C. Les systèmes linéaires forcés à un degré de liberté

- Force d’excitation
- Equation de Lagrange pour les systèmes forcés
- Equation du mouvement
- Résonance
- Bande passante et facteur de qualité

Force d'excitation

- La force de frottement est responsable de la perte et la dissipation de l'énergie du système.
- Pour éviter tout ralentissement du système, une force d'excitation F(t) est appliquée.
- Le rôle de cet excitateur est de fournir à tout moment de l'énergie au système.

Force d'excitation

- La grandeur décrivant l'évolution du mouvement par rapport au temps:

$$\ddot{\boldsymbol{q}}\,(t) + 2\boldsymbol{\lambda}\,\dot{\boldsymbol{q}}(t) + \boldsymbol{\omega}0^2 q(t) = f_0 \cos(\boldsymbol{\omega} t)$$

- Le système est appelé un oscillateur forcé.
- L'oscillateur commence à osciller suivant un régime transitoire puis permanant.

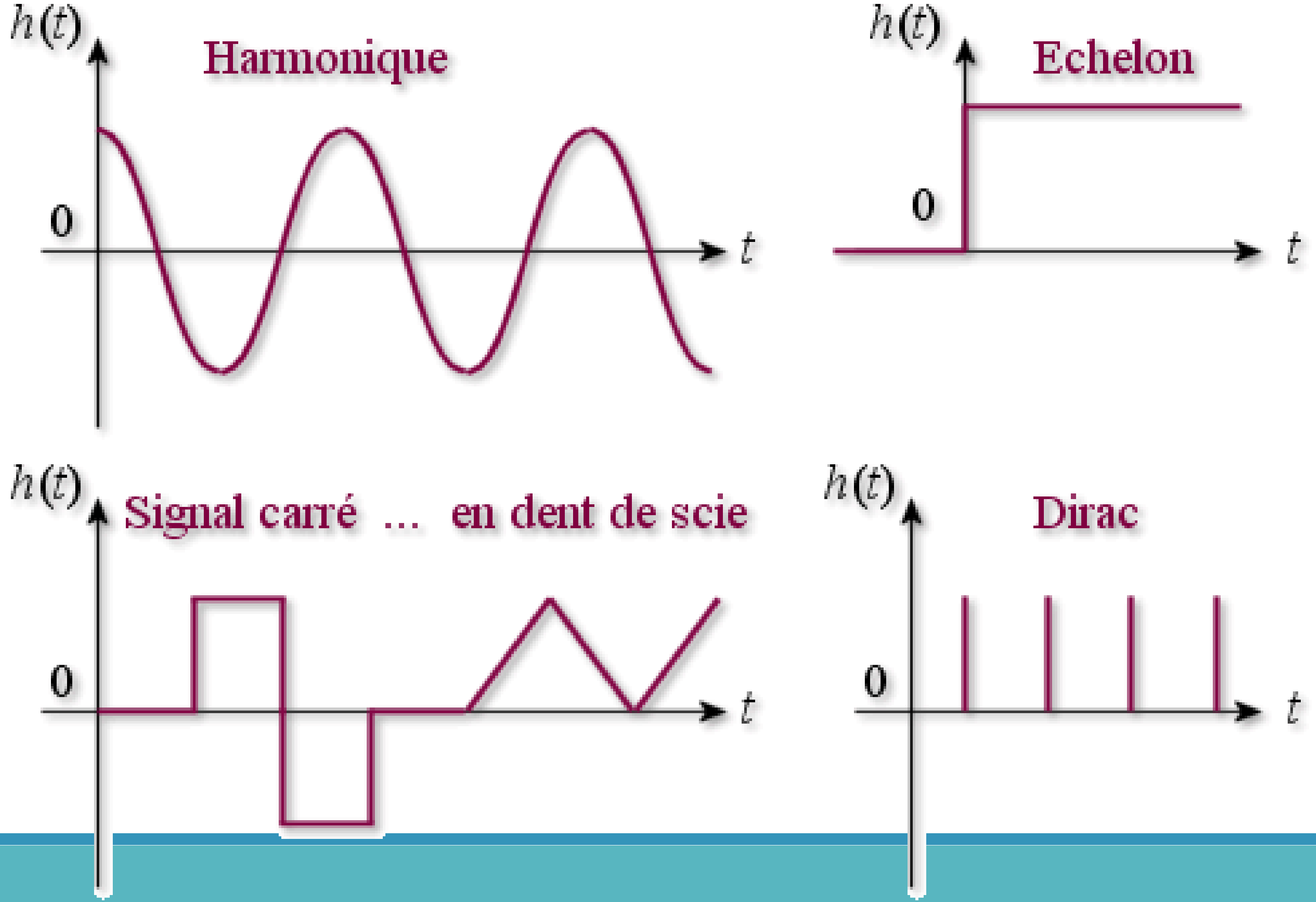
Force d’excitation

- La grandeur décrivant l’évolution du mouvement par rapport au temps:

$$\ddot{\boldsymbol{q}}\,(\mathrm{t}) + 2\boldsymbol{\lambda}\,\dot{\boldsymbol{q}}(\mathrm{t}) + \boldsymbol{\omega}0^2\mathrm{q}(\mathrm{t}) = f_0\cos(\boldsymbol{\omega}\mathrm{t})$$

où f_0 est homogène à une accélération si x est homogène à une longueur (f_0 = $\frac{F_0}{m}$) , ou à une accélération angulaire si x (noté θ) est un angle (f_0 = $\frac{C_0}{I}$), I étant le moment d'inertie.

Différentes excitations



Equation de Lagrange

- L'équation de Lagrange pour un système forcé est

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = - \frac{\partial D}{\partial \dot{q}} + F(t)$$

- En translation : $q = x$
- En rotation : $q = \theta$ et $F(t) = M_0(F)$

Solution de l'équation du mouvement

- L'équation du mouvement :

$$\ddot{\boldsymbol{q}}\,(t) + 2\boldsymbol{\lambda}\dot{\boldsymbol{q}}(t) + \boldsymbol{\omega}0^{2}q(t) = F(t)$$

- La solution de l'équation :

$$q(t) = q_g(t) + q_p(t)$$

  - $q_g(t)$: régime transitoire
  - $q_p(t)$: régime permanant

Solution de l'équation du mouvement

- La solution générale dépend du discriminant réduit :

Si $\Delta' > 0$ ➔ Apériodique ➔ $q_g(t) = e^{-\lambda t}\,(A\, e^{\sqrt{\Delta'}\,t} + B e^{-\sqrt{\Delta'}\,t})$

Si $\Delta' = 0$ ➔ Critique ➔ $q_g(t) = e^{-\lambda t}(A + Bt)$

Si $\Delta' < 0$ ➔ pseudopériodique ➔ $q_g(t) = q_m e^{-\lambda t} \cos(\Omega t + \varphi)$

La solution particulière de l'équation est de la forme :

$$q_p(t) = A \cos(\Omega\, t + \varphi)$$

Solution de l'équation du mouvement

- La notation complexe de la force d'excitation $f_0 \cos(\Omega \mathbf{t})$ est de la forme : $\mathbf{f_0} \boldsymbol{e^{i\Omega t}}$
- La notation complexe de la solution est de la forme:

$$\bar{x} = \bar{x}_0 \, \boldsymbol{e^{i\Omega t}}$$

$$\bar{\dot{x}} = \bar{x}_0 \, \boldsymbol{i\Omega e^{i\Omega t}}$$

$$\bar{\ddot{x}} = -\bar{x}_0 \, \Omega^2 \boldsymbol{e^{i\Omega t}}$$

- L'équation de mouvement devient:

$$(-\Omega^2 + 2\boldsymbol{\lambda} \, \boldsymbol{i}\Omega + \boldsymbol{\omega} 0^2) \, \bar{x}_0 = f_0$$

Solution de l'équation du mouvement

- L'amplitude complexe : $\overline{A} = \dfrac{f_0}{(-\Omega^2 + 2\boldsymbol{\lambda}\, \boldsymbol{i}\,\Omega + \boldsymbol{\omega}_0^2)}$

- L'amplitude réelle du mouvement :

$$A = |\overline{A}| = \frac{f_0}{\sqrt{(\boldsymbol{\omega}_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\lambda^2\Omega^2}}$$

- La phase du mouvement: $\tan\varphi = \dfrac{\boldsymbol{Im}}{réel} = \dfrac{-2\boldsymbol{\lambda}\Omega}{(\boldsymbol{\omega}_0^2 - \Omega^2)}$

Solution de l'équation du mouvement

- L'équation du mouvement en régime permanant:

$$x(t) = x_0 \cos(\boldsymbol{\omega} t + \varphi)$$

- Avec l'amplitude réelle du mouvement :

$$A = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega 0^2 - \Omega^2)^2 + 4\lambda^2\Omega^2}}$$

- La phase du mouvement: $\varphi = \text{Arctan}\,\dfrac{-2\boldsymbol{\lambda}\Omega}{(\omega 0^2 - \Omega^2)}$

Pulsation de résonnance

- La pulsation de résonance est la pulsation pour laquelle l'amplitude A atteint son maximum est appelée pulsation de résonnance de l'amplitude Ωr

- A est maximale : $\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial \Omega} = 0$ ➔ $\Omega = \Omega r = \sqrt{\omega 0^2 - 2\lambda^2}$

Pulsation de résonnance

- En introduisant le facteur de qualité Q = $\frac{\omega 0}{2\lambda}$:

$$\rightarrow \Omega r = \omega 0^2 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$$

- Pour qu'il y ait résonance, il faut que:

$\omega 0^2 - 2\,\lambda > 0$ $\rightarrow$ $1 - \frac{1}{2Q^2} > 0$ $\rightarrow$ $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$

Etude de la phase

- La pulsation de **résonance** Ωr **augmente** lorsque $\boldsymbol{\lambda}$ **diminue**.

- La relation: φ =Arctan$\frac{-2\boldsymbol{\lambda}\Omega}{(\omega 0^2 - \Omega^2)}$ montre que **l'oscillateur** est toujours en **retard** de phase par rapport à l'**excitation** et ce **retard augmente** lorsque la **pulsation de l'excitation augmente**.

Bande passante et facteur de qualité

- La puissance instantanée fournie par la force d'excitation est:

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{F\,dq}{dt} = F\dot{q}$$

Soit $F = fo\cos(\Omega t)$

$q(t) = A\cos(\Omega t + \varphi)$

Donc $P = -fo\cos(\Omega t).\ A\sin(\Omega t + \varphi) = -\frac{1}{2} Afo\,\Omega[\sin(\varphi) + \sin(2\Omega t + \varphi)]$

- La puissance moyenne est:

$$\langle P\rangle = \int_0^T P\,dt = -\frac{1}{2} Afo\,\Omega \sin\varphi$$

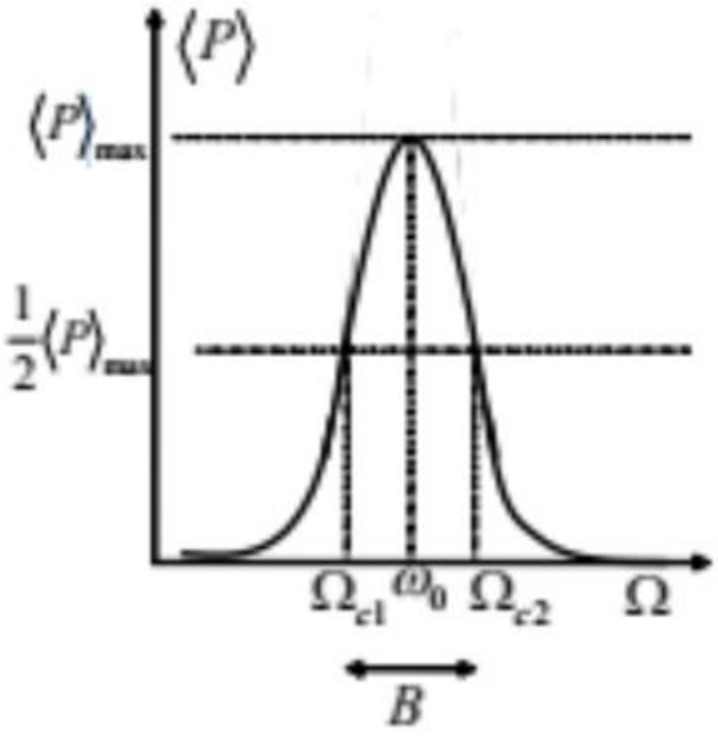
Bande passante et facteur de qualité

$\Omega c1$ et $\Omega c2$ pour lesquels <P> est à son moitié de maximum sont appelés pulsations de coupure;

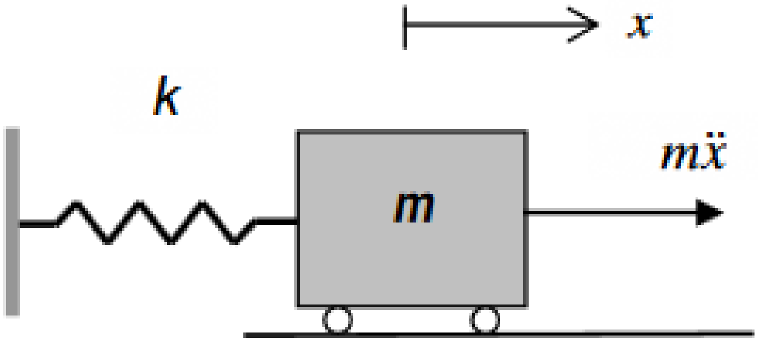
La largeur $\Omega c2 - \Omega c1 = B$ est appelée bande passante.

$$B = 2\boldsymbol{\lambda}$$

Le facteur de qualité: $Q = \frac{\omega 0}{2\boldsymbol{\lambda}} = \frac{\omega 0}{\mathrm{B}}$



Principe de Rayleigh



$x(t) = A \sin(\boldsymbol{\omega} t + \phi)$
$\dot{x}(t) = A\,\boldsymbol{\omega} \cos(\boldsymbol{\omega} t + \phi)$

En faisant l'hypothèse qu'il n'y a pas d'énergie dissipée

- Energie potentielle en fonction du temps :

$$U(t) = \int_0^x k\,\alpha\,d\alpha = \frac{1}{2}k\,x^2 = \frac{1}{2}k\,A^2 \sin^2(\omega_0 t + \phi)$$

- Energie cinétique en fonction du temps :

$$T(t) = \frac{1}{2}m\,\dot{x}^2 = \frac{1}{2}m\,\omega_0^2\,A^2 \cos^2(\omega_0 t + \phi)$$

- En considérant $k = m\omega_0^2$:

$$U(t) + T(t) = \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2\left[\sin^2(\omega_0 t + \phi) + \cos^2(\omega_0 t + \phi)\right] = \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2 = \frac{1}{2}k\,A^2$$

Principe de Rayleigh

- L'énergie totale instantanée du système conservatif en mouvement est proportionnelle à A^2 et indépendante du temps t:

$$U(t) + T(t) = \mathrm{Cte}, \qquad \forall t$$

- Deux conséquences importantes :
  - La dérivée de l'énergie totale (potentielle + cinétique) est nulle:

$$\frac{\mathrm{d}(U(t) + T(t))}{\mathrm{d}t} = 0$$

  - A deux instants t_1 et t_2 quelconques :

$$U(t_1) + T(t_1) = U(t_2) + T(t_2)$$

Principe de Rayleigh

- On obtient alors:

$$U_{max} = T_{max}$$

valable pour les systèmes conservatifs soumis à des mouvements harmoniques. Ce principe de conservation est utilisé :

  - pour obtenir des équations du mouvement,
  - pour calculer directement la pulsation naturelle des systèmes.