Université Internationale de Casablanca
LAUREATE INTERNATIONAL UNIVERSITIES

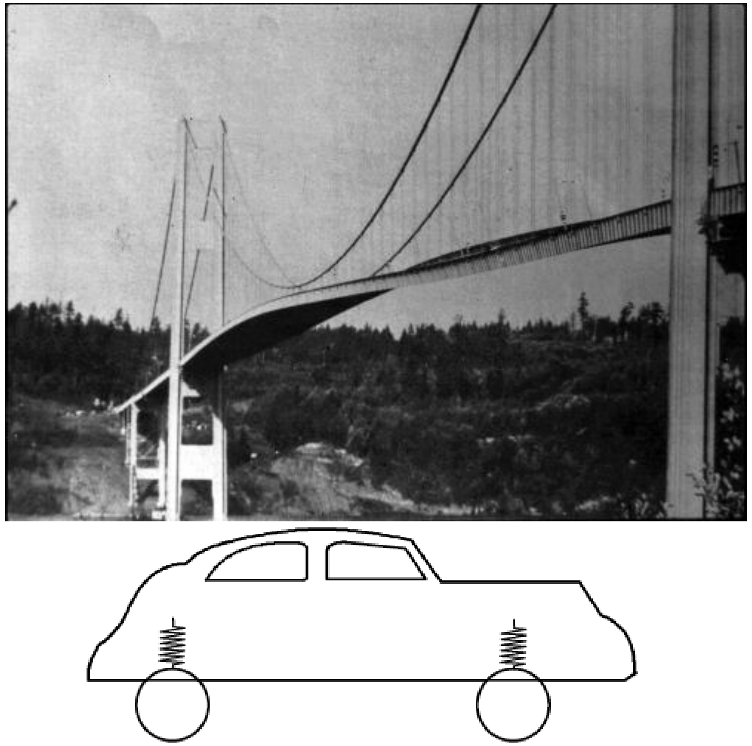
Deuxième année cycle d'ingénieurs
Filière Génie Mécanique

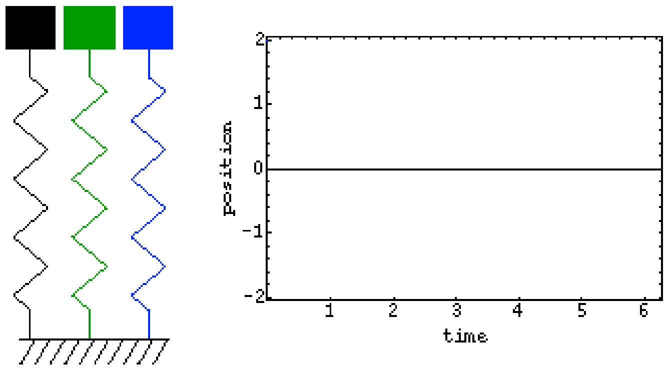
Cours de:

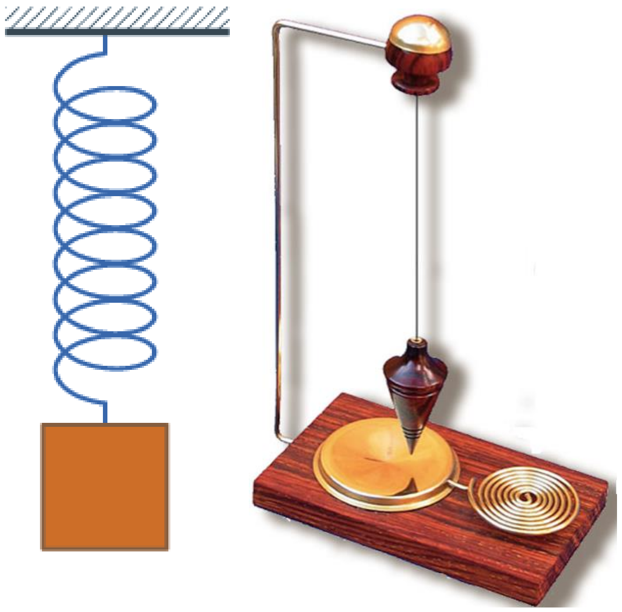
Vibration mécanique

Professeur Basma Benhadou

Année universitaire : 2017-2018







B. Les systèmes linéaires libres amortis à un degré de liberté

- Force d’amortissement
- Equation de Lagrange pour les systèmes amortis
- Equation du mouvement
- Décrément logarithmique
- Constante du temps et le temps de relaxation

Oscillations libres amorties

- La présence des frottements implique une dissipation de l'énergie mécanique du système sous forme de chaleur. On observe :
  - soit des oscillations dont l'amplitude diminue au cours du temps jusqu'à son annulation,
  - soit un retour à l'équilibre sans oscillation.
- Les forces de frottement résistent et s'opposent au mouvement du corps.
- On parle alors d'amortissement

Force d’amortissement

- La force d’amortissement est l’atténuation du mouvement par la dissipation de l’énergie engendrée. On définit le coefficient d’amortissement visqueux par:

$$\boldsymbol{Fq = -\alpha\,\dot{q}}$$

- Dans un mouvement unidimensionnel x:

$$\boldsymbol{f = -\alpha\,\vartheta}$$

- Avec :
  - α est le coefficient de frottement (constante positive) en N.s/m.
  - et ϑ vitesse du corps en mouvement
  - Le signe (-) vient du fait que cette force s'oppose au mouvement en agissant dans la direction et le sens contraire à la vitesse.

Equation de Lagrange dans un système libre amorti

En tenant compte de la force de type frottement fluide (coefficient de frottement visqueux $\boldsymbol{\alpha}$), l 'équation de Lagrange devient :

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = F_{q}$$

Fonction de dissipation

Sous l'action des forces de frottements, le système dissipe (perde) de l'énergie mécanique sous forme de chaleur, il y a donc une relation entre la force $\boldsymbol{F}$q et la fonction de dissipation D d'un côté et la fonction de dissipation et le coefficient de frottement visqueux $\boldsymbol{\alpha}$:

$$\boldsymbol{D = \frac{1}{2}\alpha\dot{q}^2}$$

$$\boldsymbol{f = -\alpha\,\dot{q} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{q}}}$$

L'équation de Lagrange devient : $$\boldsymbol{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{q}}}$$

Equation du mouvement d'un système libre amorti

Equation du mouvement d'un système libre amorti soumis à une force de frottement ($\boldsymbol{f} = -\boldsymbol{\alpha}\,\boldsymbol{\vartheta}$)est :

$$\ddot{\boldsymbol{q}} + 2\boldsymbol{\lambda}\dot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{\omega}0^{\mathbf{2}}\mathrm{q} = 0$$

Avec:

- $\boldsymbol{\lambda}$: facteur d'amortissement $\boldsymbol{\lambda} = \frac{\alpha}{2m}$
- $\boldsymbol{\omega}_0$: pulsation propre

Par rapport aux oscillations libres non amorties, on reconnaît un nouveau terme ($\frac{\alpha}{m}$) provenant de la dissipation d'énergie.

Le facteur qualité du système

- Le facteur qualité du système présentant le taux d'amortissement de l'oscillateur est définit par:

$$\mathbf{Q} = \frac{\boldsymbol{\omega 0}}{\mathbf{2\lambda}}$$

- L'équation du mouvement devient:

$$\ddot{\boldsymbol{q}} + \frac{\omega 0}{Q}\dot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{\omega}0^{\mathbf{2}}\mathrm{q} = 0$$

Solution de l'équation différentielle

- **Equation différentielle:**

$$\ddot{q} + \frac{\omega 0}{Q}\dot{q} + \omega 0^{2} q = 0$$

- **Equation caractéristique:**

$$r^{2} + 2\lambda r + \omega 0^{2} = 0$$

- **Recherche du discriminant réduit:**

$$\Delta' = b'^{2} - ac \qquad \text{avec } b' = b/2$$

$$\Delta' = \lambda^{2} - \omega 0^{2}$$

3 cas qui se présentent

Solution de l'équation différentielle

- Cas 1 : Δ' > 0

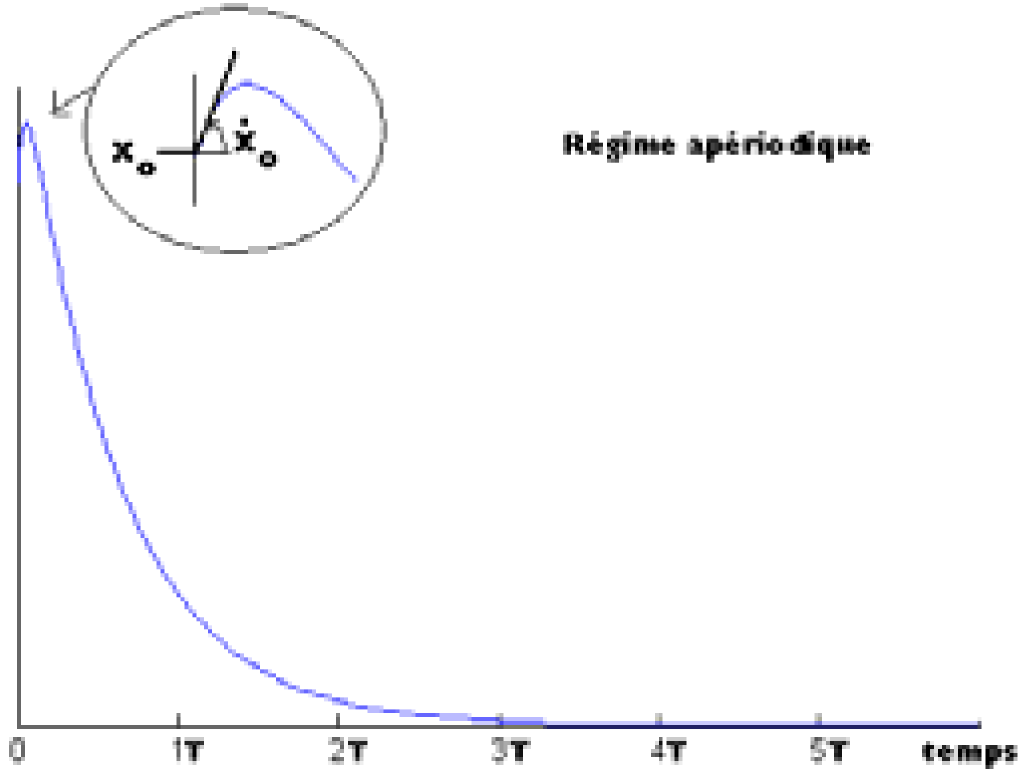
Régime apériodique (amortissement fort)

$$\Delta' = \lambda^2 - \omega 0^2 > 0$$

$$\lambda^2 > \omega 0^2$$

$$\frac{\lambda^2}{\omega 0^2} > 1$$

$$Q < \frac{1}{2}$$



r1 = -λ-$\sqrt{\lambda^2 - \omega 0^2}$; r2 = -λ+$\sqrt{\lambda^2 - \omega 0^2}$

q(t) = A $e^{(-\lambda-\sqrt{\lambda^2 - \omega 0^2})t}$ + B $e^{(-\lambda+\sqrt{\lambda^2 - \omega 0^2})t}$

Solution de l'équation différentielle

- **Cas 2 : Δ' = 0**

Régime critique (retour le plus rapide à l'équilibre sans oscillation)

$\Delta' = 0$ ➔ $\lambda^2 - \omega 0^2 = 0$

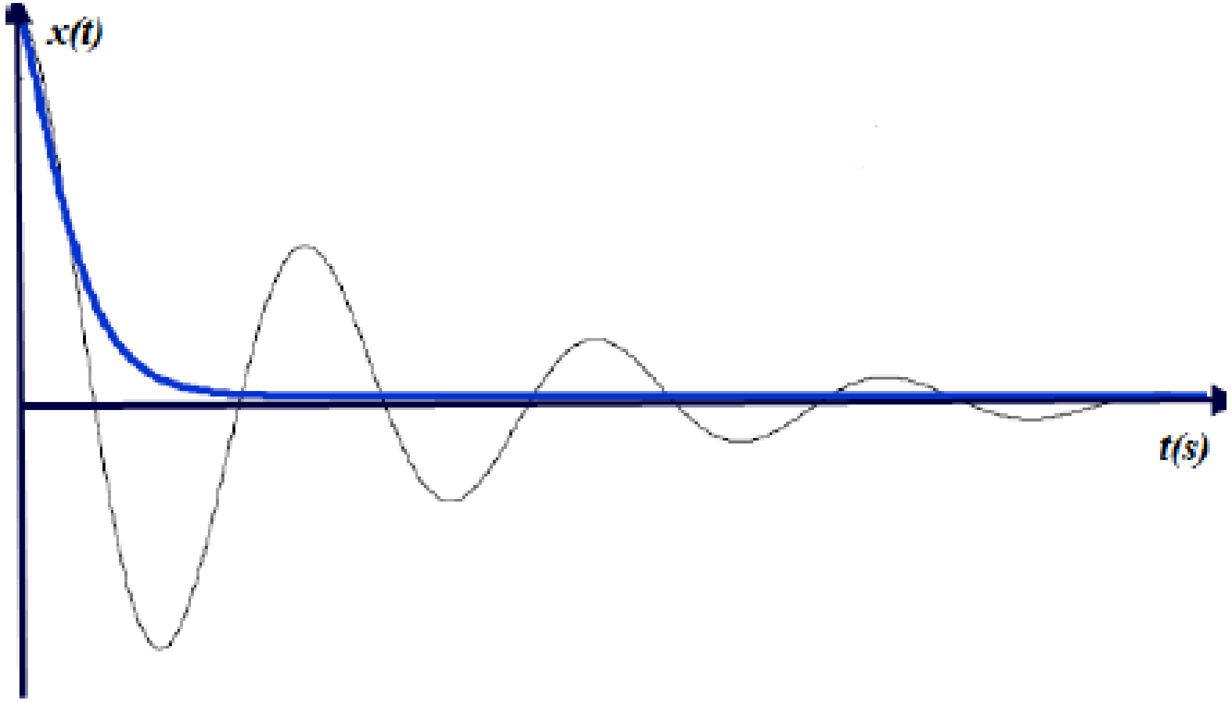
$$\lambda^2 = \omega 0^2$$

$$\frac{\lambda^2}{\omega 0^2} = 1$$

$$Q = \frac{1}{2}$$

r1 = r2 = r ➔ **r = - λ = - ω0**

q(t) = $e^{-\lambda t}$(A + Bt)



Solution de l’équation différentielle

- **Cas 3 : Δ’ < 0**

Régime pseudopériodique (faible amortissement)

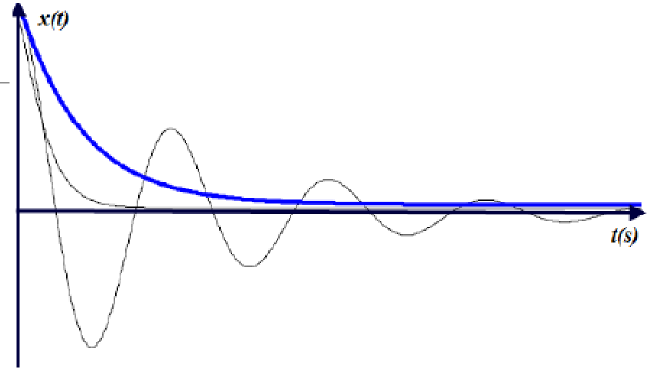
$\Delta' < 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 - \omega_0^2 < 0$

$\lambda^2 < \omega_0^2$

$\frac{\lambda^2}{\omega_0^2} < 1$

$Q > \frac{1}{2}$

r1 = $-\lambda - j\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$; r2 = $-\lambda + j\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$



Pseudo-pulsation du mouvement:

$\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$

Pseudo-période:

$T = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}} = \frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{\omega_0^2}}}$

$T = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{\omega_0^2}}}$

q(t) = $q_m e^{-\lambda t} \cos(\omega t + \varphi)$

Ou q(t) = $e^{-\lambda t}(A\cos\omega t + B\sin\omega t)$

Décrément logarithmique

- Le décrément logarithmique évalue la diminution exponentielle de l'amplitude du mouvement pseudopériodique.

$$\delta = ln\ \frac{q(t)}{q\ (t+T)}$$

Ou
$$\delta = \frac{1}{n}\ ln\ \frac{q(t)}{q\ (t+nT)}$$

Soit:
$$\delta = \lambda\, T$$

Quel que soit le régime l'amortissement des oscillations dépend du terme $e^{-\lambda t}$

Temps de relaxation

- Nous avons $\lambda = \frac{1}{\tau}$
- τ est une constante de temps.
- A chaque écoulement d'un intervalle $\tau, \mathrm{l'exponentielle}$ est divisé par 2,7
- L'amplitude diminue à chaque τ

Temps de relaxation

- Le temps de relaxation met en évidence les dissipations énergétique dans le cas des oscillations amortis.

$$\tau_r = \frac{\tau}{2} = \frac{1}{2\lambda}$$