Vibrations des systèmes continus

Vibrations des systèmes continus

Il existe principalement deux types de systèmes :

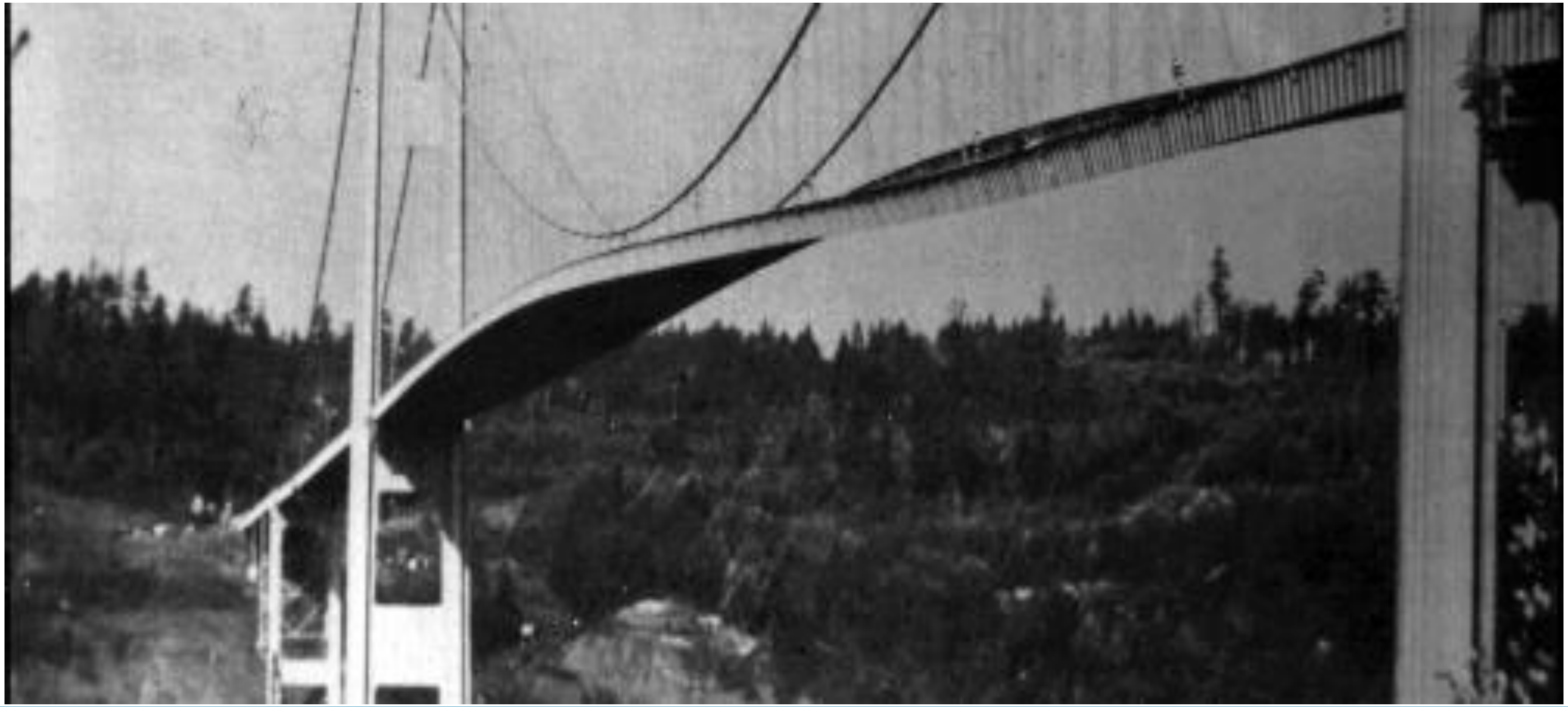
- Les systèmes de translation (flexion), et
- Les systèmes de torsion.

Vibrations des systèmes continus

- Les raideurs de flexion (translation) et de torsion sont données pour quelques systèmes mécaniques simples.
- Ces raideurs peuvent être obtenues en utilisant les résultats du cours de Résistance des matériaux.

Système de torsion

Exemple



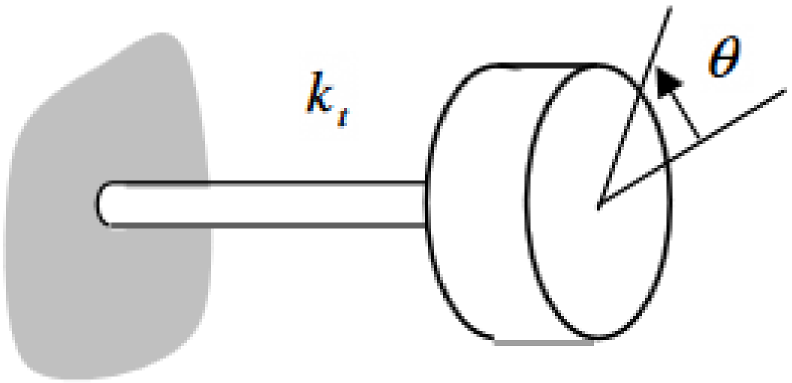
Système de torsion

Un corps rigide de moment d'inertie J_0 collé à l'extrémité d'un arbre est un système simple torsion.

La masse de l'arbre est considérée comme négligeable devant la masse du corps.

Le couple produisant la torsion est donné par:

$$\boldsymbol{M_t = K_t\theta}$$



K_t: est la raideur de torsion

Système de torsion

Energies du systèmes

- L’énergie cinétique du système :

$$E_c = \frac{1}{2} J_0 \, \dot{\theta}^2$$

- L’énergie potentielle :

$$E_P = \frac{1}{2} k_t \, \theta^2$$

- Le Lagrangien :

$$L = \frac{1}{2} J_0 \, \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} k_t \, \theta^2$$

Système de torsion

L'équation différentielle:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial \theta}\right) = 0$$

L'équation du mouvement:

$$\ddot{\theta} + \frac{k_t}{J_0}\theta = 0$$

Système de torsion

La pulsation propre du système:

$$\omega_0^2 = \frac{k_t}{J_0}$$

La solution de l'équation différentielle

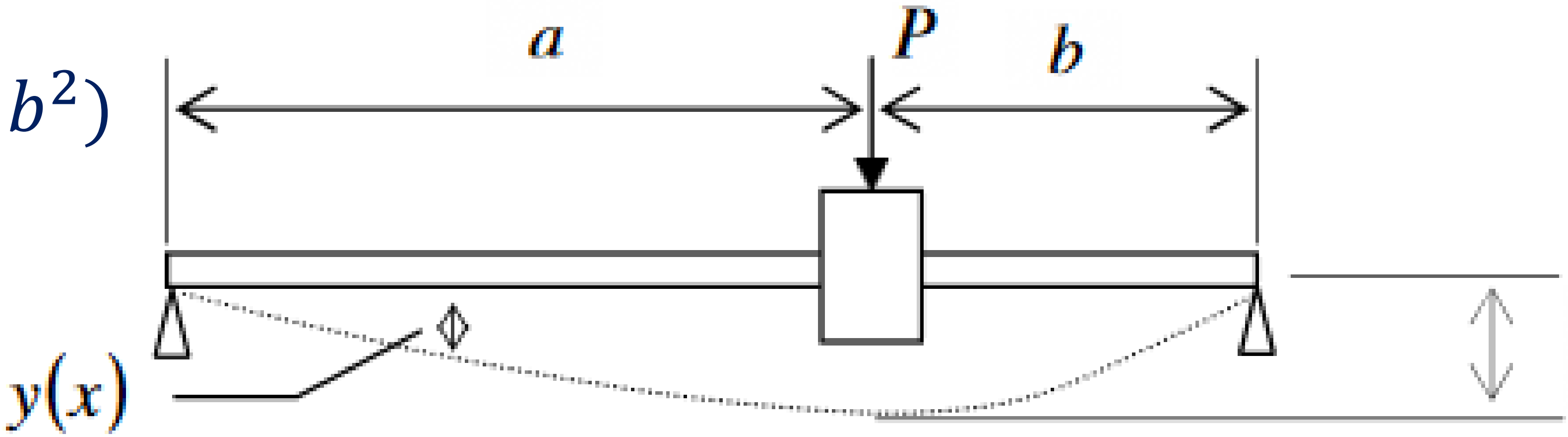
$$\theta\,(t) = A\cos\,(\omega\,t + \varphi\,)$$

Système de flexion

En se basant sur les résultats du cours de RDM, la déformation statique d'une poutre sur appuis simples chargée par une masse M est donnée par :

$$Y\,(x) = \frac{Pb_x}{6EIL}\left(L^2 + a^2 + b^2 \right)$$

Avec L =a + b



Système de flexion

- La raideur équivalente de la poutre s'obtient par ($k_{eq}\delta = \text{P} = \text{Mg}$) :

$$\boldsymbol{k_{eq}} = \frac{\mathbf{P}}{\boldsymbol{\delta}} = \frac{\mathbf{Mg}}{\boldsymbol{\delta}}$$

- δ est la déflexion de la poutre à l'emplacement de la masse (x=a):

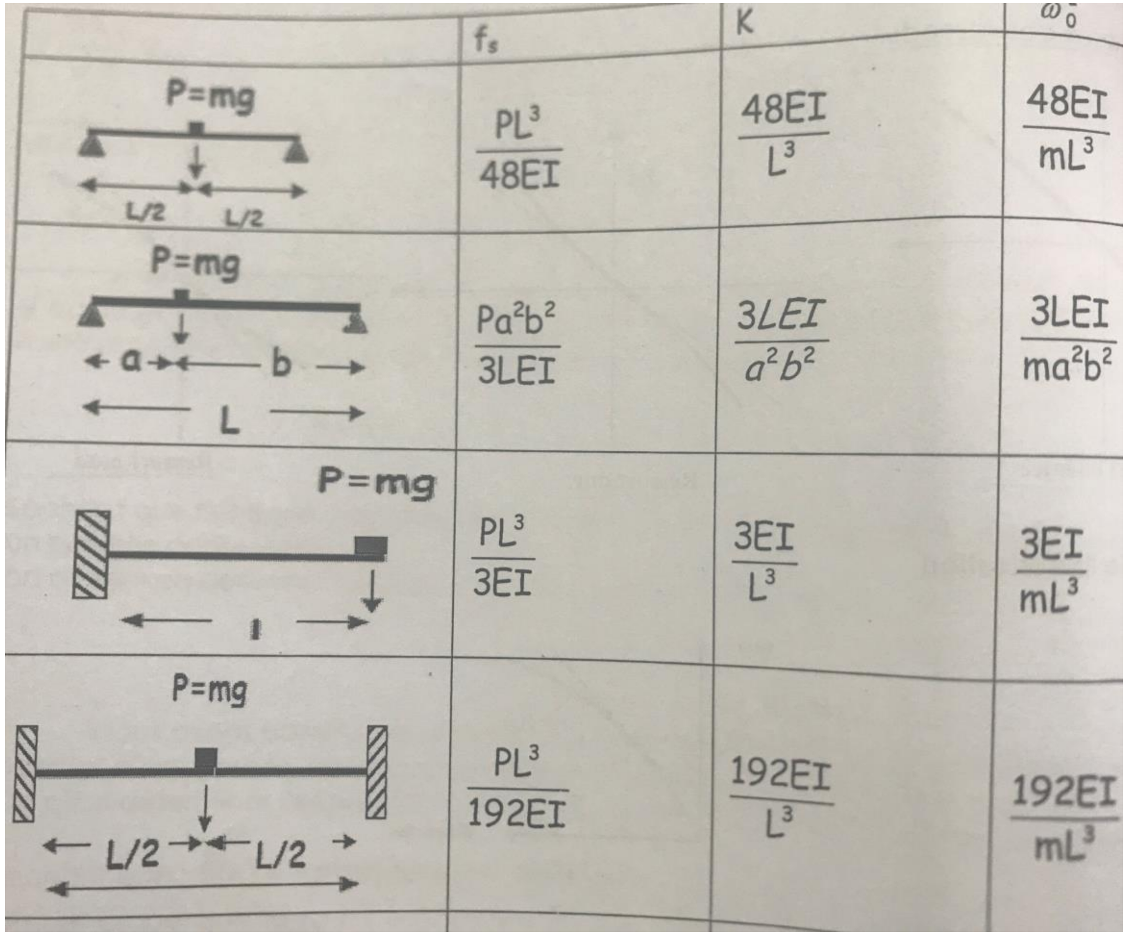
$$\delta = \text{y (a)} = \frac{Pa^2b^2}{3EIL}$$

- La raideur équivalente devient:

$$\boldsymbol{k_{eq}} = \frac{\mathbf{P}}{\boldsymbol{\delta}} = \frac{3EIL}{a^2b^2}$$

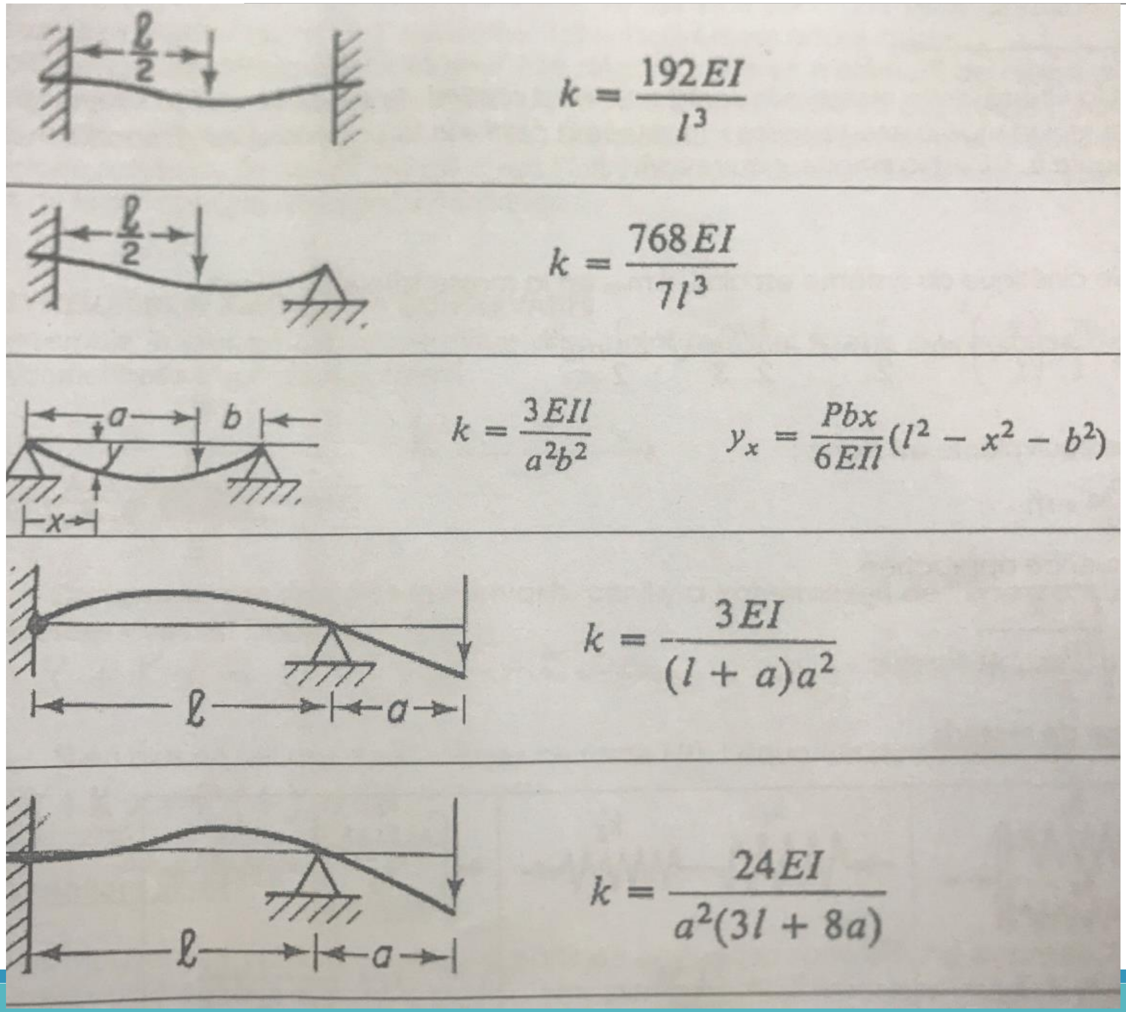
Système Constantes élastique de quelques systèmes

Les images présentent les constantes élastiques et les pulsations propres de masses très faibles devant la masse m considérée comme systèmes vibratoires linéaires à un seul degré de liberté.



	f_s	K	ω_0^2
P=mg, L/2, L/2	$\frac{PL^3}{48EI}$	$\frac{48EI}{L^3}$	$\frac{48EI}{mL^3}$
P=mg, a, b, L	$\frac{Pa^2b^2}{3LEI}$	$\frac{3LEI}{a^2b^2}$	$\frac{3LEI}{ma^2b^2}$
P=mg, l	$\frac{PL^3}{3EI}$	$\frac{3EI}{L^3}$	$\frac{3EI}{mL^3}$
P=mg, L/2, L/2	$\frac{PL^3}{192EI}$	$\frac{192EI}{L^3}$	$\frac{192EI}{mL^3}$

Système Constantes élastique de quelques systèmes



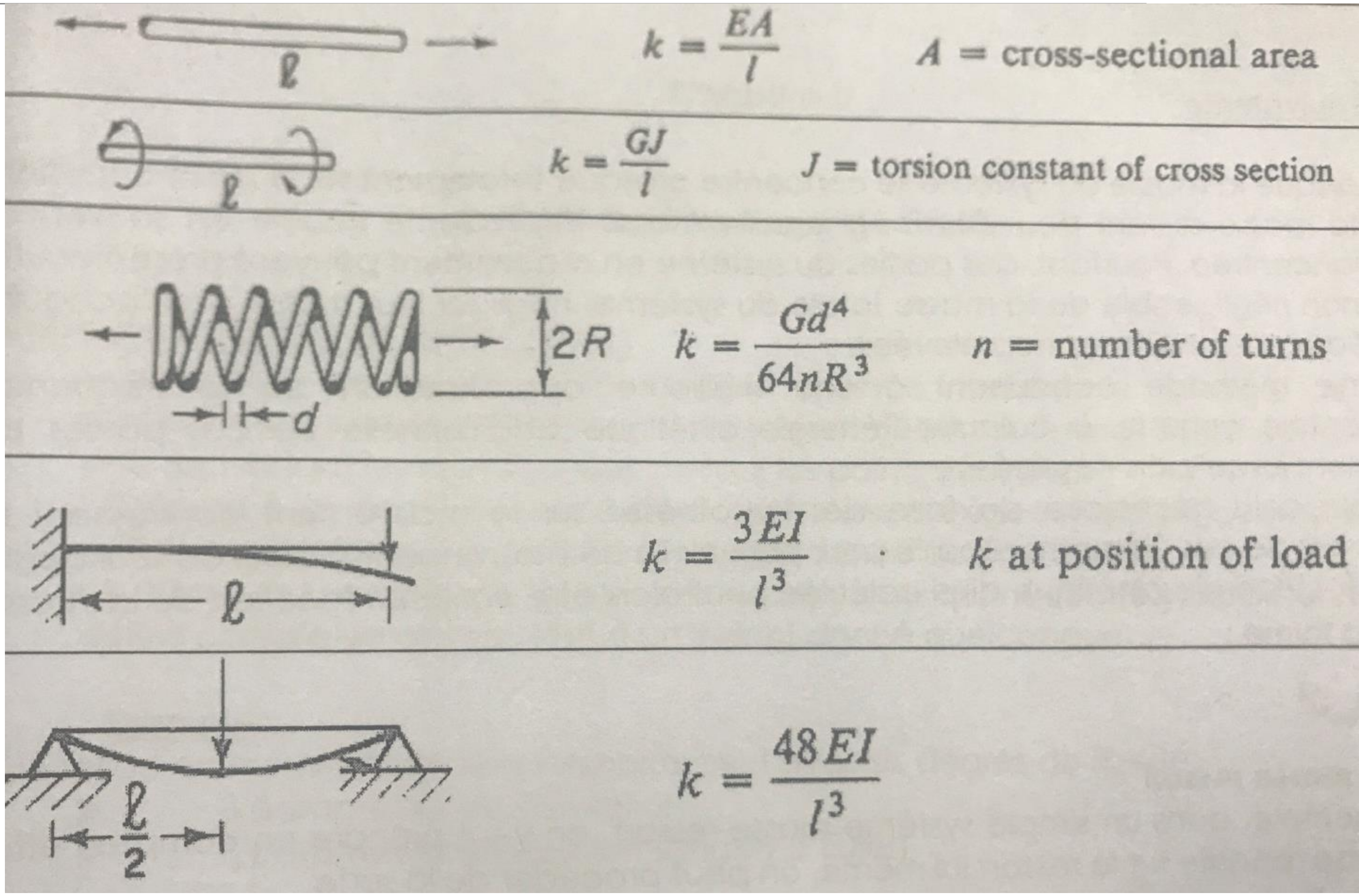
$$k = \frac{192EI}{l^3}$$

$$k = \frac{768EI}{7l^3}$$

$$k = \frac{3EIl}{a^2b^2} \qquad y_x = \frac{Pbx}{6EIl}(l^2 - x^2 - b^2)$$

$$k = \frac{3EI}{(l + a)a^2}$$

$$k = \frac{24EI}{a^2(3l + 8a)}$$



$$k = \frac{EA}{l}$$ A = cross-sectional area

$$k = \frac{GJ}{l}$$ J = torsion constant of cross section

$$k = \frac{Gd^4}{64nR^3}$$ n = number of turns

$$k = \frac{3EI}{l^3}$$ k at position of load

$$k = \frac{48EI}{l^3}$$