Les systèmes à plusieurs degrés de liberté

A. Systèmes à 2 degrés de liberté
B. Systèmes à n degrés de liberté

Les degrés de liberté

Les ***variables indépendantes nécessaires à la description*** d'un système en ***mouvement*** sont appelées degrés de liberté.

S'il y'a N variables indépendantes, on écrit N équations de Lagrange.

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}1} - \frac{\partial L}{\partial q1} = - \frac{\partial D}{\partial \dot{q}1} + F_1 \\
\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}2} - \frac{\partial L}{\partial q2} = - \frac{\partial D}{\partial \dot{q}2} + F_2 \\
\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}3} - \frac{\partial L}{\partial q3} = - \frac{\partial D}{\partial \dot{q}3} + F_3 \\
\dots. \\
\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}N} - \frac{\partial L}{\partial qN} =- \frac{\partial D}{\partial \dot{q}N} + F_N
\end{array}
\right.
$$

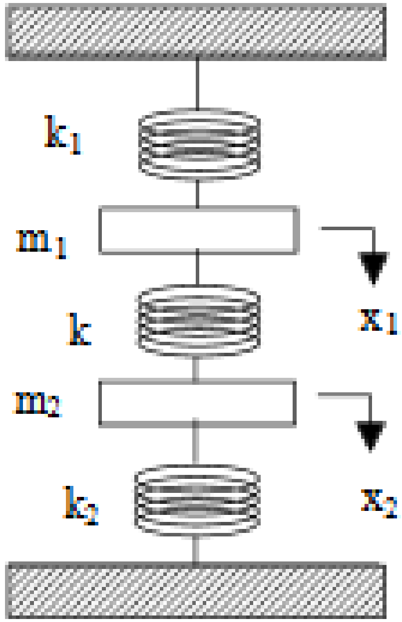
A. Les systèmes linéaires libres à deux degrés de liberté

Les systèmes linéaires libres à deux degrés de liberté

- Les systèmes qui nécessitent ***deux coordonnées indépendantes*** pour ***spécifier leurs positions*** sont appelés ***systèmes à deux degrés de liberté.***

- ***Exemple:***

Pour spécifier la position à chaque instant des masse masses m_1 et m_2 qui se déplacent verticalement, il est nécessaire de connaître leurs coordonnées x_1 et x_2.



Les systèmes linéaires libres à deux degrés de liberté

Système libre

Le Lagrangien d'un système découplé

$$L = \sum_{i=1}^{2} \frac{1}{2}\, mi\, \dot{x}i^2 \; - \sum_{i=1}^{2} \frac{1}{2}\, ki\, xi^2$$

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}1} - \dfrac{\partial L}{\partial q1} = 0 \\[2ex] \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}2} - \dfrac{\partial L}{\partial q2} = 0 \end{cases}$$

Les systèmes linéaires libres à deux degrés de liberté

Système libre

L'équation du mouvement

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 = 0 \\ \ddot{x}_2 + \omega_2^2 x_2 = 0 \end{cases}$$

La solution de l'équation du mouvement

$$x1(\mathrm{t}) = \mathrm{A1}cos(\omega 1\mathrm{t} + \varphi 1) \quad et \quad x2(\mathrm{t}) = A2cos(\omega 2\mathrm{t} + \varphi 2)$$

Les systèmes linéaires libres à deux degrés de liberté
Système amorti

L'équation du mouvement

$$\ddot{x}_1 + \alpha_1 \dot{x}_1 + \boldsymbol{\omega}_0^{\mathbf{2}} x_1 = 0$$

$$\ddot{x}_2 + \alpha_2 \dot{x}_2 + \boldsymbol{\omega}_0^{\mathbf{2}} x_2 = 0$$

Les systèmes linéaires libres à deux degrés de liberté
Système forcé

L'équation du mouvement

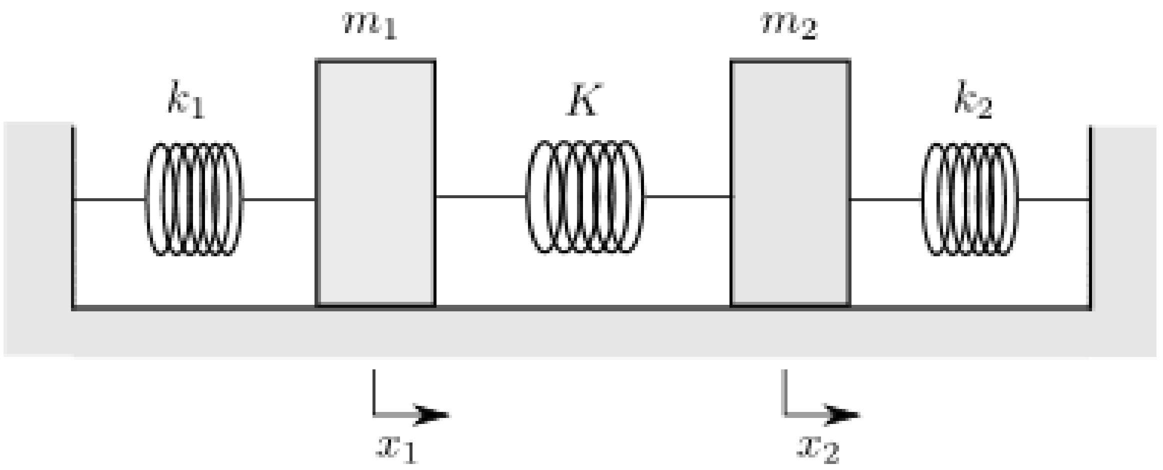
$$\ddot{x}_1 + \alpha_1 \dot{x}_1 + \boldsymbol{\omega}0^{\mathbf{2}} x_1 = F_1(t)$$
$$\ddot{x}_2 + \alpha_2 \dot{x}_2 + \boldsymbol{\omega}0^{\mathbf{2}} x_2 = F_2(t)$$

Les systèmes linéaires libres à deux degrés de liberté

Système libre couplé : Application

Cas de masses-ressorts en translation

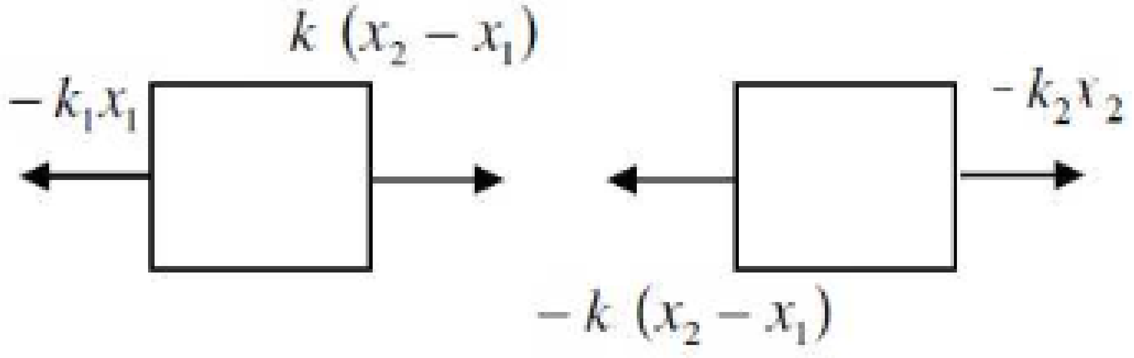
- Considérons un système constitué de deux masses m_1 et m_2 reliées respectivement par deux ressorts de raideur k_1 et k_2 à deux bâtis fixes. Les deux masses sont reliées par un ressort de raideur K. Le ressort K est appelé ressort de couplage.



Les systèmes linéaires libres à deux degrés de liberté

Système libre : Cas de masses-ressorts en translation

Résolution avec le PFD



$m_1 \ddot{x}_1 = K (x_2 - x_1) - K_1 x_1 \Rightarrow m_1 \ddot{x}_1 + (k_1+K)\, x_1 - K\, x_2 = 0$

$m_2 \ddot{x}_2 = -K (x_2 - x_1) - K_2 x_2 \Rightarrow m_2 \ddot{x}_2 + (k_2+K)\, x_2 - K\, x_1 = 0$

Les systèmes linéaires libres à deux degrés de liberté
Système libre : Cas de masses-ressorts en translation

Résolution avec le Lagrangien

Soit T et U respectivement l'énergie cinétique et l'énergie potentielle :

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2$$

$$U = \frac{1}{2} k_1 x_1^2 + \frac{1}{2} K(x_1 - x_2)^2 + \frac{1}{2} k_2 x_2^2$$

$$U = \frac{1}{2} (k_1+K)\, x_1^2 + \frac{1}{2} (k_2+K)\, x_2^2 - K\, x_1 x_2$$

Le lagrangien L = T− U s'écrit alors:

$$L = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 - \frac{1}{2} (k_1+K)\, x_1^2 - \frac{1}{2} (k_2+K)\, x_2^2 + K\, x_1 x_2$$

Les systèmes linéaires libres à deux degrés de liberté
Système libre : Application

Cas de masses-ressorts en translation

- Les équations de Lagrange s'écrivent:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}1} - \dfrac{\partial L}{\partial x1} = 0 \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}2} - \dfrac{\partial L}{\partial x2} = 0 \end{cases}$$

Les systèmes linéaires libres à deux degrés de liberté

Système libre : Application

Cas de masses-ressorts en translation

L'équation du mouvement

$$\begin{cases} m_1\,\ddot{x}_1 + (k_1+K)\,x_1 - K\,x_2 = 0 \\ m_2\,\ddot{x}_2 + (k_2+K)\,x_2 - K\,x_1 = 0 \end{cases}$$

Les termes $-K\,x_1$ et $-K\,x_2$ sont appelés termes de couplage, et les deux équations différentielles sont dites couplées.

Les systèmes linéaires libres à deux degrés de liberté

Système libre : Application

Cas de masses-ressorts en translation

L'équation du mouvement

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + (k_1+K)\, x_1 - K\, x_2 = 0 \\ m_2 \ddot{x}_2 + (k_2+K)\, x_2 - K\, x_1 = 0 \end{cases}$$

Les termes $-K\, x_1$ et $-K\, x_2$ sont appelés termes de couplage, et les deux équations différentielles sont dites couplées.

Les systèmes linéaires libres à deux degrés de liberté

Système libre : Application

La forme matricielle du système d'équations

$$\underbrace{\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}}_{[M]} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} k_1 + K & -K \\ -K & k_2 + K \end{bmatrix}}_{[K]} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

[M] et [K] sont appelées, respectivement, matrice de ***masse*** et matrice de ***rigidité*** (ou de raideur) du système

Les systèmes linéaires libres à deux degrés de liberté

Système libre : Application

Cas de masses-ressorts en translation

Détermination du facteur de couplage

On pose:

$\omega_1^2 = \frac{k1+K}{m1}$ et $\omega_2^2 = \frac{k2+K}{m2}$ et $\frac{K}{m1} = \Upsilon^2$ et $\frac{K}{m2} = \beta^2$

$$\Rightarrow \ddot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 - \Upsilon^2 x_2 = 0$$

$$\ddot{x}_2 + \omega_2^2 x_2 - \beta^2 x_1 = 0$$

Les systèmes linéaires libres à deux degrés de liberté

Système libre : Application

Cas de masses-ressorts en translation

La résolution de l'équation du mouvement

$$x_1(t) = A_1 cos(\omega_1 t + \varphi_1) \quad et \;\; x_2(t) = A_2 cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

Où, A_1, A_2 et $\boldsymbol{\varphi}$ sont des constantes et ω l'une des pulsations propres du système.

Les systèmes linéaires libres à deux degrés de liberté

Système libre : Application

Cas de masses-ressorts en translation

La substitution de x_1 et x_2 dans le système d'équations différentielles donne:

$$[\omega_1^2 - \omega^2]A_1 - \Upsilon A_2 = 0$$

$$-\beta A_1 + [\omega_2^2 - \omega^2]A_2 = 0$$

Ce qui constitue un système d'équations linéaires homogènes dont les inconnues sont A_1 et A_2.

Les systèmes linéaires libres à deux degrés de liberté

Système libre : Application

Cas de masses-ressorts en translation

Ce système admet une solution non identiquement nulle seulement si le déterminant $\Delta(\omega)$ des coefficients de A_1 et A_2 est égal 0.

$$\Delta(\omega) = \begin{vmatrix} k_1 + K - m_1\,\omega^2 & -K \\ -K & k_2 + K - m_2\omega^2 \end{vmatrix}$$

L'équation caractéristique est:

$$[k_1 + K - m_1\omega^2]\,[k_2 + K - m_2\omega^2] - K^2 = 0$$

$$\Rightarrow [k_1 + K - m_1\omega^2]\,[k_2 + K - m_2\omega^2] = K^2$$

Les systèmes linéaires libres à deux degrés de liberté
Système libre : Application

Cas de masses-ressorts en translation

➔ $[k_1 + K - m_1\,\omega^2]\,[k_2 + K - m_2\omega^2] = K^2$

➔ $[\omega_1^2 - \omega^2]\,[\omega_2^2 - \omega^2] = \dfrac{K^2}{m_1 m_2}$

➔ $[\omega_1^2 - \omega^2]\,[\omega_2^2 - \omega^2] = \dfrac{K^2\omega_1^2\omega_2^2}{(k_1+K)(k_2+K)}$

On pose K_0 facteur de couplage (sans dimension) :

$$K_0 = \frac{K^2}{(k_1+K)(k_2+K)}$$

Donc : $[\omega_1^2 - \omega^2]\,[\omega_2^2 - \omega^2] = k_0\,\omega_1^2\omega_2^2$

k_0 varie de 0 à 1 selon ka valeur de K

Les systèmes linéaires libres à deux degrés de liberté
Système amorti

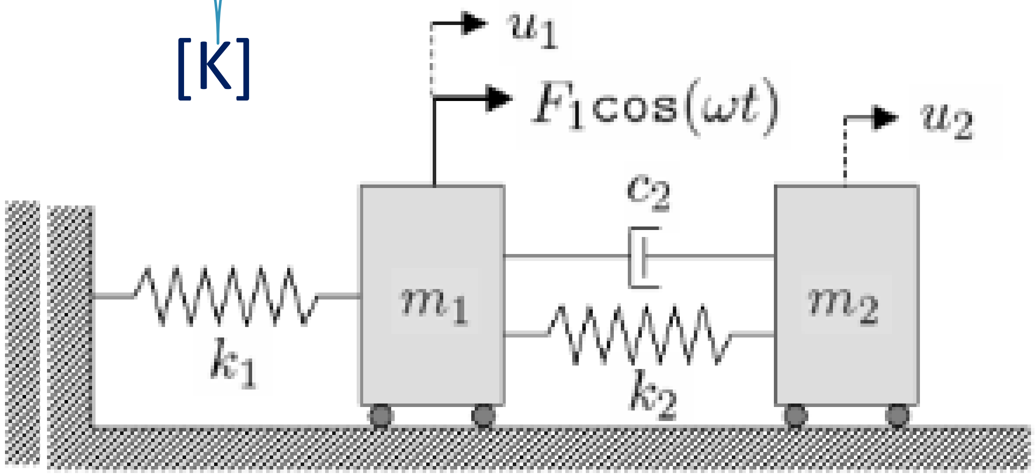
La forme matricielle du système d'équations

$$\underbrace{\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}}_{[M]} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix}}_{[C]} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} k_1 + K & -K \\ -K & k_2 + K \end{bmatrix}}_{[K]} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Les systèmes linéaires libres à deux degrés de liberté
Système forcé amorti

La forme matricielle du système d'équations

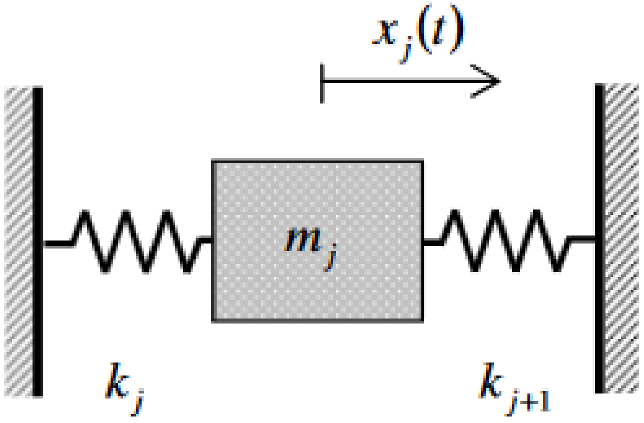
$$\underbrace{\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}}_{[M]} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix}}_{[C]} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} k_1 + K & -K \\ -K & k_2 + K \end{bmatrix}}_{[K]} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F(t) \\ 0 \end{Bmatrix}$$



B. Les systèmes linéaires libres à n degrés de liberté

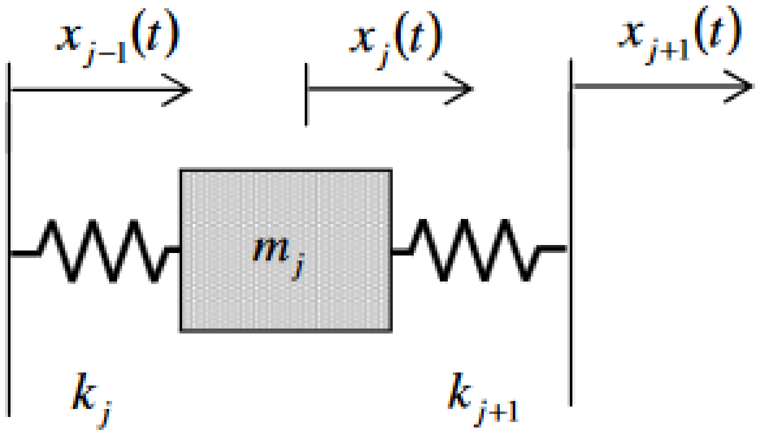
Les systèmes linéaires libres à n degrés de liberté

Pour un système à n degrés de liberté, le vecteur déplacement devient un vecteur colonne 1× n et les matrices de masse et de raideur sont des matrices carrées n×n. En considérant une masse j, l'équation d'équilibre s'écrit :



pour les masses $j-1$ et $j+1$ bloquées

$$m_j \ddot{x}_j = -k_j x_j - k_{j+1} x_j$$

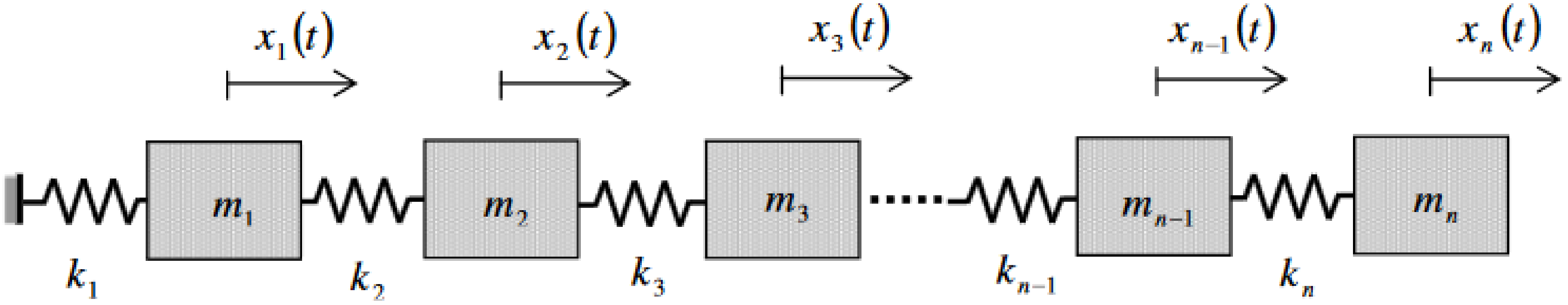


pour les masses $j-1$ et $j+1$ en mouvement

$$m_j \ddot{x}_j = -k_j (x_j - x_{j-1}) - k_{j+1} (x_j - x_{j+1})$$

Les systèmes linéaires libres à n degrés de liberté

Généralisation au système complet



$$
\begin{aligned}
m_j \ddot{x}_j &= -k_j\left(x_j - x_{j-1}\right) + k_{j+1}\left(x_{j+1} - x_j\right) \\
&= k_j x_{j-1} - \left(k_j + k_{j+1}\right) x_j + k_{j+1} x_{j+1}
\end{aligned}
$$

Les systèmes linéaires libres à n degrés de liberté

Généralisation au système complet

L'ensemble des équations peut se mettre sous la forme d'un système linéaire:

$$\mathbf{M}\{\ddot{\mathbf{X}}\} + \mathbf{K}\{\mathbf{X}\} = \{\mathbf{0}\}$$

Avec: $\mathbf{M} = \mathrm{diag}(m_1, m_2, m_3, \ldots, m_{n-1}, m_n)$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -k_2 & k_2+k_3 & -k_3 & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & -k_3 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & -k_{n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & -k_{n-1} & k_{n-1}+k_n & -k_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -k_n & k_n \end{bmatrix}$$

Les systèmes linéaires libres à n degrés de liberté
Etude énergétique

Énergies cinétiques :

$$2T = \sum_i \sum_j \boldsymbol{m}_{i,j} \dot{x}_i \, \dot{x}_j = [\dot{x}] \, M \, \{\dot{x}\}$$

Énergies potentielles :

$$2V = \sum_i \sum_j \boldsymbol{K}_{i,j} \dot{x}_i \, \dot{x}_j = [\dot{x}] \, K \, \{\dot{x}\}$$

Énergies de dissipations :

$$2V = \sum_i \sum_j \boldsymbol{f}_{i,j} \dot{x}_i \, \dot{x}_j = [\dot{x}] \, f \, \{\dot{x}\}$$

Les systèmes linéaires libres à n degrés de liberté
L'équation de Lagrange

L'équation de Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{x}}\right) T + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}} + \left(\frac{\partial}{\partial x}\right) V = \{Q\}$$

Les systèmes linéaires libres à n degrés de liberté

Equation du mouvement

Les vibrations libres d'un système conservatif à n DDLs peuvent être appréhendées à partir du système matriciel suivant

$$\mathbf{M}\{\ddot{\mathbf{X}}\} + \mathbf{K}\{\mathbf{X}\} = \{\mathbf{0}\}$$

- M : est la matrice de masse ou d'inertie
- K : est la matrice de rigidité ou de raideur

[M] et [K] de taille $n \times n$

Les systèmes linéaires libres à n degrés de liberté

Equation du mouvement

L'équation du mouvement d'un système amorti à n DDL:

$$\mathbf{M}\{\ddot{\mathbf{X}}\} + \mathbf{f}\{\dot{\mathbf{X}}\} + \mathbf{K}\{\mathbf{X}\} = \{\mathbf{Q}\}$$

- M : est la matrice de masse ou d'inertie
- f : est la matrice de dissipation
- K : est la matrice de rigidité ou de raideur
- Q : sont les forces extérieures