Rappels de la Mécanique du point

Les systèmes de coordonnées

1. Système de coordonnées cartésienne

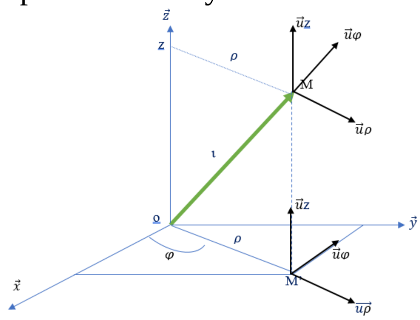
Les coordonnées ***cartésiennes*** sont un système de coordonnées à ***trois dimensions***, dans lequel chaque point est déterminé par un ***trois distances*** (x, y, z).

- Vecteur position : $\overrightarrow{OM} = x.\vec{x} + y.\vec{y} + z.\vec{z}$
- Intensité : $\|\overrightarrow{OM}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
- Vecteur Vitesse : $\vec{V}_M = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \dot{x}\vec{\imath} + \dot{y}\vec{\jmath} + \dot{z}\vec{k}$
- Vecteur accélération : $\overrightarrow{\gamma_M} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \ddot{x}\vec{\imath} + \ddot{y}\,\vec{\jmath} + \ddot{z}\,\vec{k}$

2. Système de coordonnées cylindriques

Les coordonnées ***cylindriques*** sont un système de coordonnées à ***trois dimensions***, dans lequel chaque point est déterminé par ***deux distances et un angle*** (ρ, φ, z).

Ce système est utilisé lorsque la trajectoire du point étudié possède une symétrie axiale de révolution.



- Vecteur position : $\overrightarrow{OM} = \rho\overrightarrow{e\rho} + z\,\overrightarrow{ez}$
- Intensité : $\|\overrightarrow{OM}\| = \sqrt{\rho^2 + z^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Avec : $\rho = \frac{x}{cos\varphi}$; $\tan\varphi = \frac{y}{x}$, $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$

Et $x = \rho cos\varphi$; $y = \rho\sin\varphi$; $z = z$

- Les coordonnées cylindriques en fonction des coordonnées cartésiennes :

$$\overrightarrow{e\rho} = \cos\varphi\,\vec{\imath} + \sin\varphi\,\vec{\jmath}\ ; \qquad \overrightarrow{e\varphi} = -\sin\varphi\,\vec{\imath} + \cos\varphi\,\vec{\jmath}$$

- La dérivée des coordonnées cylindrique par rapport au temps :

$$\frac{d\overrightarrow{e\rho}}{d\varphi} = \overrightarrow{e\varphi}\ ; \qquad \frac{d\overrightarrow{e\varphi}}{d\varphi} = -\,\overrightarrow{e\varphi}$$

- Vecteur Vitesse : $\vec{V}_M = \dot{\rho}\,\overrightarrow{e\rho} + \rho\dot{\varphi}\,\overrightarrow{e\varphi} + \dot{z}\,\vec{k}$
- Vecteur accélération : $\vec{\gamma}M = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\overrightarrow{e\rho} + (\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi})\,\overrightarrow{e\varphi} + \ddot{z}\,\vec{k}$

3. Système de coordonnées polaires

Les coordonnées ***polaires*** sont un système de coordonnées à ***deux dimensions***, dans lequel chaque point du plan est déterminé par un ***angle*** et une ***distance*** (r, φ).

- Vecteur position : $\overrightarrow{OM} = \rho\overrightarrow{e\rho}$
- Vecteur Vitesse : $\vec{V}_M = \dot{\rho}\,\overrightarrow{e\rho} + \rho\dot{\varphi}\,\overrightarrow{e\varphi}$
- Vecteur accélération : $\vec{\gamma}M = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\overrightarrow{e\rho} + (\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi})\,\overrightarrow{e\varphi}$

4. Système de coordonnées sphériques

Les coordonnées ***sphériques*** sont un système de coordonnées dans lequel chaque point est déterminé par une longueur et deux angles (r, φ, Θ).

- Vecteur position **:** $\overrightarrow{\mathbf{OM}} = \mathbf{r}\,\overrightarrow{\boldsymbol{er}}$
- Vecteur Vitesse : $\vec{V}\mathrm{M} = \dot{r}\overrightarrow{er} + r\,\dot{\theta}\,\overrightarrow{e\theta} + r\,\dot{\varphi}\sin\theta\,\overrightarrow{e\varphi}$
- Vecteur accélération :

$$\vec{\gamma}\mathrm{M} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2\sin^2\theta)\,\overrightarrow{er} + (2\,\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - r\,\dot{\varphi}^2\cos\theta\sin\theta)\,\overrightarrow{e\theta} +$$
$$+ (2\,\dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta + r\,\ddot{\varphi}\sin\theta)\,\overrightarrow{e\varphi}$$

- La dérivée des coordonnées sphériques par rapport au temps :

$$\frac{d\overrightarrow{er}}{dt} = \dot{\theta}\,\overrightarrow{e\theta} + \dot{\varphi}\sin\theta\,\overrightarrow{e\varphi}$$

$$\frac{d\overrightarrow{e\theta}}{dt} = -\dot{\theta}\,\overrightarrow{er} + \dot{\varphi}\cos\theta\,\overrightarrow{e\varphi}$$

$$\frac{d\overrightarrow{e\varphi}}{dt} = -\dot{\varphi}\sin\theta\,\overrightarrow{er} - \dot{\varphi}\cos\theta\,\overrightarrow{e\theta}$$

- Les coordonnées sphériques en fonction des coordonnées cartésiennes :

$$\overrightarrow{er} = \sin\theta\cos\varphi\,\vec{\imath} + \sin\theta\sin\varphi\,\vec{\jmath} + \cos\theta\,\vec{k}$$

$$\overrightarrow{e\theta} = \cos\theta\cos\varphi\,\vec{\imath} + \cos\theta\sin\varphi\,\vec{\jmath} - \sin\theta\,\vec{k}$$

$$\overrightarrow{e\varphi} = -\sin\varphi\vec{\imath} + \cos\varphi\vec{\jmath}$$