant réduit
  - $\Delta = \omega_n^2(\xi^2 - 1)$
  - Si $|\xi| \geq 1$ alors $\Delta \geq 0$: le système a des pôles réels et son comportement est apériodique
    - Si $|\xi| > 1$ alors le système a deux pôles réels distincts
    - Si $|\xi| = 1$ alors le système a un pôle réel double
  - Si $|\xi| < 1$ alors $\Delta < 0$: le système a une paire de pôles complexes conjugués et son comportement est oscillatoire

Système du 2e ordre

- Système apériodique : $|\xi| \geq 1$

  - Pôles du système

    $$\lambda_1 = -\xi\omega_n - \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1} \quad \text{et} \quad \lambda_2 = -\xi\omega_n + \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}$$

  - Condition de stabilité

    Le système est stable si les pôles λ_1 et λ_2 sont négatifs, ce qui correspond à la condition $\xi \geq 1$

  - Factorisation de la fonction de transfert

    Comme $\lambda_1\lambda_2 = \omega_n^2$, on a $H(s) = \dfrac{K}{(1+T_1 s)(1+T_2 s)}$

    Le système du 2e ordre apériodique est équivalent à la mise en série de deux systèmes du 1er ordre de constantes de temps :

    $$T_1 = -\frac{1}{\lambda_1} \quad \text{et} \quad T_2 = -\frac{1}{\lambda_2}$$

Système du 2e ordre

- Système apériodique (cas $\xi > 1$) : réponse indicielle
  - Décomposition de la FT en éléments simples

$$H(s) = \frac{K}{(1+T_1 s)(1+T_2 s)} \quad \Rightarrow \quad H(s) = \frac{K_1}{(1+T_1 s)} - \frac{K_2}{(1+T_2 s)}$$

avec $K_1 = \frac{K\,T_1}{T_1 - T_2}$ et $K_2 = \frac{K\,T_2}{T_1 - T_2}$

  - Réponse indicielle

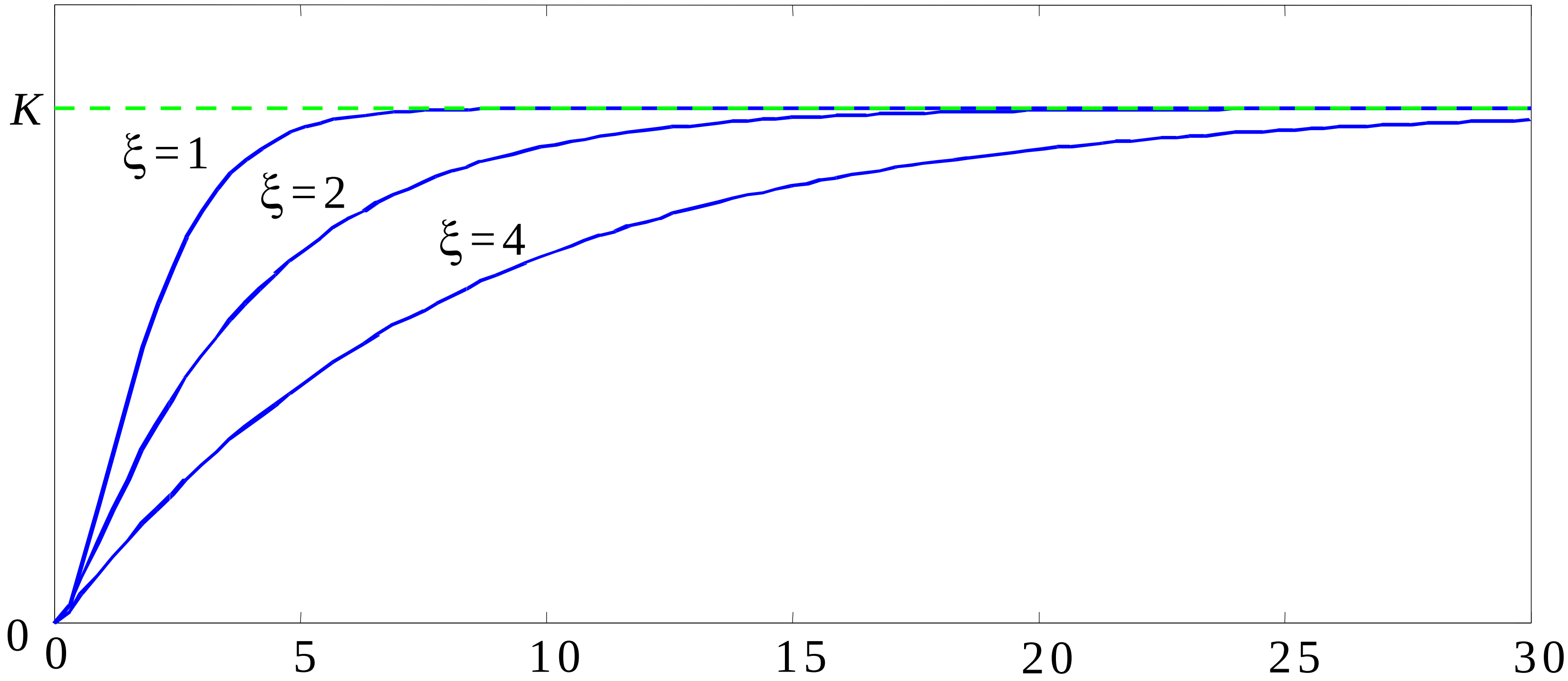
C'est la somme des réponses indicielles des deux sous-systèmes

$$y(t) = K_1\left(1 - e^{-\frac{t}{T_1}}\right) - K_2\left(1 - e^{-\frac{t}{T_2}}\right) = K_1(1 - e^{\lambda_1 t}) - K_2(1 - e^{\lambda_2 t})$$

- Système apériodique (cas $\xi = 1$) : réponse indicielle

Système du 2e ordre

Système apériodique ($\xi \geq 1$) : réponse indicielle



- Remarques
  - Pente à l'origine nulle
  - La réponse la plus rapide correspond à ξ=1
  - Asymptote horizontale y=K

Système du 2e ordre

- Système oscillatoire : $|\xi| < 1$
  - Pôles du système

$$\lambda_1 = -\xi\omega_n - j\omega_n\sqrt{1-\xi^2} \quad \text{et} \quad \lambda_2 = -\xi\omega_n + j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$

Le système est stable si $\mathrm{Re}(\lambda_1) < 0$ et $\mathrm{Re}(\lambda_2) < 0$, soit $\boxed{0 < \xi < 1}$

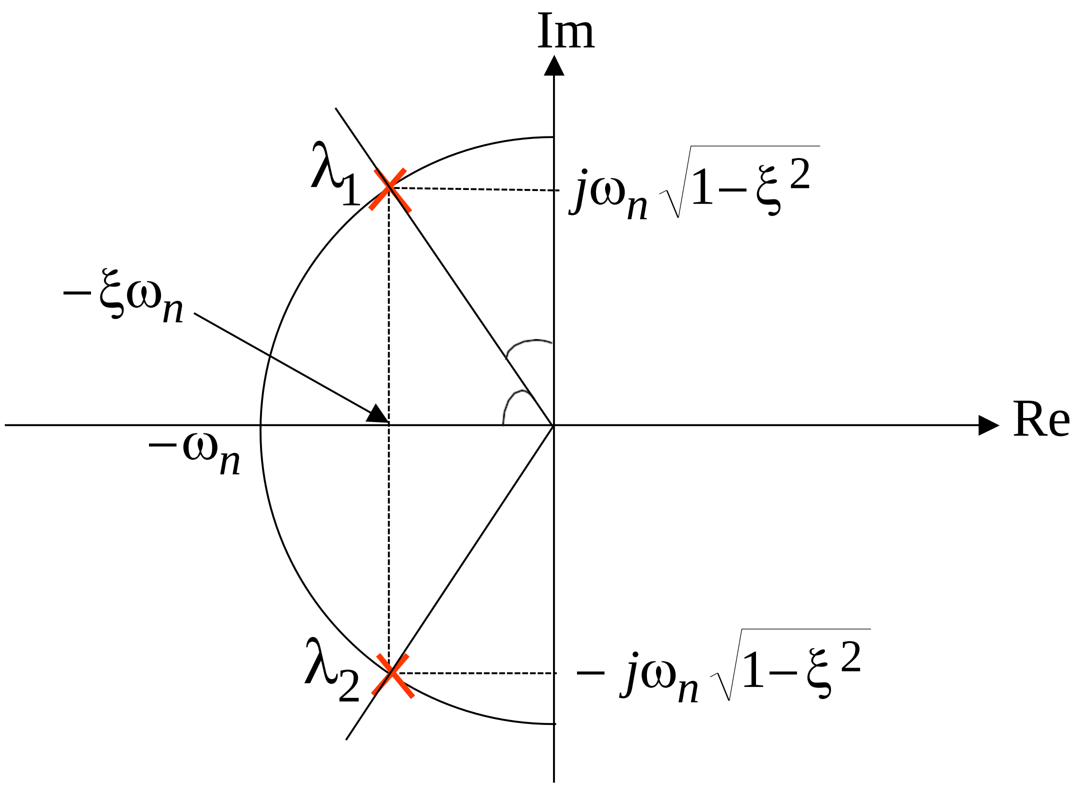
  - Lieu des pôles

Pour $0 \leq \xi \leq 1$

Rayon de l'arc de cercle = ω_n

$$\cos(\varphi) = \xi$$

$$\sin(\psi) = \xi$$

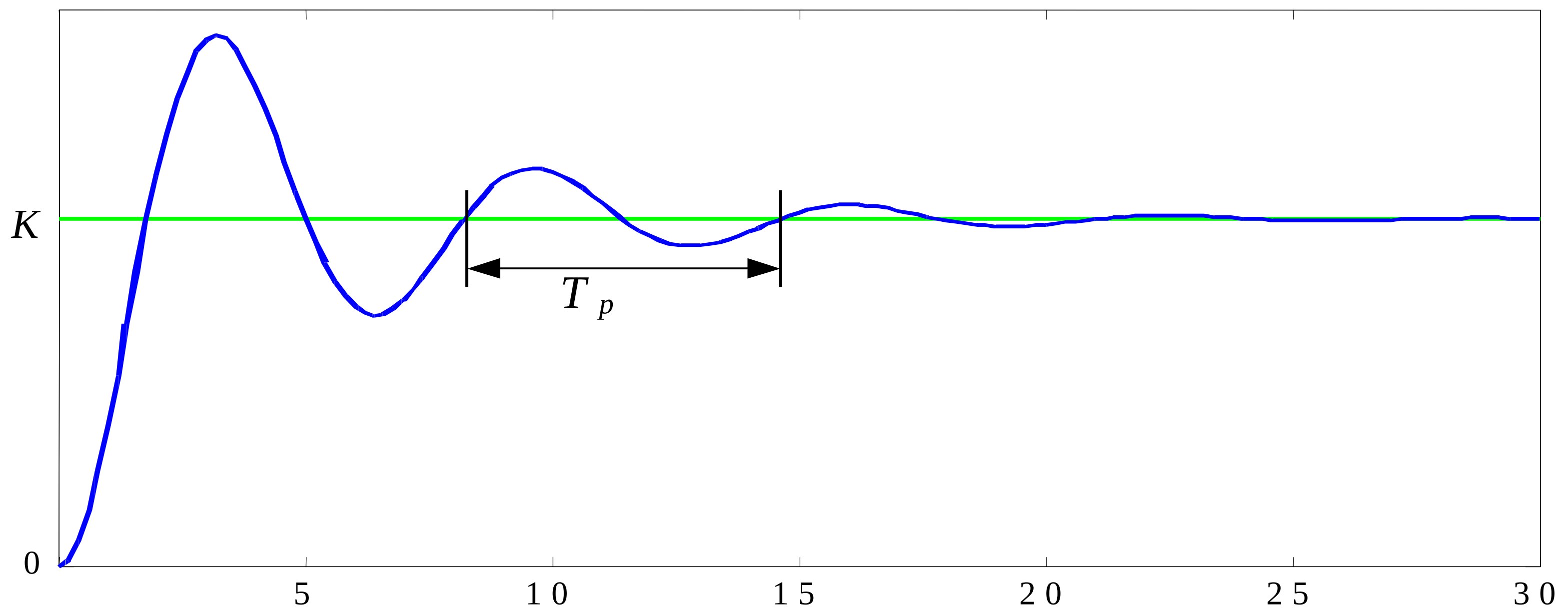


Système du 2e ordre

- Système oscillatoire $(0 < \xi < 1)$
  - Réponse indicielle

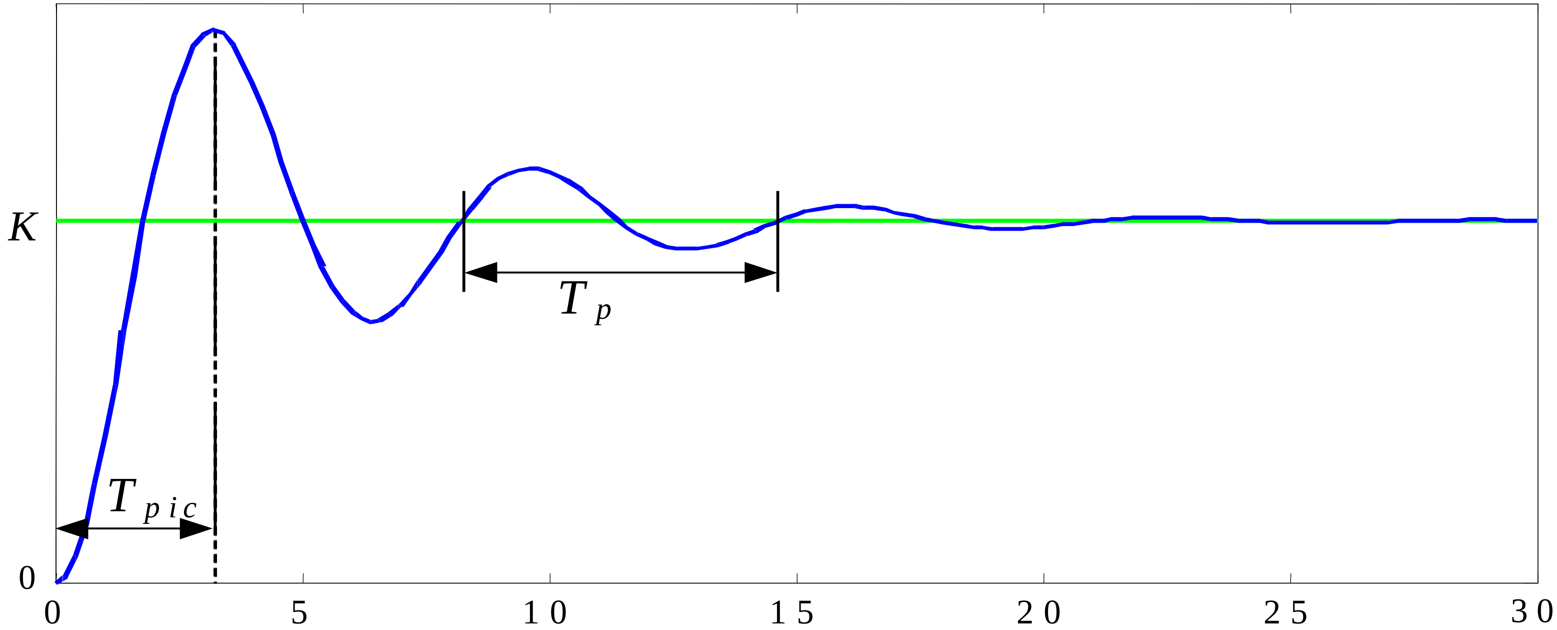
$$y(t) = K\left(1 - \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin(\omega_p t + \varphi)\right)$$

avec $\omega_p = \omega_n\sqrt{1-\xi^2}$ et $\varphi = \arctan\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right) = \arccos\xi$



Système du 2e ordre

Système oscillatoire ($0 < \xi < 1$) : réponse indicielle

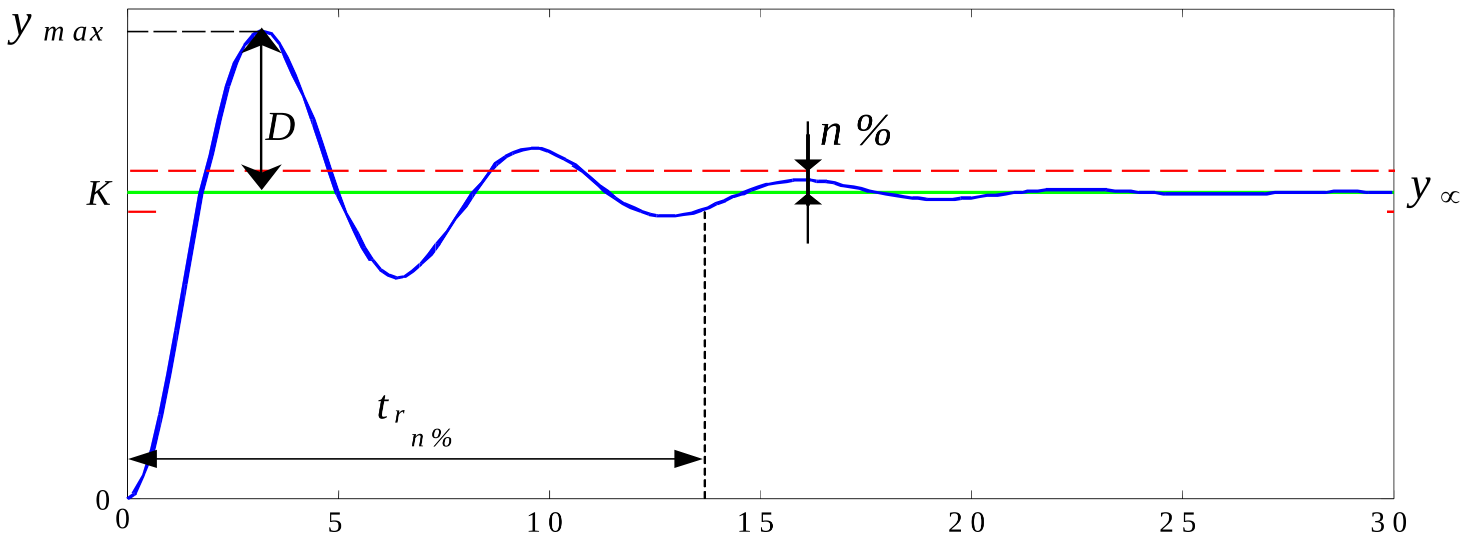


Caractéristiques de la réponse indicielle

- Réponse oscillatoire amortie de pulsation $\omega_p = \omega_n \sqrt{1-\xi^2}$
- Pseudo-période des oscillations $T_p = \dfrac{2\pi}{\omega_p}$
- Temps de pic $T_{pic} = \dfrac{\pi}{\omega_p}$

Système du 2e ordre

- Système oscillatoire : caractéristiques de la réponse indicielle



- Dépassement (D)

Définition : $D_{\%} = \frac{y_{\max} - y_{\infty}}{y_{\infty}} \times 100$

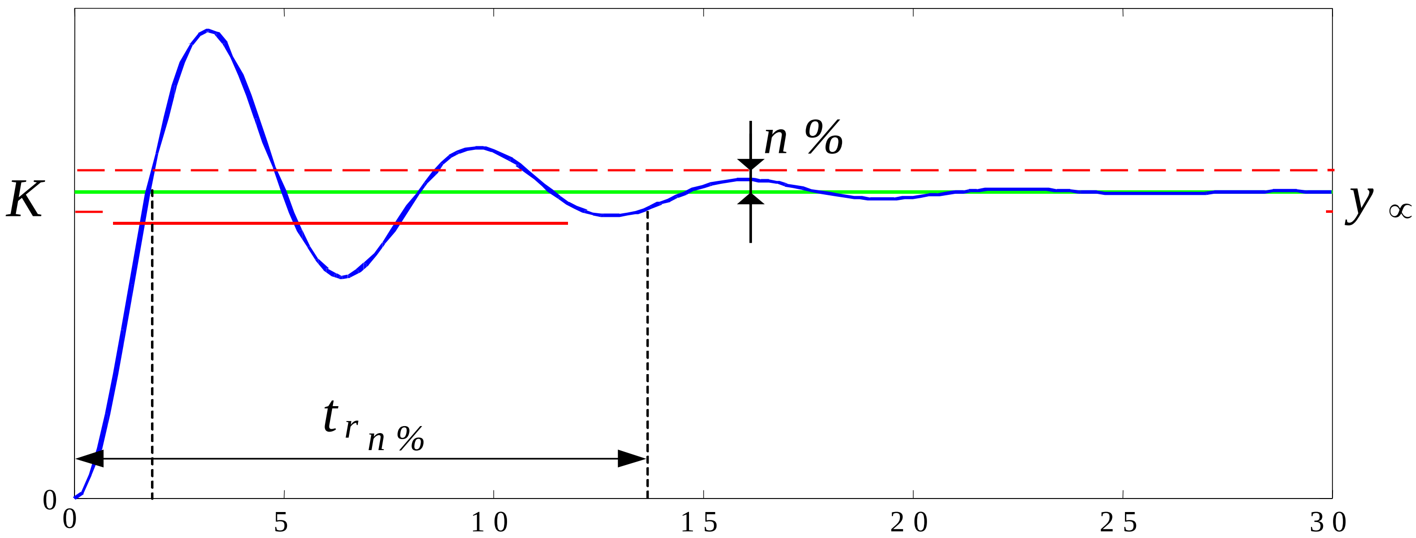
y_{∞} : valeur de la sortie en régime permanent

y_{max} : valeur de pic de la réponse indicielle

D est lié au coefficient d'amortissement ξ par : $D_{\%} = 100\, e^{-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$

Système du 2e ordre

❑ Système oscillatoire : caractéristiques de la réponse indicielle



➢ Temps de réponse à n% ($t_{r_{n\%}}$)

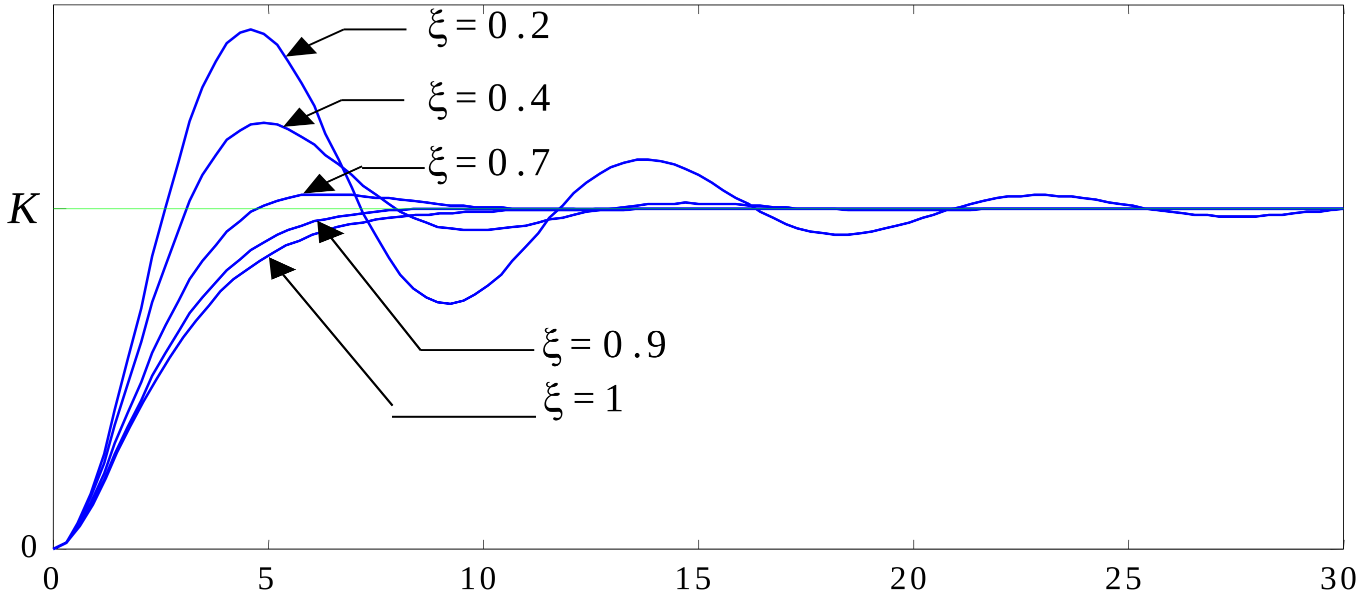
C'est le temps au bout duquel la réponse indicielle atteint ±n% de sa valeur finale

$$t_{r_{n\%}} \approx \frac{1}{\xi\omega_n}\ln\frac{100}{n} \quad (\xi < 0.7)$$

On mesure en général le temps de réponse à 5% : $t_{r_{5\%}} \approx \dfrac{3}{\xi\omega_n} \quad (\xi < 0.7)$

Système du 2e ordre

Influence du coefficient d'amortissement

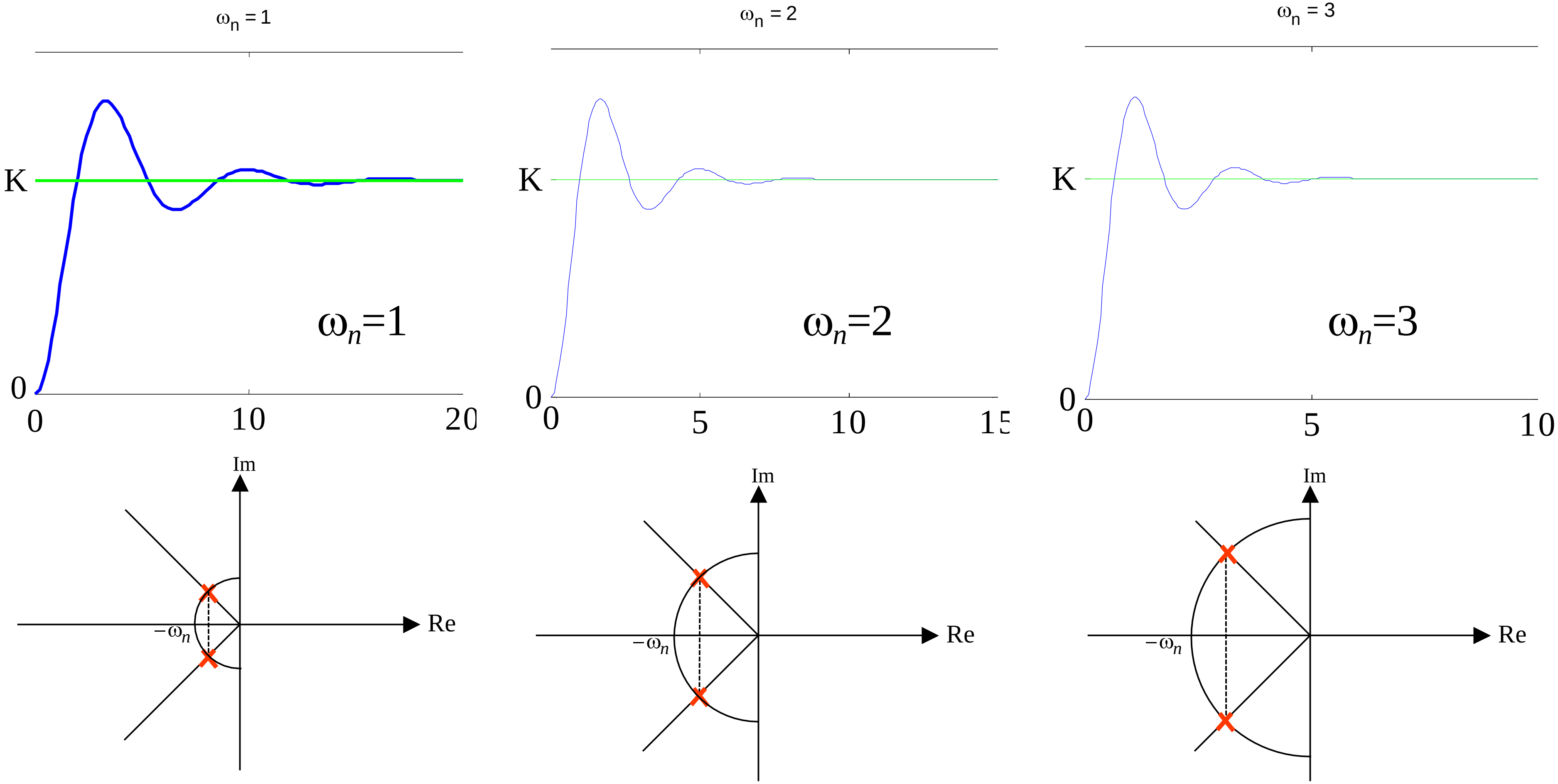


- Amortissement faible ($\xi < 0.7$) : réponse peu amortie, fortes oscillations, fort dépassement, réponse d'autant plus rapide que ξ est faible
- Amortissement fort ($\xi > 0.7$) : réponse très amortie, pas d'oscillations, dépassement à peine visible
- Amortissement $\xi = 0.7$ (souvent utilisé)

  Dépassement $D \approx 5\%$ et $(\omega_n t_r) \approx 3$

Système du 2e ordre

❑ Influence de la pulsation naturelle ω_n



- Plus la pulsation ω_n est faible, plus la période des oscillations est grande
- Plus la pulsation ω_n est faible, plus la réponse du système est lente